math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

Razne karakterizacije 2x 2 matrica traga nula

linearna algebra **matrice traga nula**

Matea Perković(1) i Rajna Rajić(2)
(1) Osnovna škola Granešina, Granešina 1, Zagreb
(2) Rudarsko-geološko-naftni fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Pierottijeva 6, Zagreb

Sažetak

U ovom radu dajemo nekoliko karakterizacija 2×2 kompleksnih matrica traga nula, koje se temelje na Hamilton–Cayleyjevom teoremu.

1 Uvod

Označimo s $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ algebru svih kompleksnih kvadratnih matrica reda n, a s I jediničnu matricu reda n. Trag matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, u oznaci $\mathrm{tr}\, A$, definira se kao zbroj njezinih dijagonalnih elemenata;

$$\mathrm{tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Preslikavanje $A \mapsto \mathrm{tr}\, A$ je linearan funkcional na prostoru $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, tj. vrijedi

$$\mathrm{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \mathrm{tr}\, A + \beta \mathrm{tr}\, B$$

za sve $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ i sve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Također, za $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ vrijedi

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA), \quad \mathrm{tr}\, A^T = \mathrm{tr}\, A, \quad \mathrm{tr}\, A^* = \overline{\mathrm{tr}\, A},$$

gdje smo s A^T označili transponiranu, a s A^* adjungiranu matricu matrice A. Unitarno slične matrice imaju isti trag, tj. za svaku unitarnu matricu $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ vrijedi

$$\mathrm{tr}(U^* A U) = \mathrm{tr}\, A.$$

Prema teoremu o Schurovoj dekompoziciji (\cite[teorem 3.3]{Z}), za svaku matricu $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ postoji unitarna matrica $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ takva da je $U^* A U$ gornjotrokutasta matrica čiju dijagonalu čine svojstvene vrijednosti od A; pišemo

$$U^* A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Uočimo da je trag matrice jednak zbroju njezinih svojstvenih vrijednosti.

Poznato je da je svaka $n \times n$ kompleksna matrica traga nula unitarno slična matrici čija je glavna dijagonala sastavljena od samih nula ([7]). Također, karakterizacija takvih matrica moguća je u terminima komutatora ([1, 12]). Prisjetimo se, $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ je komutator ako postoje matrice $B, C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ takve da je $A = BC - CB$. Dakle, u općenitom slučaju vrijedi sljedeći rezultat (čiji dokaz se može naći i u [5]).

Teorem 1. *Za $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ sljede\'ce tvrdnje su međusobno ekvivalentne*:

(a) $\operatorname{tr} A = 0$;
(b) A je komutator dviju matrica;
(c) postoji unitarna matrica $U \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ takva da su svi dijagonalni elementi matrice U^*AU jednaki nuli.

U ovom radu dajemo nekoliko karakterizacija kompleksnih matrica traga nula koje su svojstvene samo matricama reda 2. Ove su karakterizacije dobivene uz pomoć Hamilton–Cayleyjevog teorema, koji se smatra jednim od najznačajnijih rezultata u linearnoj algebri. O raznim interesantnim primjenama ovog teorema na kvadratne matrice reda 2 (npr. pri rješavanju binomnih matričnih jednadžbi, Pellovih diofantskih jednadžbi, pri određivanju općih članova nizova definiranih pomoću sustava linearnih rekurzivnih re\-la\-ci\-ja, pri računanju potencija matrica reda 2 u terminima njihovih elemenata i svojstvenih vrijednosti i dr.) zainteresirani čitatelj može više pronaći u [10] (v. također [9]).

2 Rezultati

Karakteristični (svojstveni) polinom matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ definira se kao

$$k_A(\lambda) = \det(\lambda I - A),$$

gdje smo s $\det(\cdot)$ označili determinantu matrice. Karakteristični polinom k_A ima n kompleksnih nultočaka, i to su karakteristične (svojstvene) vrijednosti matrice A. Za kvadratnu matricu

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

karakteristični polinom glasi

$$\begin{aligned} k_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - d) - bc \\ &= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc \\ &= \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A. \end{aligned}$$

Prema Hamilton–Cayleyjevom teoremu svaka kvadratna matrica poništava svoj karakteristični polinom; stoga vrijedi

$$A^2 - (\operatorname{tr} A)A + (\det A)I = 0. \qquad (1)$$

Odavde direktno slijedi jedna karakterizacija 2×2 matrica traga nula:

$$\operatorname{tr} A = 0 \Leftrightarrow A^2 = -(\det A)I. \qquad (2)$$

Za kvadratnu matricu A kažemo da je nilpotentna ako je $A^k = 0$ za neki $k \in \mathbb{N}$. Nilpotentna matrica je singularna. Zaista, ako je $A^k = 0$ za neki $k \in \mathbb{N}$, tada je prema Binet–Cauchyjevom teoremu $0 = \det(A^k) = (\det A)^k$ pa je $\det A = 0$. Sljedeći rezultat pokazuje da su nilpotentne matrice jedine singularne matrice reda 2 koje imaju trag jednak nuli.

Teorem 2. *Ako je $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ singularna matrica, tada su sljedeće tvrdnje međusobno ekvivalentne*:

(a) $\operatorname{tr} A = 0$;

(b) $\operatorname{tr}(A^2) = 0$;

(c) $A^2 = 0$;

(d) postoji $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, *tako da je* $A^k = 0$.

Dokaz.. (a)⇔(c) slijedi iz (2). Prema (1) imamo $A^2 = (\operatorname{tr} A)A$ pa djelujući na tu jednakost funkcijom traga dobivamo $\operatorname{tr}(A^2) = (\operatorname{tr} A)^2$ te je stoga (a)⇔(b). Jasno je da (c) povlači (d). Obratno, neka je $A^k = 0$ za neki $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Iz $A^2 = (\operatorname{tr} A)A$ induktivno se dobije $A^k = (\operatorname{tr} A)^{k-1}A$ pa slijedi $(\operatorname{tr} A)^{k-1}A = 0$ odnosno $\operatorname{tr} A = 0$ i stoga $A^2 = 0$. Time smo pokazali (c)⇔(d), čime je teorem dokazan. ■

Za matricu $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ kažemo da je skalarna ako je $A = \lambda I$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$. Za neskalarne matrice reda 2 vrijedi i neka vrsta obrata Hamilton–Cayleyjevog teorema.

Teorem 3. *\cite[teorem 2.6]{PF} Neka je $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ takvi da je $A^2 - \alpha A + \beta I = 0$. Ako A nije skalarna matrica, onda je $\operatorname{tr} A = \alpha$ i $\det A = \beta$.*

Dokaz.. Prema pretpostavci i prema (1) vrijedi

$$(\alpha - \operatorname{tr} A)A = (\beta - \det A)I. \tag{3}$$

Ako je $\operatorname{tr} A \neq \alpha$, onda je $A = \frac{\beta - \det A}{\alpha - \operatorname{tr} A} I$, tj. A je skalarna matrica, što je kontradikcija s pretpostavkom. Prema tome, $\operatorname{tr} A = \alpha$ pa prema (3) slijedi $\det A = \beta$. ■

Sada imamo još jednu karakterizaciju (neskalarnih) 2×2 matrica traga nula.

Korolar 4. *Ako $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ nije skalarna matrica, tada su sljedeće tvrdnje međusobno ekvivalentne*:

(a) $\operatorname{tr} A = 0$;

(b) A^2 je skalarna matrica.

Dokaz.. (a)⇒(b) slijedi iz (2).

Pretpostavimo sada da vrijedi (b). Tada je $A^2 = -\beta I$ za neki $\beta \in \mathbb{C}$. Prema teoremu 3 vrijedi $\operatorname{tr} A = 0$ (i $\det A = \beta$). ■

U nastavku dajemo karakterizaciju 2×2 kompleksnih matrica traga nula u terminima Robertsove okomitosti. U tu svrhu najprije uvedimo pojmove koji će nam za to trebati.

U kompleksnom unitarnom prostoru $(X, (\cdot, \cdot))$ uobičajeno je okomitost dvaju vektora $x, y \in X$ definirati pomoću skalarnog produkta: $x \perp y$ ako je $(x, y) = 0$. Ako je $\|\cdot\|$ norma inducirana tim skalarnim produktom, tj.

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \quad (x \in X),$$

onda se okomitost dvaju vektora unitarnog prostora X može na različite načine iskazati u terminima te norme. Jedna mogućnost je

$$(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Zaista, kako je

$$\begin{aligned} \|x + \lambda y\|^2 &= (x + \lambda y, x + \lambda y) \\ &= (x, x) + \bar{\lambda}(x, y) + \lambda(y, x) + |\lambda|^2 (y, y) \\ &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(\bar{\lambda}(x, y)) + |\lambda|^2 \|y\|^2 \end{aligned}$$

te

$$\|x - \lambda y\|^2 = \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}(\bar{\lambda}(x, y)) + |\lambda|^2 \|y\|^2,$$

to je $\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|$ za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$ ako i samo ako je $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}(x, y)) = 0$ za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$. Sada je jasno da $(x, y) = 0$ povlači $\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|$ za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$. Obratno, ako je $\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|$ za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$, onda se izborom $\lambda = 1$ dobije $\mathrm{Re}(x, y) = 0$ dok $\lambda = i$ daje $\mathrm{Re}(\bar{i}(x, y)) = 0$ odnosno $\mathrm{Im}(x, y) = 0$. Prema tome, $(x, y) = 0$.

Stoga je smisleno okomitost u proizvoljnom kompleksnom normiranom prostoru $(X, \|\cdot\|)$ definirati na način da su vektori $x, y \in X$ okomiti ako je $\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|$ za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$. Takvu definiciju okomitosti dvaju vektora uveo je D. B. Roberts 1934. godine u radu [11]. U daljnjem ćemo Robertsovu okomitost dvaju vektora $x, y \in X$ označavati s $x \perp_R y$. Iz definicije Robertsove okomitosti jasno je da je ovaj tip okomitosti:

1. nedegeneriran: $x \perp_R x \Leftrightarrow x = 0$;
2. homogen: $x \perp_R y \Rightarrow \alpha x \perp_R \beta y$ za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;
3. simetričan: $x \perp_R y \Leftrightarrow y \perp_R x$.

Međutim, za razliku od okomitosti inducirane skalarnim produktom, Robert\-so\-va okomitost nije aditivna, tj. iz $x \perp_R y$ i $x \perp_R z$ ne slijedi nužno $x \perp_R (y + z)$, te isto tako iz $x \perp_R y$ i $z \perp_R y$ ne slijedi nužno $(x + z) \perp_R y$. Ovaj tip okomitosti općenito ne zadovoljava svojstvo egzistencije, u smislu da za svaka dva vektora $x, y \in X$ postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ sa svojstvom $x \perp_R (\lambda x + y)$. Više o tome zainteresirani čitatelj može naći u npr. radu [3].

Znamo da je prostor $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ kompleksnih kvadratnih matrica reda n unitaran uz skalarni produkt definiran kao

$$(A, B) := \mathrm{tr}(B^* A) \quad (A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})).$$

Matrična norma $\|A\|_F = (\mathrm{tr}(A^* A))^{1/2}$ na $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ inducirana tim skalarnim produktom naziva se *Frobeniusova norma* (odnosno *Hilbert–Schmidtova nor\-ma*). U tom (unitarnom) prostoru se okomitost dviju kvadratnih matrica iskazuje u terminima traga:

$$A \perp B \;\Leftrightarrow\; \mathrm{tr}(B^* A) = 0.$$

Stoga je i matrice traga nula moguće okarakterizirati u terminima okomitosti inducirane ovim skalarnim produktom. Naime,

$$\mathrm{tr}\, A = 0 \;\Leftrightarrow\; A \perp I. \tag{4}$$

Prostor $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ je normiran (ali ne i unitaran) s obzirom na matričnu (ope\-ratorsku) normu induciranu euklidskom normom na prostoru $\mathbb{C}^n$. Naime, na unitarnom prostoru $\mathbb{C}^n$ snabdjevenom skalarnim produktom

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y}_i,$$

gdje su $x=(x_1,\ldots,x_n)$,$y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{C}^n$, euklidska norma vektora $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{C}^n$ definira se kao

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}=\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Preko standardne ortonormirane baze prostora $\mathbb{C}^n$, algebra $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ poistovjećuje se s algebrom $\mathbb{B}(\mathbb{C}^n)$ svih linearnih ope\-ra\-to\-ra koji djeluju na $\mathbb{C}^n$. Pritom vektore prostora $\mathbb{C}^n$ pišemo kao jednostupčane matrice. Na $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ uvodi se matrična (operatorska) norma inducirana euklidskom normom na $\mathbb{C}^n$;

$$\|A\|=\max_{\|x\|=1}\|Ax\| \quad (A\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})).$$

Ovako definirana matrična norma je unitarno invarijantna, tj. $\|UAV\|=\|A\|$ za sve unitarne matrice $U,V\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Ova norma ima svojstvo konzi\-stentnosti (submultiplikativnosti), tj. vrijedi $\|AB\|\le\|A\|\,\|B\|$ za sve $A,B\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Osim toga, $\|A^*\|=\|A\|$ te $\|A^*A\|=\|A\|^2$ za sve $A\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$.

Označimo sa $\sigma(A)$ spektar matrice $A\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, tj. skup svih njezinih svoj\-stve\-nih vrijednosti, a s $\rho(A)$ spektralni radijus matrice A;

$$\rho(A)=\max\{|\lambda|:\ \lambda\in\sigma(A)\}.$$

Općenito vrijedi $\rho(A)\le\|A\|$. Ako je A normalna matrica (tj. vrijedi $A^*A=AA^*$), onda je $\rho(A)=\|A\|$.

Kvadratna matrica A je pozitivno semidefinitna ako je A hermitska (tj. $A^*=A$) te ako su sve njezine svojstvene vrijednosti nenegativne. Norma pozitivno semidefinitne matrice jednaka je njezinoj najvećoj svojstvenoj vrijednosti. Ako je $A\in\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, tada su svojstvene vrijednosti matrice A nultočke svojstvenog polinoma

$$k_A(\lambda)=\lambda^2-(\operatorname{tr}A)\lambda+\det A,$$

a to su brojevi

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\Big(\operatorname{tr}A\pm\sqrt{\operatorname{tr}^2(A)-4\det A}\Big).$$

Stoga je norma pozitivno semidefinitne matrice $A\in\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ jednaka

$$\|A\|=\frac{1}{2}\Big(\operatorname{tr}A+\sqrt{\operatorname{tr}^2(A)-4\mathrm{det}\,A}\Big). \qquad (5)$$

Budući da je matrica A^*A pozitivno semidefinitna, norma te matrice može se računati pomoću (5). Kako je $\|A\|^2=\|A^*A\|$, to se norma proizvoljne kompleksne matrice reda 2 također računa primjenom formule (5), tj. vrijedi

$$\|A\|^2=\frac{1}{2}\Big(\operatorname{tr}(A^*A)+\sqrt{\operatorname{tr}^2(A^*A)-4\det(A^*A)}\Big) \quad (A\in\mathbb{M}_2(\mathbb{C})).$$

Na normiranom prostoru $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ snabdjevenom operatorskom normom, može se promatrati Robertsova okomitost dviju matrica: $A \perp_R B$ ako je $\|A + \lambda B\| = \|A - \lambda B\|$ za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$. Zanima nas može li se 2×2 matrice traga nula i u ovom slučaju, kao što je to u slučaju unitarnog prostora $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ (v. (4)), okarakterizirati u terminima Robertsove okomitosti. Odgovor je potvrdan, kao što pokazuje sljedeći teorem. Teorem je dokazan u radu [2] (v. također [3]), gdje je proučavana Robertsova okomitost elemenata C^*-algebri. (čitatelja upućujemo na [4, 6, 8] kao osnovnu literaturu o C^*-algebrama.) Ovdje dajemo alternativni (algebarski) dokaz u jednom posebnom slučaju, tj. za elemente C^*-algebre kompleksnih matrica reda 2, a koji se temelji na Hamilton–Cayleyjevom teoremu.

Teorem 5. *Za $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne*:

(a) $\operatorname{tr} A = 0$;

(b) $A \perp_R I$.

Dokaz.. Označimo

$$T_\lambda = (A + \lambda I)^*(A + \lambda I) \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Tada je T_λ pozitivno semidefinitna matrica te prema (5) vrijedi

$$\|A + \lambda I\|^2 = \|T_\lambda\| = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr} T_\lambda + \sqrt{\operatorname{tr}^2(T_\lambda) - 4\det T_\lambda}\right) \tag{6}$$

(a)⇒(b) Pretpostavimo da je $\operatorname{tr} A = 0$. Prema teoremu 1 postoji unitarna matrica $U \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ takva da su svi dijagonalni elementi matrice U^*AU jednaki nuli. Budući da je operatorska norma unitarno invarijantna, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je A matrica oblika

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

za neke $a, b \in \mathbb{C}$. Tada je

$$T_\lambda = \begin{pmatrix} \bar\lambda & \bar b \\ \bar a & \bar\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & a \\ b & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\lambda|^2 + |b|^2 & \bar\lambda a + \lambda \bar b \\ \lambda \bar a + \bar\lambda b & |\lambda|^2 + |a|^2 \end{pmatrix}.$$

Stoga je

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} T_\lambda &= 2|\lambda|^2 + |a|^2 + |b|^2, \\ \det T_\lambda &= (|\lambda|^2 + |b|^2)(|\lambda|^2 + |a|^2) - (\bar\lambda a + \lambda \bar b)(\lambda \bar a + \bar\lambda b) \\ &= |\lambda|^4 + |a|^2|b|^2 - \bar\lambda^2 ab - \lambda^2 \bar a \bar b, \end{aligned}$$

pa je $\operatorname{tr} T_\lambda = \operatorname{tr} T_{-\lambda}$ i $\det T_\lambda = \det T_{-\lambda}$ za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$. Prema (6) zaključujemo da je $\|A + \lambda I\| = \|A - \lambda I\|$ za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$, tj. $A \perp_R I$.

(b)⇒(a) Pretpostavimo da je $A \perp_R I$. Prema teoremu o Schurovoj dekompoziciji postoji unitarna matrica $U \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ takva da je matrica U^*AU gor\-njo\-tro\-kutasta. Zbog unitarne invarijantnosti operatorske norme bez sma\-nje\-nja općenitosti možemo pretpostaviti da je A matrica oblika

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

za neke $a, b, c \in \mathbb{C}$.

(i) Razmotrimo najprije slučaj $b = 0$. Tada je A dijagonalna matrica pa je

$$\|A + \lambda I\| = \max\{|a+\lambda|, |c+\lambda|\}.$$

Stoga je $A \perp_R I$ ekvivalentno uvjetu

$$\max\{|a+\lambda|, |c+\lambda|\} = \max\{|a-\lambda|, |c-\lambda|\} \quad (\lambda \in \mathbb{C}) \tag{7}$$

Uvrstimo li u (7) redom $\lambda = -a$,$\lambda = -c$ i $\lambda = \frac{1}{2}(a+c)$, imamo

$$\begin{aligned} |a-c| &= \max\{2|a|, |a+c|\}, \\ |a-c| &= \max\{2|c|, |a+c|\}, \\ |a-c| &= \max\{|3a+c|, |a+3c|\}. \end{aligned}$$

Pretpostavimo najprije da je $|a-c| = |a+c|$. Tada je $\mathrm{Re}(a\bar{c}) = 0$ pa je

$$|3a+c|^2 = 9|a|^2 + |c|^2, \quad |a+3c|^2 = |a|^2 + 9|c|^2.$$

Kako je $|3a+c| \le |a-c|$, slijedi $9|a|^2 + |c|^2 \le |a|^2 + |c|^2$ pa je $a = 0$. Također, iz $|a+3c| \le |a-c|$ slijedi $|a|^2 + 9|c|^2 \le |a|^2 + |c|^2$ pa je $c = 0$. Zaključujemo da je $\mathrm{tr}\, A = 0$.

Uzmimo sada da je $|a-c| \ne |a+c|$. Tada je $|a-c| = 2|a| = 2|c|$. Stoga je

$$4|a|^2 = |a-c|^2 = |a|^2 + |c|^2 - 2\mathrm{Re}(a\bar{c}) = 2|a|^2 - 2\mathrm{Re}(a\bar{c})$$

pa je $|a|^2 = -\mathrm{Re}(a\bar{c})$. Zapišimo $a = |a|e^{i\varphi}$ i $c = |a|e^{i\psi}$, pri čemu su $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$. Tada je $a\bar{c} = |a|^2 e^{i(\varphi-\psi)}$ pa iz $|a|^2 = -\mathrm{Re}(a\bar{c}) = -|a|^2 \cos(\varphi - \psi)$ slijedi $\cos(\varphi-\psi) = -1$. Tada je $\varphi - \psi = \pi$ pa je $c = -a$, tj. $\mathrm{tr}\, A = 0$.

(ii) Razmotrimo slučaj $b \ne 0$. Tada je

$$T_\lambda = \begin{pmatrix} \overline{a+\lambda} & 0 \\ \bar{b} & \overline{c+\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+\lambda & b \\ 0 & c+\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a+\lambda|^2 & b(\overline{a+\lambda}) \\ \bar{b}(a+\lambda) & |b|^2 + |c+\lambda|^2 \end{pmatrix}.$$

Prema (6), $A \perp_R I$ je ekvivalentno uvjetu $\|T_\lambda\| = \|T_{-\lambda}\|$ za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$, odnosno uvjetu

$$\mathrm{tr}\, T_\lambda - \mathrm{tr}\, T_{-\lambda} = \sqrt{\mathrm{tr}^2(T_{-\lambda}) - 4\det T_{-\lambda}} - \sqrt{\mathrm{tr}^2(T_\lambda) - 4\det T_\lambda} \quad (\lambda \in \mathbb{C}),$$

odakle se kvadriranjem ove jednakosti dobije

$$\mathrm{tr}\, T_\lambda \mathrm{tr}\, T_{-\lambda} - 2\det T_{-\lambda} - 2\det T_\lambda = \sqrt{\mathrm{tr}^2(T_{-\lambda}) - 4\det T_{-\lambda}}\sqrt{\mathrm{tr}^2(T_\lambda) - 4\det T_\lambda}$$

te zatim ponovnim kvadriranjem slijedi

$$(\det T_{-\lambda} - \det T_\lambda)^2 = (\mathrm{tr}\, T_{-\lambda} - \mathrm{tr}\, T_\lambda)(\det T_{-\lambda} \mathrm{tr}\, T_\lambda - \det T_\lambda \mathrm{tr}\, T_{-\lambda}) \tag{8}$$

za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$. Uočimo da je za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\mathrm{tr}\, T_\lambda = |a+\lambda|^2 + |c+\lambda|^2 + |b|^2, \tag{9}$$

$$\det T_\lambda = |a+\lambda|^2 |c+\lambda|^2. \tag{10}$$

Uvrstimo li $\lambda = a$ i $\lambda = c$ redom u (8), korištenjem izraza (9) i (10) dobije se

$$4|a|^4|a+c|^4 = (4|a|^2 + |a+c|^2 - |a-c|^2)|a|^2|a+c|^2(|a-c|^2 + |b|^2), \tag{11}$$

$$4|c|^4|a+c|^4 = (4|c|^2 + |a+c|^2 - |a-c|^2)|c|^2|a+c|^2(|a-c|^2 + |b|^2). \tag{12}$$

Pretpostavimo da je $a + c \neq 0$. Pokazat ćemo da ta pretpostavka dovodi do kontradikcije.

Ako je $a = 0$, tada iz (12) slijedi $|c|^6|b|^2 = 0$ pa zbog $b \neq 0$ imamo $c = 0$. No, to je u suprotnosti s pretpostavkom $a + c \neq 0$.

Slično, ako je $c = 0$, tada iz (11) slijedi $|a|^6|b|^2 = 0$ pa zbog $b \neq 0$ imamo $a = 0$. No, to je također u suprotnosti s pretpostavkom $a + c \neq 0$.

Prema tome, $a \neq 0$,$c \neq 0$,$a + c \neq 0$, pa iz (11) i (12) imamo

$$4|a|^2|a+c|^2 = (4|a|^2 + |a+c|^2 - |a-c|^2)(|a-c|^2 + |b|^2), \tag{13}$$

$$4|c|^2|a+c|^2 = (4|c|^2 + |a+c|^2 - |a-c|^2)(|a-c|^2 + |b|^2). \tag{14}$$

Odavde slijedi

$$\frac{|a|^2}{|c|^2} = \frac{4|a|^2 + |a+c|^2 - |a-c|^2}{4|c|^2 + |a+c|^2 - |a-c|^2},$$

odnosno

$$|a|^2(4|c|^2 + |a+c|^2 - |a-c|^2) = |c|^2(4|a|^2 + |a+c|^2 - |a-c|^2),$$

što je ekvivalentno s

$$(|a|^2 - |c|^2)(|a+c|^2 - |a-c|^2) = 0. \tag{15}$$

Kada bi vrijedilo $|a + c| = |a - c|$, tada bi iz (13) slijedilo $b = 0$ što je u suprotnosti s našom pretpostavkom. Prema tome, $|a + c| \neq |a - c|$ pa iz (15) slijedi $|a| = |c|$. Tada se uvrštavanjem $\lambda = ai$ u (8) te nakon sređivanja dobivenog izraza dobije $|b|^2\mathrm{Im}^2(a\bar{c}) = 0$, odakle zbog $b \neq 0$ slijedi $\mathrm{Im}(a\bar{c}) = 0$. Prema tome, $a\bar{c} \in \mathbb{R}$. Zapišimo $a = |a|e^{i\varphi}$ te $c = |a|e^{i\psi}$ pri čemu su $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$. Tada je $a\bar{c} = |a|^2e^{i(\varphi-\psi)}$ pa zbog $a\bar{c} \in \mathbb{R}$ slijedi $\sin(\varphi - \psi) = 0$. Zato je $\psi = \varphi$ ili $\psi = \varphi - \pi$. Kako slučaj $\psi = \varphi - \pi$ vodi na $c = -a$ što je u suprotnosti s našom pretpostavkom, zaključujemo da je $\psi = \varphi$ odnosno $c = a$. Tada iz (13) slijedi $|b|^2 = 2|a|^2$. Uvrstimo li $\lambda = \frac{1}{2}a$ u (8), nakon sređivanja dobivenog izraza imamo $a = 0$, a vidjeli smo da je to u suprotnosti s našom pretpostavkom $a + c \neq 0$.

Zaključujemo da pretpostavka $a + c \neq 0$ vodi do kontradikcije, pa je stoga $a + c = 0$, odnosno $\mathrm{tr}\, A = 0$. Time je teorem dokazan. ■

Karakterizacija matrica traga nula opisana u teoremu 5 općenito ne vrijedi za matrice reda većeg od 2, kao što pokazuju sljedeći primjeri.

Primjer 6. *Neka je $n \in \mathbb{N}, n > 2$, te neka je $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ dijagonalna matrica s elementima na glavnoj dijagonali $a_{11} = -1, a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$. Tada vrijedi*

$$\|A + \lambda I\| = \max\{|1 - \lambda|, |1 + \lambda|\}, \quad \|A - \lambda I\| = \max\{|1 + \lambda|, |1 - \lambda|\},$$

pa je $\|A + \lambda I\| = \|A - \lambda I\|$ za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$, tj. $A \perp_R I$. Uočimo da je $\operatorname{tr} A = n - 2 \neq 0$.

Primjer 7. *Neka je $n \in \mathbb{N}, n > 2$, te neka je $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ dijagonalna matrica s elementima na glavnoj dijagonali $a_{11} = 1 - n, a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$. Tada je $\operatorname{tr} A = 0$. Kako je*

$$\|A + I\| = \max\{2, n - 2\}, \quad \|A - I\| = n,$$

to je $\|A + I\| \neq \|A - I\|$ za svaki prirodni broj $n > 2$, pa zaključujemo $A \not\perp_R I$.

Na kraju dajemo karakterizaciju 2×2 regularnih kompleksnih matrica traga nula u terminima Robertsove okomitosti.

Teorem 8. *\cite[lema 2.1]{PF} Za regularnu matricu $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ vrijedi*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}((\operatorname{tr} A)I - A), \quad \operatorname{tr} A^{-1} = \frac{\operatorname{tr} A}{\det A}.$$

Dokaz.. Pomnože li se obje strane jednakosti (1) s A^{-1}, dobije se

$$A - (\operatorname{tr} A)I + (\det A)A^{-1} = 0,$$

odnosno

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}((\operatorname{tr} A)I - A). \tag{16}$$

Djelujemo li tragom na (16), dobije se

$$\operatorname{tr} A^{-1} = \frac{1}{\det A}((\operatorname{tr} A)(\operatorname{tr} I) - \operatorname{tr} A) = \frac{\operatorname{tr} A}{\det A},$$

čime je tvrdnja dokazana. ■

Ako je $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ regularna matrica, tada iz teorema 8 slijedi

$$\operatorname{tr} A = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tr} A^{-1} = 0. \tag{17}$$

Jasno je da (17) ne vrijedi općenito za matrice reda većeg od 2.

Iz (17) i teorema 5 direktno dobivamo sljedeći rezultat za regularne matrice reda 2.

Korolar 9. *Ako je $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ regularna matrica, tada su sljedeće tvrdnje međusobno ekvivalentne*:

(a) $\operatorname{tr} A = 0$;
(b) $\operatorname{tr} A^{-1} = 0$;
(c) $A \perp_R I$;
(d) $A^{-1} \perp_R I$.

Bibliografija

[1] A. A. Albert, B. Muckenhoupt, *On matrices of trace zero*, Michigan Math. J. **4** (1957), 1–3.

[2] Lj. Arambašić, T. Berić, R. Rajić, *Roberts orthogonality and Davis–Wielandt shell*, Linear Algebra Appl. **539** (2018), 1–13.

[3] Lj. Arambašić, R. Rajić, *On Birkhoff–James and Roberts orthogonality*, Spec. Matrices **6** (2018), 229–236.

[4] J. Dixmier,C^*-Algebras}, North-Holland, Amsterdam, 1981.

[5] M. Kožul, R. Rajić, *Matrice traga nula*, Math.e **26** (1) (2014), 31–41.

[6] G. J. Murphy, $\{C^*$-Algebras and Operator Theory}, Academic Press, Boston, 1990.

[7] W. V. Parker, *Sets of complex numbers associated with a matrix*, Duke Math. J. **15** (3) (1948), 711–715.

[8] G. Pedersen, $\{C^*$-Algebras and Their Automorphism Groups}, Academic Press, London–New York, 1979.

[9] M. Perković, *Primjene Hamilton–Cayleyjevog teorema na kvadratne matrice reda*2}, diplomski rad, PMF – Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2018.

[10] V. Pop, O. Furdui, *Square Matrices of Order*2}, Springer International Publishing AG, 2017.

[11] D. B. Roberts, *On the geometry of abstract vector spaces*, Tôhoku Math. J. **39** (1934), 42–59.

[12] K. Shoda, *Einige Sätze über Matrizen*, Japan J. Math. **13** (1936), 361–365.

[13] F. Zhang, *Mathrix Theory*. *Basic Results and Techniques*, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 2011.

ISSN 1334-6083