math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

Gelfand-Mazurov teorem i osnovni teorem algebre

komleksna analiza **osnovni teorem algebre**

Ilja Gogić, Mateo Tomašević

I. Gogić, PMF-Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, Bijenička 30, 10000 Zagreb, Hrvatska

ilja@math.hr

M. Tomašević, PMF-Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, Bijenička 30, 10000 Zagreb, Hrvatska

mateo.tomasevic@math.hr

Sažetak

U ovom preglednom radu prezentiramo relativno elementaran dokaz slavnog Gelfand-Mazurovog teorema, koji kaže da je svaka kompleksna normirana algebra s dijeljenjem izomorfna algebri kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$, te pomoću njega dajemo kratak dokaz Osnovnog teorema algebre.

1 Uvod

Gelfand–Mazurov teorem (GMT u daljnjem), nazvan prema sovjetskom matematičaru I. Gelfandu i poljskom matematičaru S. Mazuru, je fundamentalni teorem teorije Banachovih algebri koji kaže da je svaka kompleksna normirana algebra s dijeljenjem izomorfna algebri kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Taj rezultat je najprije na\-javio S. Mazur 1938. godine u [6], a zatim ga je dokazao I. Gelfand 1941. godine u [3].

GMT se obično iskazuje za Banachove algebre (tj. za potpune normirane algebre) te se standardno dokazuje koristeći Liouvilleov teorem iz kompleksne analize. U ovom preglednom radu ćemo najprije prezentirati relativno elementaran dokaz GMT-a (Teorem 8) kojeg je, uz dodatnu pretpostavku komutativnosti algebre, dao japanski matematičar S. Kametani u [5]. U tom dokazu se od funkcijskih metoda koristi samo koncept neprekidnosti. Kao što ćemo vidjeti, Kametanijev dokaz prolazi i bez pretpostavke komutativnosti algebre, odakle jednostavno slijedi da je svaka konačnodimenzionalna kompleksna algebra s dijeljenjem izomorfna s $\mathbb{C}$ (Korolar 12). Koristeći opservaciju španjolskog matematičara J. Almirae (vidjeti [1]), kao jednostavnu posljedicu te činjenice dobivamo još jedan dokaz Osnovnog teorema algebre (Teorem 14).

Za vektorski prostor A nad poljem $\mathbb{F}$ kažemo da je *(asocijativna)*

2 Pregled osnovnih pojmova

algebra, ako je na A zadana operacija *množenja*, tj. asocijativna binarna operacija

$$A \times A \to A, \qquad (x, y) \mapsto xy$$

koja zadovoljava

$$(\lambda x + \mu y)z = \lambda(xz) + \mu(yz) \qquad \text{i} \qquad x(\lambda y + \mu z) = \lambda(xy) + \mu(xz)$$

za sve $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ te $x, y, z \in A$.

Za elemente $x, y \in A$ kažemo da *komutiraju* ako vrijedi $xy = yx$. Ako svi elementi u A komutiraju, onda kažemo da je A *komutativna algebra*.

Za algebru $A \neq \{0\}$ kažemo da je *unitalna* (ili *algebra s jedinicom*) ako A sadrži element 1_A sa svojstvom

$$1_A x = x 1_A = x \qquad \forall x \in A.$$

U tom slučaju element 1_A se zove *jedinica* u A i ona je jedinstvena.

Ako je A unitalna algebra, tada za element $x \in A$ kažemo da je *invertibilan* ako postoji element $x^{-1} \in A$ takav da je

$$x^{-1}x = xx^{-1} = 1_A.$$

Element x^{-1}, ako postoji, je jedinstven i zovemo ga *inverz* od x. Skup svih invertibilnih elemenata algebre A označavamo s $A^\times$. Primijetimo da je $A^\times$ grupa s obzirom na operaciju množenja.

Napomena 1. *Neka je A unitalna algebra. Ako elementi $x, y \in A$ komutiraju i ako je $y \in A^\times$, onda također komutiraju elementi x i y^{-1}. Naime $xy = yx$ je ekvivalentno s $y^{-1}x = xy^{-1}$.*

Ako je A unitalna algebra takva da vrijedi $A^\times = A \setminus \{0\}$, tj. ako je svaki nenul element u A invertibilan, onda kažemo da je A *algebra s dijeljenjem*. Primijetimo da ako je A komutativna algebra s dijeljenjem tada je A polje koje sadrži $\mathbb{F}$ kao potpolje (nakon identifikacije $\mathbb{F}$ s $\mathbb{F}1_A \subseteq A$).

Neka je A algebra. Za potprostor I od A kažemo da je *obostrani ideal* (ili samo *ideal*) u A ako vrijedi

$$IA = \{xy : x \in I, y \in A\} \subseteq I \qquad \text{i} \qquad AI = \{xy : x \in A, y \in I\} \subseteq I.$$

Očito su $\{0\}$ i A ideali u A koje zovemo *trivijalni ideali*. Ako A nema netrivijalnih ideala onda kažemo da je A *prosta*.

Napomena 2. *Neka je A unitalna algebra. Tada A možemo promatrati kao (unitalni) prsten, tako da zaboravimo na dodatnu strukturu. Ako je $I \subseteq A$, onda je I ideal algebre A ako i samo ako je I ideal prstena A. Zaista, neka je I ideal prstena A. Tada za $\lambda \in \mathbb{F}$ i $x \in I$ imamo*

$$\lambda x = \lambda(1_A x) = (\lambda 1_A)x \in I.$$

Dakle, I je potprostor od A pa stoga ideal algebre A. Obrat je trivijalan.

Napomena 3. *Neka je A unitalna algebra i neka je $I \neq A$ ideal u A. Tada vrijedi $1_A \notin I$. štoviše, I ne sadrži niti jedan invertibilni element, tj. $I \cap A^\times = \emptyset$. Posebno, ako je A algebra s dijeljenjem, tada je A prosta algebra.*

Neka je I ideal u algebri A. U kvocijentni vektorski prostor A/I uvodimo operaciju množenja na sljede\' ci način:

$$(x+I)(y+I) := xy + I \qquad (x, y \in A).$$

Iz činjenice da je I (obostrani) ideal lako vidimo da ta definicija ima smisla, odnosno da ne ovisi o izboru predstavnika x i y klasa kvocijentnog prostora. S tako definiranim množenjem A/I postaje algebra koja se zove *kvocijentna algebra* algebre A po idealu I. Ako je 1_A jedinica u algebri A, očito je njena klasa $1_A + I$ jedinica u kvocijentnoj algebri A/I.

Napomena 4. *Za ideal $M \neq A$ algebre A kažemo da je maksimalan, ako M nije sadržan niti u jednom drugom idealu u A različitom od A. Ako je A unitalna komutativna algebra, tada se lako vidi da je ideal M u A maksimalan ako i samo ako je A/M polje (vidjeti npr. [7, Teorem 6.19]). Posebno, unitalna komutativna algebra A je prosta ako i samo ako je A polje.*

Primjer 5. *Neka je $\mathbb{F}$ polje.*

- *[(a)] Promotrimo algebru polinoma $\mathbb{F}[X]$ nad $\mathbb{F}$ u jednoj varijabli X. Tada je $\mathbb{F}[X]$ unitalna komutativna algebra, pri čemu je jedinica u $\mathbb{F}[X]$ konstantni polinom 1. Kao što znamo, $\mathbb{F}[X]$ je kao prsten domena glavnih ideala (npr. vidjeti [7, Teorem 8.9]). Drugim riječima, svaki ideal I prstena $\mathbb{F}[X]$ (pa prema Napomeni 2 i algebre $\mathbb{F}[X]$) je glavni, odnosno oblika*

  $$I = \langle p \rangle = p(X)\mathbb{F}[X]$$

  za neki polinom $p \in \mathbb{F}[X]$. Nadalje, ideal $I = \langle p \rangle$ je maksimalan ako i samo je polinom p ireducibilan, tj. p se ne može prikazati kao produkt dva nekonstanta polinoma u $\mathbb{F}[X]$ (za detalje vidjeti [4, Sections III.5, III.6]). Prema Napomeni 4 to je ekvivalentno činjenici da je kvocijentna algebra $\mathbb{F}[X]/\langle p \rangle$ polje.
- *[(b)] Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Promotrimo skup $\mathrm{End}F(V)$ svih linearnih operatora s V u V. Tada je $\mathrm{End}F(V)$ unitalna algebra nad $\mathbb{F}$ s obzirom na operacije*

  $$(\lambda T)v := \lambda(Tv), \quad (T_1 + T_2)(v) := T_1 v + T_2 v \quad \text{i} \quad (T_1 T_2)(v) := T_1(T_2 v),$$

  gdje su $T_1, T_2 \in \mathrm{End}F(V)$, $v \in V$ te $\lambda \in \mathbb{F}$. Jedinica u $\mathrm{End}F(V)$ je jedinični operator. Lako se provjeri da je $\mathrm{End}F(V)$ prosta algebra koja je nekomutativna čim je $\dim V > 1$.

Normirana algebra je algebra A nad poljem $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ na kojoj je zadana *submultiplikativna norma*, tj. norma $\|\cdot\|$ takva da vrijedi

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \qquad \forall x, y \in A.$$

Napomena 6. *Neka je A normirana algebra.*

- *[(a)] Operacija množenja $(x,y) \mapsto xy$ je neprekidna kao funkcija $A \times A \to A$. To slijedi direktno iz nejednakosti*

$$\begin{aligned}\|xy - x'y'\| &= \|x(y-y') + (x-x')y'\| \leq \|x(y-y')\| + \|(x-x')y'\| \\ &\leq \|x\|\|y-y'\| + \|x-x'\|\|y'\|,\end{aligned}$$

gdje su $x, x', y, y' \in A$.

- *[(b)] Ako je A unitalna, tada je $\|1_A\| \geq 1$. To slijedi direktno iz nejednakosti*

$$\|1_A\| = \|1_A^2\| \leq \|1_A\|^2$$

i činjenice da je $\|1_A\| \neq 0$ (jer je $1_A \neq 0$).

Primjer 7. *Neka je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.*

- *[(a)] Algebra polinoma $\mathbb{F}[X]$ nad $\mathbb{F}$ u jednoj varijabli X (Primjer 5 (a)) postaje normirana algebra s obzirom na sup-normu po jediničnoj kugli u $\mathbb{F}$:*

$$\|p\| := \sup\{|p(\lambda)| : |\lambda| \leq 1\}.$$

- *[(b)] Neka je V konačnodimenzionalni normiran prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Tada algebra $\mathrm{End}F(V)$ (Primjer 5 (b)) postaje normirana algebra s obzirom na operatorsku normu*

$$\|T\|_o := \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} \qquad (T \in \mathrm{End}F(V))$$

(vidjeti npr. [9, Teorem 2.24]).

3 Dokaz Gelfand-Mazurovog teorema

Najprije iskažimo Gelfand-Mazurov teorem.

Teorem 8. *[Gelfand-Mazurov teorem] Neka je A kompleksna normirana algebra s dijeljenjem. Tada je*

$$A = \mathbb{C}1_A = \{\lambda 1_A : \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

U dokazu Teorema 8 koristit ćemo dva pomoćna rezultata, Leme 9 i 11. Napomenimo da za $x_0 \in A$ i $r > 0$ s $K(x_0, r)$ i $\overline{K}(x_0, r)$ redom označavamo otvorenu i zatvorenu kuglu oko x_0 radijusa r, tj.

$$K(x_0, r) = \{x \in A : \|x - x_0\| < r\} \qquad \text{i} \qquad \overline{K}(x_0, r) = \{x \in A : \|x - x_0\| \leq r\}.$$

Nadalje, za $x \in A$ i polinom $p \in \mathbb{C}[z]$, $p(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_n z^n$, definiramo

$$p(x) := \alpha_0 1_A + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n \in A.$$

Lema 9. *Neka je A normirana algebra s dijeljenjem. Tada je invertiranje $x \mapsto x^{-1}$ neprekidno, kao funkcija $A^\times \to A^\times$.*

Dokaz. Neka je $x \in A^\times$ proizvoljan i neka je

$$y \in K\left(x, \frac{1}{2\|x^{-1}\|}\right). \tag{1}$$

Primijetimo da je $y \in A^\times$, jer bismo u protivnom imali $y = 0$ pa bi (1) povlačilo

$$\|1_A\| = \|xx^{-1}\| \leq \|x\|\|x^{-1}\| < \frac{1}{2},$$

što je kontradikcija s Napomenom 6 (b). Imamo

$$\|y^{-1}\| - \|x^{-1}\| \leq \|y^{-1} - x^{-1}\| = \|y^{-1}(x-y)x^{-1}\| \leq \|y^{-1}\|\|x-y\|\|x^{-1}\| < \frac{1}{2}\|y^{-1}\|$$

pa je $\|y^{-1}\| < 2\|x^{-1}\|$. Gornji račun sada daje

$$\|y^{-1} - x^{-1}\| < 2\|x^{-1}\|^2\|x-y\|,$$

iz čega direktno slijedi neprekidnost invertiranja. ∎

Napomena 10. *Kako je $\|1_A\| \geq 1$ (Napomena 6 (b)), iz dokaza Leme 9 za $x = 1_A$ dobivamo da za sve $y \in K\left(1_A, \frac{1}{2\|1_A\|}\right)$ vrijedi $y \in A^\times$ te $\|y^{-1}\| < 2\|1_A\|$.*

Lema 11. *Neka je $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da je*

$$\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0. \tag{2}$$

Tada f postiže maksimum na $\mathbb{C}$.

Proof. Najprije primijetimo da iz (2) slijedi da je f ograničena na $\mathbb{C}$ i neka je

$$M := \sup_{z\in\mathbb{C}} f(z).$$

Također, (2) povlači da postoji $R > 0$ takav da je $f(z) < \frac{M}{2}$ za sve $z \in \mathbb{C}$, $|z| > R$. S druge strane, restrikcija od f na $\overline{K}(0, R)$ je neprekidna na kompaktnom skupu pa postiže maksimum. Očito je taj maksimum ujedno i maksimum funkcije f. ∎

Dokaz Teorema 8. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $x \in A \setminus \mathbb{C}1_A$. Očito za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$ imamo $\alpha x + \beta 1_A \in A \setminus \mathbb{C}1_A$. Posebno je $x - \lambda 1_A \neq 0$ za sve $\lambda \in \mathbb{C}$ pa je prema Lemi 9 funkcija $\varphi : \mathbb{C} \to A$ zadana s

$$\varphi(\lambda) := (x - \lambda 1_A)^{-1}$$

dobro definirana i neprekidna na $\mathbb{C}$. Nadalje za sve $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ imamo

$$\|\varphi(\lambda)\| \leq |\lambda^{-1}| \|(\lambda^{-1}x - 1_A)^{-1}\|,$$

odakle slijedi

$$\lim_{|\lambda| \to +\infty} \|\varphi(\lambda)\| = 0. \tag{3}$$

Naime, za $|\lambda| > 2\|x\|\|1_A\|$ imamo $1_A - \lambda^{-1}x \in K\left(1_A, \frac{1}{2\|1_A\|}\right)$ pa je prema Napomeni 10

$$\|(\lambda^{-1}x - 1_A)^{-1}\| < 2\|1_A\|.$$

Stoga prema Lemi 11 postoji $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ takav da je

$$\|\varphi(\lambda_0)\| = \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \|\varphi(\lambda)\|.$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je

$$\lambda_0 = 0 \qquad \text{i} \qquad \|\varphi(\lambda_0)\| = 1. \tag{4}$$

Naime, u suprotnom element $x \in A \setminus \mathbb{C}1_A$ zamijenimo elementom

$$y := (x + \lambda_0 1_A)\|\varphi(\lambda_0)\| \in A \setminus \mathbb{C}1_A.$$

Iz (4) slijedi da za sve $\lambda \in \mathbb{C}$ imamo

$$\|(x - \lambda 1_A)^{-1}\| = \|\varphi(\lambda)\| \leq \|\varphi(0)\| = \|x^{-1}\| = 1. \tag{5}$$

Pokazat ćemo da (5) povlači

$$\|(x - 2^{-1}1_A)^{-1}\| = \|\varphi(2^{-1})\| = 1. \tag{6}$$

Jednom kada pokažemo (6), bit će moguće element $x \in A \setminus \mathbb{C}1_A$ zamijeniti elementom $x - 2^{-1}1_A \in A \setminus \mathbb{C}1_A$, odakle će induktivno slijediti

$$\|(x - (2^{-1}n)1_A)^{-1}\| = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ovo je kontradikcija, jer je prema (3)

$$\lim_{n \to \infty} \|\varphi(2^{-1}n)\| = \lim_{n \to \infty} \|(x - (2^{-1}n)1_A)^{-1}\| = 0.$$

Preostaje dokazati jednakost (6). Prema (5) znamo da je $\|\varphi(2^{-1})\| \leq 1$ pa pretpostavimo da je

$$\|\varphi(2^{-1})\| < 1.$$

Neka je $0 < \delta < 2^{-1}$ takav da je $\|\varphi(2^{-1})\| = 1 - 2\delta$. Iz neprekidnosti funkcije φ u 2^{-1} slijedi da postoji $\eta > 0$ sa svojstvom

$$|\lambda - 2^{-1}| \leq \eta \implies \|\varphi(\lambda)\| < 1 - \delta. \tag{7}$$

Za $n \in \mathbb{N}$ označimo s $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$ sve n-te korijene iz jedinice. Promotrimo polinom $p \in \mathbb{C}[z]$ definiran s

$$p(z) := z^n - 2^{-n} = \prod_{j=0}^{n-1}(z - 2^{-1}\xi_j).$$

Imamo

$$nz^{n-1} = p'(z) = \sum_{j=0}^{n-1}\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n-1}(z - 2^{-1}\xi_k)$$

pa je prema Napomeni 1

$$\begin{aligned}
p(x)\left(\sum_{j=0}^{n-1}(x - 2^{-1}\xi_j 1_A)^{-1}\right) &= (x^n - 2^{-n}1_A)\left(\sum_{j=0}^{n-1}(x - 2^{-1}\xi_j 1_A)^{-1}\right)\\
&= \left(\prod_{j=0}^{n-1}(x - 2^{-1}\xi_j 1_A)\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1}(x - 2^{-1}\xi_j 1_A)^{-1}\right)\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n-1}(x - 2^{-1}\xi_k 1_A)\\
&= p'(x)\\
&= nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

Iz prethodnog računa (i Napomene 1) slijedi

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1}(x - 2^{-1}\xi_j 1_A)^{-1} &= nx^{n-1}(x^n - 2^{-n}1_A)^{-1}\\
&= nx^{n-1}x^{-n}(1_A - (2^{-1}x^{-1})^n)^{-1}\\
&= nx^{-1}(1_A - (2^{-1}x^{-1})^n)^{-1}\\
&= nx^{-1}((1_A - (2^{-1}x^{-1})^n) + (2^{-1}x^{-1})^n)(1_A - (2^{-1}x^{-1})^n)^{-1}\\
&= nx^{-1}(1_A + (2^{-1}x^{-1})^n(1_A - (2^{-1}x^{-1})^n)^{-1}),
\end{aligned}$$

odnosno

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(2^{-1}\xi_j) = x^{-1} + x^{-1}(2^{-1}x^{-1})^n(1_A - (2^{-1}x^{-1})^n)^{-1} \tag{8}$$

Iz (8) i (5) dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\|\varphi(2^{-1}\xi_j)\| &\geq \frac{1}{n}\left\|\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(2^{-1}\xi_j)\right\|\\
&= \left\|x^{-1} + x^{-1}(2^{-1}x^{-1})^n(1_A - (2^{-1}x^{-1})^n)^{-1}\right\| \qquad (9)\\
&\geq \|x^{-1}\| - \|x^{-1}(2^{-1}x^{-1})^n(1_A - (2^{-1}x^{-1})^n)^{-1}\|\\
&\geq \|x^{-1}\| - \|x^{-1}\|\|2^{-1}x^{-1}\|^n\|(1_A - (2^{-1}x^{-1})^n)^{-1}\|\\
&= 1 - 2^{-n}\|(1_A - (2^{-1}x^{-1})^n)^{-1}\|.
\end{aligned}$$

Definirajmo funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ s

$$\begin{aligned}
f(n) &:= \operatorname{card}\{0 \leq j \leq n-1 : |2^{-1}\xi_j - 2^{-1}| \leq \eta\}\\
&= \operatorname{card}\{0 \leq j \leq n-1 : |\xi_j - 1| \leq 2\eta\}.
\end{aligned}$$

Tada iz (9), (7) i (5) dobivamo

$$\frac{f(n)(1-\delta) + (n - f(n))}{n} > 1 - 2^{-n}\|(1_A - (2^{-1}x^{-1})^n)^{-1}\| \tag{10}$$

Kako je $\|x^{-1}\| = 1$, za dovoljno velike $n \in \mathbb{N}$ imamo

$1_A - (2^{-1}x^{-1})^n \in K\left(1_A, \frac{1}{2\|1_A\|}\right)$, pa je prema Napomeni 10

$$\lim_{n\to\infty}(1 - 2^{-n}\|(1_A - (2^{-1}x^{-1})^n)^{-1}\|) = 1.$$

S druge strane, neka je ℓ duljina luka kružnice $|z| = 1$ određenog s $|z-1| \leq 2\eta$. Tada za sve $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\frac{n}{2\pi}\ell - 1 \leq f(n) \leq \frac{n}{2\pi}\ell + 1,$$

pa je prema teoremu o sendviču

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n} = \frac{\ell}{2\pi}.$$

Prelaskom na limes u relaciji (10) dobivamo

$$1 - \frac{\ell}{2\pi}\delta \geq 1,$$

što je kontradikcija. Time je dokaz teorema završen. ∎

Korolar 12. *Neka je A konačnodimenzionalna kompleksna algebra s dijeljenjem. Tada je $A = \mathbb{C}1_A$.*

Dokaz. Prema Gelfand-Mazurovom teoremu, dovoljno je dokazati da je A moguće opskrbiti sa submultiplikativnom normom, tj. da postoji norma $\|\cdot\|_*$ na A s obzirom na koju je $(A, \|\cdot\|_*)$ normirana algebra.

U tu svrhu naprije izaberimo proizvoljnu normu $\|\cdot\|$ na A. Npr., kako je $n := \dim A < \infty$, postoji baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$ za A. Tada za svaki $x \in A$ postoje jedinstveni skalari $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)$ takvi da je

$$x = \alpha_1(x)e_1 + \ldots + \alpha_n(x)e_n,$$

pa možemo definirati

$$\|x\| := \max\{|\alpha_1(x)|, \ldots, |\alpha_n(x)|\}.$$

Promotrimo algebru $\mathrm{End}C(A)$ svih linearnih operatora na A, opskrbljenu s operatorskom normom $\|\cdot\|_o$ (Primjer 7 (b)). Za svako $a \in A$ neka je $L_a \in \mathrm{End}C(A)$ pripadni operator lijevog množenja s a, tj. $L_a(x) := ax$ $(x \in A)$. Definirajmo

$$\|a\|_* := \|L_a\|_o = \sup\{\|ax\| : \|x\| \leq 1\} \qquad (a \in A).$$

Očito je $\|\cdot\|_*$ norma na A. Kako je operatorska norma submultiplikativna, za sve $a, b \in A$ imamo

$$\|ab\|_* = \|L_{ab}\|_o = \|L_aL_b\|_o \leq \|L_a\|_o\|L_b\|_o = \|a\|_*\|b\|_*.$$

Dakle, $(A, \|\cdot\|_*)$ je normirana algebra. ∎

Napomena 13. *čitatelj bi se mogao zapitati vrijedi li tvrdnja Korolara 12 i bez pretpostavke da je A konačne dimenzije. Odgovor je negativan. Naime, algebra $\mathbb{C}((X))$ formalnih Laurentovih redova nad $\mathbb{C}$ u jednoj varijabli X (vidjeti npr. [2, Example 1.41]) je primjer beskonačnodimenzionalne kompleksne algebre s dijeljenjem. Posebno, iz GMT-a slijedi da na algebri $\mathbb{C}((X))$ nije moguće definirati normu uz koju bi ona postala normirana algebra. Argument iz dokaza Korolara 12 ne prolazi, jer zbog beskonačnodimenzionalnosti od $\mathbb{C}((X))$ operatori lijevog množenja na $\mathbb{C}((X))$, s obzirom na proizvoljnu normu na $\mathbb{C}((X))$, nisu nužno ograničeni.*

4 Dokaz osnovnog teorema algebre preko Gelfand-Mazurovog teorema

Teorem 14. *[Osnovni teorem algebre] Polje kompleksnih brojeva* $\mathbb{C}$ *je algebarski zatvoreno. Drugim riječima, svaki nekonstantni polinom* $p \in \mathbb{C}[z]$ *ima korijen u* $\mathbb{C}$.

Dokaz. Dovoljno je dokazati da ako je $p \in \mathbb{C}[z]$ ireducibilan polinom, tada je p nužno stupnja 1.

Neka je stoga

$$p(z) = \alpha_0 + \ldots + \alpha_n z^n \in \mathbb{C}[z]$$

ireducibilan polinom, gdje je $n \in \mathbb{N}$ i $\alpha_n \neq 0$. Trebamo pokazati da je $n = 1$. Neka je $\langle p \rangle = p(z)\mathbb{C}[z]$ glavni ideal u $\mathbb{C}[z]$ generiran s p. Prema Primjeru 5 (a) ireducibilnost od p je ekvivalentna činjenici da je kvocijentna algebra $A := \mathbb{C}[z]/\langle p \rangle$ algebra s dijeljenjem. Budući da je p stupnja n, A je n-dimenzionalna s bazom

$$\{1 + \langle p \rangle, \ldots, z^{n-1} + \langle p \rangle\}.$$

Iz Korolara 12 slijedi $n = \dim A = 1$, čime je dokaz teorema završen. ∎

5 Zaključak

Gelfand-Mazurov teorem (GMT) je jedan on najfundamentalnijih teorema teorije normiranih algebri. Osim njegovog teorijskog značaja, on ima i mnogobrojne primjene u raznim područjima matematike. U ovom preglednom radu smo demonstrirali relativno elementaran dokaz GMT-a te smo pokazali kako iz njega na jednostavan način možemo izvesti Osnovni teorem algebre.

Jedna od direktnih posljedica GMT-a je da je centar svake unitalne proste kompleksne normirane algebre izomorfan s $\mathbb{C}$. Između ostalih, ta činjenica se esencijalno koristi u diplomskom radu drugog autora [8], u kojem se daje karakterizacija unitalnih C^*-algebri koje imaju tzv. CQ-svojstvo (eng. centre-quotient property).

Bibliografija

[1] J. M. Almira, *An application of the Gelfand-Mazur theorem: the fundamental theorem of algebra revisited*, Divulgaciones Matem\'aticas, **13** (2) (2005), 123–125.

[2] M. Brešar, *Introduction to Noncommutative Algebra*, Universitext, Springer, 2014.

[3] I. Gelfand, *Normierte Ringe*, Mat. Sbornik N. S. **9** (51) (1941), 3–24.

[4] T. W. Hungerford, *Algebra* (2nd ed.), Springer-Verlag 1980.

[5] S. Kametani, *An elementary proof of the fundamental theorem of normed fields*, J. Math. Soc. Japan **4** (1) (1952), 96–99.

[6] S. Mazur, *Sur les anneaux lin\'eaires*, C. R. Acad. Sci. Paris **207** (1938), 1025–1027.

[7] B. širola, *Algebarske strukture*, skripta, PMF-MO, Zagreb. dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/alg/predavanja/ASpred.pdf .

[8] M. Tomašević, *O epimorfnoj slici centra*C^*-algebre, diplomski rad, 2019, PMF-MO, Zagreb.

[9] Š. Ungar, Matematička analiza u $\mathbb{R}^n$, Tehnička knjiga, Zagreb, 2005.

ISSN 1334-6083