

math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

Kako zvuče trigonometrijske funkcije?

Magdalena Plemenčić, Ivana Slamić

Sažetak

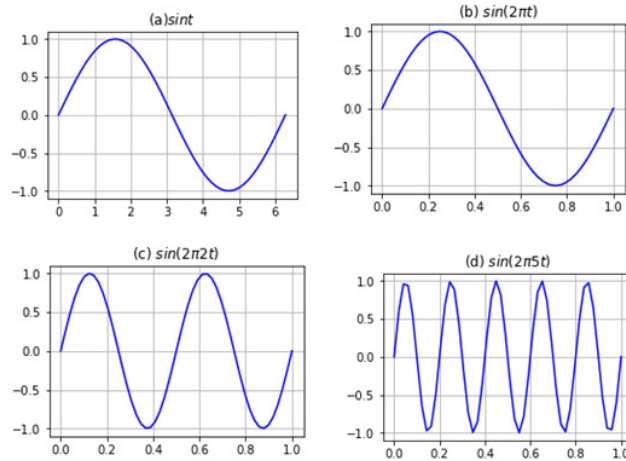
Prije gotovo dvjesto godina, francuski matematičar i fizičar Joseph Fourier u svom je radu "*Theorie analytique de la chaleur*" (odnosno u prijevodu "*Analička teorija topline*") predstavio ideju da se bilo koja funkcija definirana na segmentu, čak i ona s prekidima, može prikazati pomoću reda čiji su članovi trigonometrijske funkcije, sinus i kosinus, različitih frekvencija. Iako ta tvrdnja nije bila u potpunosti točna, za određenu (veliku) klasu funkcija ipak vrijedi, a sama ideja prikaza funkcija pomoću takvih redova, odnosno aproksimacija pomoću njegovih parcijalnih suma, potakla je razvoj *Fourierove analize*, grane matematičke analize koja ima izuzetno važnu ulogu u različitim granama znanosti i tehnike, a posebno u procesiranju signala. U ovom radu opisat ćemo osnovnu ideju primjene Fourierovih redova u analizi i sintezi zvuka.

1 Uvod - kako nastaje zvuk?

Velika količina informacija koju primamo svakog dana iz svijeta oko nas dolazi do nas u obliku zvuka - bilo kroz razgovor s drugim ljudima, kroz zvukove s ulice ili prirode, ili slušanjem vijesti na radiju ili televizoru. Neki od tih zvukova su neugodni, neki više ili manje ugodni. Te ugodne nazivamo *tonovima*, a oni osim glasnoće i visine, posjeduju i boju. Tako ćemo, primjerice, razlikovati je li glazba izvedena na klaviru, violini, gitari ili na nekom drugom instrumentu. No, kako zapravo nastaje zvuk, što on predstavlja i zašto je to uopće važno? U svakodnevnom životu nama, pa ni glazbenicima, razumijevanje kako zvuk nastaje sigurno ne predstavlja veliku važnost, međutim, svakodnevni bi život izgledao mnogo drukčije bez razumijevanja tog procesa. Primjerice, glazbu bismo mogli slušati samo neposredno na koncertu, a vijesti vjerojatno čitali iz novina. Ako se vratimo ponovno na prvu rečenicu, možemo uočiti da su spomenuti zvukovi različitog porijekla. Dok kod prva tri primjera zvuk do nas dolazi direktno iz izvora, u preostalim primjerima je proizveden nekim uređajem na temelju informacije koja je pohranjena u tom uređaju ili elektromagnetskih valova što ih prima antena, te koji su dalje procesirani i pretvoreni u zvuk.

Zvuk grubo možemo opisati kao vibracije koje nastaju zbog promjena u *tlaku zraka*¹. To se događa, primjerice, trzanjem žice gitare, povlačenjem gudala preko žica violine ili pritiskom tipke na klaviru, koje opet uzrokuje udaranje batiča po žici. Ako tipku udarimo snažnije, uzrokovat ćemo veće varijacije te će i zvuk kojeg čujemo biti glasniji. Oscilacije u tlaku zraka zvuka kojeg možemo čuti kreću se između 0.00002 Pa i 100 000 Pa. Svakodnevni zvukovi odgovaraju varijacijama u tlaku zraka od 0.00002 Pa do 2 Pa. Kratko izlaganje varijacijama od oko 20 Pa dovodi do oštećenja sluha. S druge strane, bržim varijacijama odgovarat će viši zvuk. *Glasnoća* zvuka mjerena je u decibelima (dB), gdje je 0 dB prag čujnosti, 80 dB je približna glasnoća usisavača, a 160 dB je glasnoća koja probija bubnjiće. Druga važna karakteristika zvuka je *frekvencija*, odnosno brzina varijacija. Frekvencija zvučnog vala mjerena je u hercima (Hz) ili brojem ciklusa po sekundi.

Tlak zraka varira neprekidno kroz vrijeme, stoga se zvuk može matematički predočiti funkcijom. Varijabla te funkcije predstavlja vrijeme, a funkcije u opisanom kontekstu nazivamo *signalima*. Kako bismo matematički "opisali varijacije" trebaju nam *periodične funkcije*. Prvi primjer periodičnih funkcija s kojima se susrećemo u školi su trigonometrijske funkcije - *sinus* i *kosinus*. Prisjetimo se, temeljni period funkcije sinus i kosinus jednak je 2π , dok je za $\nu \in \mathbb{Z}$ funkcija $f(t) = \sin(2\pi\nu t)$, $t \in \mathbb{R}$ periodična funkcija s temeljnim periodom $\tau = 1/\nu$. Uočimo da na intervalu $[0, 1]$ ova funkcija "oscilira" ν puta, odnosno taj interval sadrži ukupno ν intervala duljine temeljnog perioda. To je izraženo činjenicom da f ima *frekvenciju* ν . Na slici 1 (a) prikazan je graf funkcije $t \mapsto \sin t$ čiji je temeljni period 2π . Množenjem argumenta s 2π , period se smanjuje na 1 tako da funkcija $t \mapsto \sin(2\pi t)$ ima frekvenciju $\nu = 1$. Također, množenjem argumenta s 2, period postaje dvostruko manji, odnosno funkcija $t \mapsto \sin(2\pi \cdot 2t)$ ima frekvenciju $\nu = 2$. Na slici 1 (d) argument je pomnožen s 5, zbog toga je frekvencija 5. Primijetimo da svaka funkcija oblika $t \mapsto \sin(2\pi\nu t + a)$ ima frekvenciju ν , neovisno o vrijednosti a .

Slika 1: Grafički prikaz funkcije \sinus s različitim frekvencijama

Budući da zvuk može biti modeliran funkcijama, zvuk s frekvencijom ν možemo poistovjetiti s trigonometrijskom funkcijom s frekvencijom ν . Reći ćemo da je *čisti ton* s frekvencijom ν reprezentiran funkcijom $t \mapsto \sin(2\pi\nu t)$, odnosno, čisti ton nastaje ako se frekvencija titranja ne mijenja. U nastavku ćemo vidjeti na koji se način zvuk može prikazati kao "suma čistih tonova".

2 Fourierovi redovi - definicija i osnovna svojstva

U prethodnoj smo cjelini rekli da će u ovom razmatranju važnu ulogu imati periodične funkcije. Prisjetimo se, za funkciju $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kažemo da je *periodična* ako postoji realan broj $\tau > 0$ takav da je $f(t + \tau) = f(t)$, za svaki $t \in \mathbb{R}$. Uočimo da je svaku periodičnu funkciju dovoljno zadati na nekom intervalu duljine temeljnog perioda. U nastavku ćemo promatrati periodične funkcije definirane na nekom segmentu te, bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je taj interval $[0, T]$, gdje je T neki pozitivan realan broj. Sa $C[0, T]$ označavat ćemo skup neprekidnih, realnih funkcija definiranih na tom segmentu. Nije teško pokazati da je skup $C[0, T]$ s operacijama zbrajanja funkcija i množenja funkcija skalarom vektorski prostor. Skalarni produkt na prostoru $C[0, T]$ definiran je sa:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t)dt, \quad (1)$$

a norma sa:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt}. \quad (2)$$

Osnovna ideja Fourierovih² redova je aproksimirati danu funkciju (konačnim) linearnim kombinacijama funkcija sinus i kosinus, odnosno prikazati funkciju f pomoću reda

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt). \quad (3)$$

Te linearne kombinacije nazivamo *trigonometrijskim polinomima*. Neka od najosnovnijih pitanja su sljedeća:

- (1) {Koliko općenita smije biti funkcija?}
- (2) {Kako određujemo koeficijente a_n, b_n ?}
- (3) {U kojem smislu red (3) aproksimira polaznu funkciju?}

Aproksimacija funkcije f pomoću funkcije g u normiranom prostoru s normom (??) zove se *aproksimacija u smislu najmanjih kvadrata*. Pritom kvadrat pogreške $\|f - g\|_2^2$ aproksimacije predstavlja površinu ispod grafa funkcije $t \mapsto |f(t) - g(t)|^2$ nad segmentom $[0, T]$. *Najbolja aproksimacija u smislu najmanjih kvadrata* funkcije $f \in C[0, T]$ trigonometrijskim polinomima stupnja N dana je sa:

$$T_N(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right), \quad (4)$$

gdje su brojevi a_0, \dots, a_N i b_0, \dots, b_N određeni formulama

$$a_0 = \langle f, 1 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)dt, \quad (5)$$

odnosno

$$a_n = 2 \left\langle f, \cos \frac{2\pi n \cdot}{T} \right\rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi n t}{T} dt \quad (6)$$

i

$$b_n = 2 \left\langle f, \sin \frac{2\pi n \cdot}{T} \right\rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2\pi n t}{T} dt \quad (7)$$

za $n \in \mathbb{N}$. Ti brojevi nazivaju se (realni) *Fourierovi koeficijenti* funkcije f . Dakle, od svih trigonometrijskih polinoma, polinomi s danim koeficijentima najbolje aproksimiraju polaznu funkciju, u smislu najmanjih kvadrata. Može se pokazati da će odstupanje f od tako formiranih trigonometrijskih polinoma, odnosno $\|f - T_N\|_2$, težiti prema 0 kada N teži u beskonačno. To zapravo znači da će parcijalne sume (možemo koristiti oznaku $S_N f$ umjesto T_N) pripadnog trigonometrijskog reda konvergirati prema 0 u $C[0, T]$ s obzirom na normu (??). Posljedično, površina između grafova funkcija f i $S_N f$ postajat će sve manja kako se N povećava (što ćemo moći uočiti i na slikama za primjere iz sljedeće cjeline).

Fourierove koeficijente možemo definirati i za funkcije koje imaju prekid, ali i za još širu klasu funkcija, ukoliko su gornji integrali konačni (to je ispunjeno, na primjer, ako je $|f|$ integrabilna). Jedna od glavnih zadaća u harmonijskoj analizi je rješavanje pitanja (3), odnosno određivanje uvjeta uz koje Fourierov red konvergira prema polaznoj funkciji. Jedan od teorema tog tipa je *Dirichletov³ teorem*.

Teorem 1. (*Dirichletov teorem*) Neka je $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija tako da vrijedi:

- [(i)] f ima najviše konačno mnogo prekida, i to prve vrste (funkcija ima lijevi i desni limes u točki te oni nisu jednaki) na $[0, T]$,
- [(ii)] postoji subdivizija $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = T$ segmenta $[0, T]$ na konačno mnogo dijelova, takva da je funkcija f monotona na svakom segmentu $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n$.

Tada niz parcijalnih suma Fourierovog reda funkcije f konvergira za svaki $t \in \mathbb{R}$ prema nekoj funkciji $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ako je funkcija f neprekidna u $t \in (0, T)$, onda vrijedi $S(t) = f(t)$. Ako funkcija f ima prekid u točki $t \in (0, T)$, onda je $S(t) = \frac{f(t^-) + f(t^+)}{2}$. Nadalje, u krajevima intervala vrijedi $S(0) = S(T) = \frac{f(0^+) + f(T^-)}{2}$.

Uvjeti u Teoremu 2.1. nazivaju se *Dirichletovi uvjeti za konvergenciju Fourierovih redova*.

Često se Fourierov red, umjesto u trigonometrijskom, zapisuje u kompleksnom obliku, korištenjem relacija između trigonometrijskih i kompleksne eksponencijalne funkcije:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Fourierove redove moguće je promatrati i za još širu klasu funkcija - *Lebesgue integrabilne funkcije*. Naime, Fourierove koeficijente moguće je definirati za bilo koju funkciju $f \in L^1(\mathbb{T})$, gdje je $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Skup \mathbb{T} u smislu prostora mjere možemo identificirati sa skupom $[0, 1)$ s obzirom na Lebesgueovu mjeru. Za funkcije iz $L^2(\mathbb{T})$ teorija je najpotpunija. Naime, u tom slučaju skup $\{e_k(\cdot) : k \in \mathbb{Z}\}$, gdje je $e_k(x) = e^{2\pi i k x}$, čini ortonormiranu bazu za $L^2(\mathbb{T})$, a (kompleksni) Fourierovi koeficijenti $\hat{f}(k) = \langle f, e_k \rangle_{L^2(\mathbb{T})}$ predstavljaju koeficijente u rastavu. Postoje različiti teoremi koji razmatraju konvergenciju Fourierovog reda prema polaznoj funkciji. Dok Fourierov red funkcije $f \in L^1(\mathbb{T})$ može divergirati u svakoj točki, ako je funkcija $f \in L^2(\mathbb{T})$, onda njen Fourierov red konvergira prema f gotovo svuda. Rezultat je dokazao Carleson⁴ 1966. godine, a taj se teorem smatra jednim od najdubljih rezultata u harmonijskoj analizi.

Za bilo koju funkciju iz $L^1(\mathbb{T})$, Fourierovi koeficijenti će težiti prema 0 kako n raste. Za primjene će biti važno koliko brzo oni konvergiraju prema 0, jer to može utjecati i na tip konvergencije danog reda. Ako za funkciju dodamo još uvjet diferencijabilnosti klase C^1 , onda, korištenjem metode parcijalne integracije, možemo pokazati da je $\hat{f}'(n) = \frac{2\pi i n}{T} \hat{f}(n)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Općenitije, što jači uvjet imamo, u smislu diferencijabilnosti (odnosno klase C^k), Fourierovi koeficijenti funkcije će brže konvergirati prema nuli.

3 Primjeri

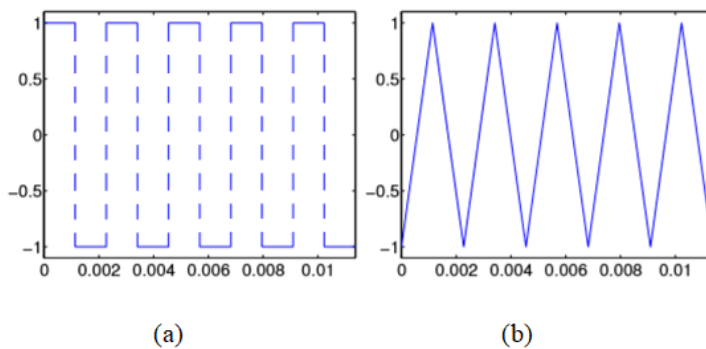
Izračunajmo sada Fourierove koeficijente za dva primjera. Prvi primjer je periodična funkcija, zadana na intervalu duljine temeljnog perioda, $[0, T]$ (gdje je T zadani pozitivan realan broj), na sljedeći način:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } 0 \leq t < \frac{T}{2}, \\ -1, & \text{ako je } \frac{T}{2} \leq t < T, \end{cases} \quad (8)$$

a zatim proširena po periodičnosti na cijeli \mathbb{R} . Ta funkcija u ovom se kontekstu često naziva *kvadratni val⁵*. Za drugi primjer uzmimo periodičnu funkciju, definiranu također na $[0, T]$ na sljedeći način:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{4t}{T} - 1, & \text{ako je } 0 \leq t < \frac{T}{2}, \\ 3 - \frac{4t}{T}, & \text{ako je } \frac{T}{2} \leq t < T. \end{cases} \quad (9)$$

Takva funkcija u ovom se kontekstu često naziva *trokutasti val*⁶. Uočimo jednu bitnu razliku – dok prva funkcija ima prekide u točkama oblika $\frac{kT}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, druga funkcija je neprekidna u svakoj točki.



Slika 2: Grafovi funkcija definiranih sa (8) i (9), za $T = \frac{1}{440}$

Slika 2 prikazuje grafove funkcija iz primjera za $T = \frac{1}{440}$ nad pet intervala duljine T koji predstavlja temeljni period. Ovaj period je odabran kako bi odgovarao periodu čistog zvuka frekvencije 440Hz. U sljedećoj cjelini ćemo vidjeti na koji se način zvuk određen ovakvim funkcijama razlikuje od čistog tona te kako su povezani. Zvukovi koje čujemo za kvadratni, odnosno trokutasti val su iste visine kao onaj prikazan funkcijom $t \mapsto \sin(2\pi 440t)$, ali su manje ugodni za slušanje, pri čemu je trokutasti val ipak nešto ugodniji nego kvadratni val.

Primjer 2. Izračunajmo Fourierove koeficijente kvadratnog vala, definiranog sa (4). Dobivamo:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} dt - \int_{\frac{T}{2}}^T dt = 0, \quad (10)$$

odnosno za $n \in \mathbb{N}$ dobivamo

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi n t}{T} dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos \frac{2\pi n t}{T} dt - \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T \cos \frac{2\pi n t}{T} dt \\ &= \frac{2}{T} \left[\frac{T}{2\pi n} \sin \frac{2\pi n t}{T} \right]_0^{\frac{T}{2}} - \frac{2}{T} \left[\frac{T}{2\pi n} \sin \frac{2\pi n t}{T} \right]_{\frac{T}{2}}^T \\ &= \frac{2}{T} \cdot \frac{T}{2\pi n} ((\sin(n\pi) - \sin 0) - (\sin(2\pi n) - \sin(n\pi))) = 0 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2\pi n t}{T} dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \frac{2\pi n t}{T} dt - \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T \sin \frac{2\pi n t}{T} dt \\ &= \frac{2}{T} \left[-\frac{T}{2\pi n} \cos \frac{2\pi n t}{T} \right]_0^{\frac{T}{2}} - \frac{2}{T} \left[\frac{T}{2\pi n} \cos \frac{2\pi n t}{T} \right]_{\frac{T}{2}}^T \\ &= \frac{2}{T} \cdot \frac{T}{2\pi n} ((-\cos(n\pi) + \cos 0) + (\cos(2\pi n) - \cos(n\pi))) \\ &= \frac{2(1 - \cos(n\pi))}{n\pi}. \end{aligned}$$

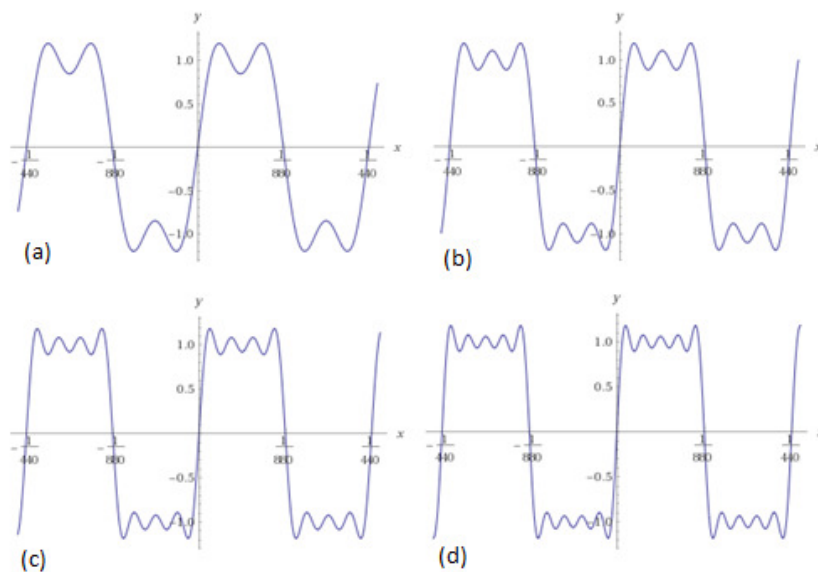
Dakle, samo su koeficijenti b_n s neparnim indeksom n različiti od nula te vrijedi

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{ako je } n \text{ paran,} \\ \frac{4}{n\pi}, & \text{ako je } n \text{ neparan.} \end{cases} \quad (11)$$

Prema tome, Fourierov red dan je sa:

$$\frac{4}{\pi} \sin \frac{2\pi t}{T} + \frac{4}{3\pi} \sin \frac{2\pi 3t}{T} + \frac{4}{5\pi} \sin \frac{2\pi 5t}{T} + \frac{4}{7\pi} \sin \frac{2\pi 7t}{T} + \dots \quad (12)$$

Na Slici 3 prikazane su parcijalne sume Fourierovog reda $S_N f$ kvadratnog vala kada je $T = \frac{1}{440}$ za $N = 3$, $N = 5$, $N = 7$ i $N = 9$.



Slika 3: Grafovi trigonometrijskih polinoma koji predstavljaju parcijalne sume Fourierovog reda kvadratnog vala iz Primjera 3.1.

Primjer 3. Izračunajmo Fourierove koeficijente za trokutasti val, definiran s (5). Vrijedi:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{4}{T} \left(t - \frac{T}{4}\right) dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T \frac{4}{T} \left(\frac{3T}{4} - t\right) dt, \quad (13)$$

odnosno za $n \in \mathbb{N}$ dobivamo:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin \frac{2\pi nt}{T} dt + \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T f(t) \sin \frac{2\pi nt}{T} dt = 0 \quad (14)$$

i

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \frac{2\pi nt}{T} dt + \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T f(t) \cos \frac{2\pi nt}{T} dt \\ &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \frac{2\pi nt}{T} dt = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{4}{T} \left(t - \frac{T}{4}\right) \cos \frac{2\pi nt}{T} dt \\ &= \frac{16}{T^2} \int_0^{\frac{T}{2}} t \cos \frac{2\pi nt}{T} dt - \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos \frac{2\pi nt}{T} dt \\ &= \frac{4}{n^2 \pi^2} (\cos(n\pi) - 1) \end{aligned}$$

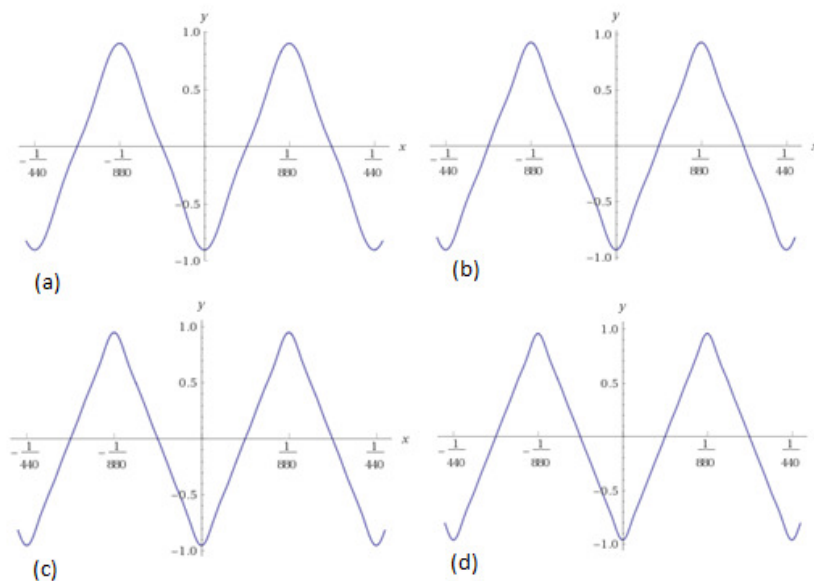
pa je

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{ako je } n \text{ paran,} \\ \frac{-8}{n^2 \pi^2}, & \text{ako je } n \text{ neparan.} \end{cases} \quad (15)$$

Stoga Fourierov red za trokutasti val ima sljedeći oblik:

$$-\frac{8}{\pi^2} \cos \frac{2\pi t}{T} - \frac{8}{3^2 \pi^2} \cos \frac{2\pi 3t}{T} - \frac{8}{5^2 \pi^2} \cos \frac{2\pi 5t}{T} - \frac{8}{7^2 \pi^2} \cos \frac{2\pi 7t}{T} + \dots \quad (16)$$

Na Slici 4 prikazani su grafovi parcijalnih suma Fourierovog reda za $N = 3$, $N = 5$, $N = 7$ i $N = 9$.



Slika 4: Grafovi trigonometrijskih polinoma koji predstavljaju parcijalne sume Fourierovog reda trokutastog vala iz Primjera 3.2.

4 Funkcija `PlaySound` u GeoGebri

Zvuk opisan funkcijom lako možemo generirati korištenjem odgovarajućeg softvera, na primjer GeoGebre ili Mathematice. U nastavku dajemo primjere u GeoGebri, koja je prikladna za korištenje i u srednjoj školi prilikom obrađivanja gradiva trigonometrijskih funkcija. Osnovna naredba koju koristimo je:

`PlaySound(\lt Function\gt , \lt Min Value\gt , \lt Max Value\gt , \lt Sample Rate\gt , \lt Sample Depth\gt).`

Prva komponenta sadrži funkciju, druga i treća lijevu i desnu granicu intervala na kojem je funkcija zadana i koja predstavlja trajanje. Tako, primjerice, ako upišemo naredbu `PlaySound(sin(2Pi/440 x), 0, 1)`, GeoGebra će proizvesti zvuk koji odgovara sinusnom valu, odnosno čistom tonu A_4 (slika

5, prvi red), koji zvuči ovako: `{source=sin440.mp3}sin 440 Hz`. Ukoliko promijenimo desnu granicu intervala, odnosno koristimo naredbu `PlaySound(sin(2Pi 440 x),0,2)`, zvuk koji generira GeoGebra trajat će dvostruko dulje. Ako promijenimo frekvenciju, na primjer ako je pomnožimo sa 2, odnosno ako koristimo naredbu `PlaySound(sin(2Pi 880 x),0,1)`, dobit ćemo ton koji je za oktavu viši - A_5 (slika 5, drugi red). Ako stavimo frekvenciju 1320 Hz, dobivamo ton koji je još za kvintu viši, odnosno E_6 . Prva naredba proizvest će zvuk `{source=sine880.mp3}sin 880 Hz`, a druga `{source=sine1320.mp3}sin 1320 Hz`. Promjenom amplitude, primjerice, korištenjem naredbe `PlaySound(2*sin(2Pi 880 x),0,1)`, mijenjamo glasnoću zvuka. Zbrajanjem trigonometrijskih funkcija različitih frekvencija možemo formirati akorde (npr. $C_4 - E_5 - G_5$ na slici 5, treći red, odgovarao bi frekvencijama 262 Hz, 330Hz i 392Hz, što zvuči ovako: `{source=akord1.mp3}{C4 - E4 - G4}`). Ako zbrojimo sin 440 Hz i sin 880 Hz, korištenjem naredbe `PlaySound(sin(2Pi 440 x)+sin(2Pi 880 x),0,1)`, "odsvirali" bismo A_4 i A_5 istovremeno. Možemo uočiti da bismo dodavanjem većeg broja frekvencija (bez poznavanja harmonije i bez poznavanja kojem tonu odgovara koja frekvencija) formirali zvuk koji postaje sve "gori" (neugodniji za slušanje).



Slika 5: Pozicija na klavijaturi - A_4 , A_5 te akord $C_4 - E_4 - G_4$.

Uočimo da takvim zbrojem zapravo formiramo trigonometrijske polinome. Mogućnost razvoja u Fourierov red zapravo znači da je određen zvuk moguće prikazati pomoću čistih tonova različitih frekvencija, odnosno, svaki zvuk može biti rekonstruiran ako znamo koje frekvencije sudjeluju u rastavu. To ima veliku ulogu u području koje razmatramo jer sve što moramo pamtititi o zadanom "zvuku", odnosno funkciji koja ga reprezentira je niz brojeva koji se javljaju u njegovom prikazu. Iz tog niza brojeva, tada znamo i rekonstruirati taj zvuk, ali i jednostavno ga modificirati. Bez obzira je li u program implementiran već "zvuk ostalih funkcija", npr. ovih iz primjera iz prethodne cjeline, lako ćemo ih moći generirati znamo li Fourierove koeficijente tih funkcija.

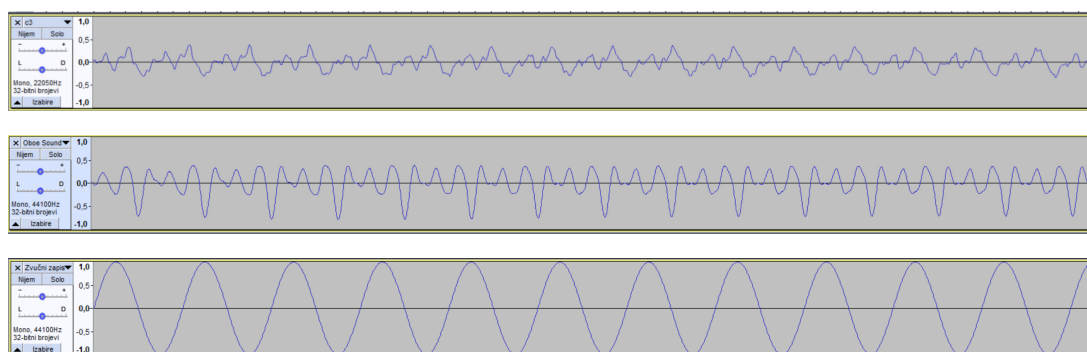
"Odsvirajmo" sada pomoću GeoGebre trigonometrijske polinome koji odgovaraju parcijalnim sumama Fourierovog reda kvadratnog vala iz Primjera 3.1. Ako najprije pogledamo graf, možemo uočiti da je ta funkcija, iako ima isti period T kao i funkcija $t \mapsto \sin(2\pi t/T)$ koja odgovara čistom tonu frekvencije $1/T$, u točkama prekida "daleko" od funkcije $t \mapsto \sin(2\pi t/T)$. Kada uključimo sve više tih koeficijenata, trigonometrijski polinom se "približava" sve više polaznoj funkciji, kao što je prikazano na Slici 3. Točnije, "približava" se u smislu da površine što ih zatvaraju grafovi postaju sve manje. S druge strane, prema Dirichletovom teoremu znamo da je to točno i u smislu konvergencije po točkama, u svim točkama osim u točkama gdje funkcija ima prekid, u kojima parcijalne sume konvergiraju prema aritmetičkoj sredini limesa slijeva, odnosno zdesna. Što više koeficijenata uključimo, zvuk će biti sličniji zvuku kvadratnog vala, odnosno zvučat će približno ovako: `{source=quare440.mp3}kvadratni 440 Hz`. Uočimo da čisti ton ima samo jedan koeficijent različit od nula, dok kod kvadratnog vala niz Fourierovih koeficijenata konvergira k 0 jednako brzo kao niz $1/n$, čineći zvuk manje ugodnim. Kvadratni val "oscilira", kao i sinusni, T puta svake sekunde, ali dodatni koeficijenti koji nisu nula čine taj zvuk "oštrijim".

Isti postupak možemo primijeniti i za Primjer 3.2, koristeći trigonometrijske polinome prikazane na Slici 4. Za $N = 1$ i $T = 1/440$ taj zvuk je zapravo čisti ton frekvencije 440 Hz. Kako povećavamo N , možemo čuti da uvođenje novih frekvencija čini zvuk manje ugodnim. Kako povećavamo N , trigonometrijski polinom se sve više "približava" polaznoj funkciji, kao što je prikazano na Slici 4. Primijetimo da je trokutasti val neprekidna funkcija koja zadovoljava uvjete Dirichletovog teorema pa je limes niza parcijalnih suma u svakoj točki jednak vrijednosti te funkcije. Budući da Fourierovi koeficijenti trokutastog vala opadaju kao $1/n^2$ umjesto $1/n$ kao što je to kod kvadratnog vala, zvuk će, iako i dalje neugodan (zbog različitih frekvencija koje sudjeluju u rastavu), biti manje neugodan nego zvuk kvadratnog vala.

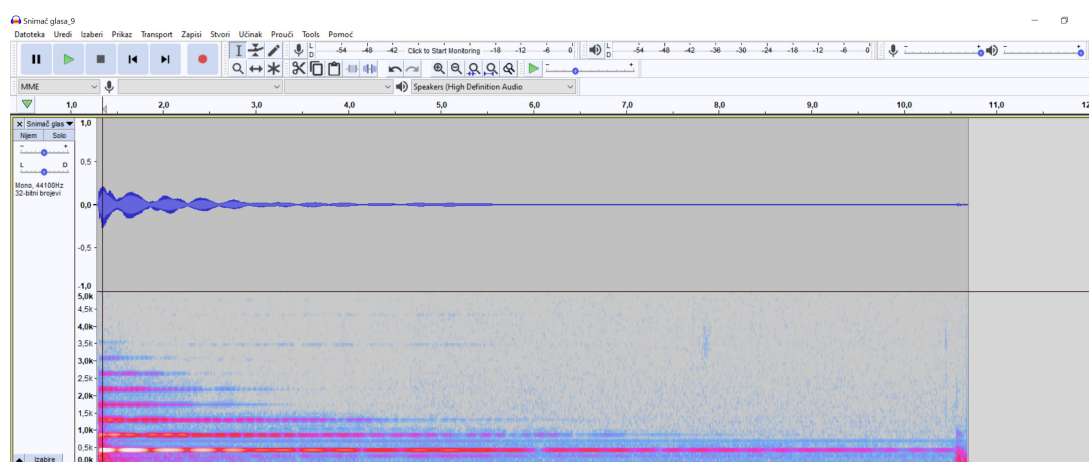
5 Zvuk kao "suma čistih tonova"

Vratimo se sada ponovno na rečenicu iz prvog poglavlja gdje je rečeno da će pojedini ton (određen nekom frekvencijom) zvučati različito ovisno o tome na kojem ga instrumentu odsviramo. Primjerice, ton C_4 odsviran na klaviru zvučat će ovako: `{source=c4_new.mp3}klavir c4`, a na oboi ovako: `{source=oboe.mp3}oboa c4`. To je zbog toga što boju tona ne određuje samo fundamentalna frekvencija (odnosno period funkcije koja ga reprezentira), nego niz frekvencija (*harmonici* ili *aliquotni tonovi*) koje stvara pojedini instrument, koji ovisi o građi instrumenta, ali i o načinu izvođenja pa funkcija koja reprezentira ton iste visine izgleda različito, kao što možemo vidjeti na slici 6. To su tonovi koji imaju frekvencije koje su cjelobrojni višekratnici originalne, koja se naziva *fundamentalna frekvencija* i koja određuje visinu tona kojeg čujemo. Prisjetimo se, matematički, čisti ton s frekvencijom ν reprezentirali smo funkcijom $t \mapsto \sin \nu t$ te ako je ν_0

fundamentalna frekvencija, višim harmonicima odgovarale bi funkcije $t \mapsto \sin n\nu_0 t$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Primjerice, čisti tonovi A_4 , A_5 i E_6 koje smo "slušali" u prethodnoj cjelini, zapravo su prva tri harmonika pridružena tonu A_4 , a A_4 je fundamentalna frekvencija. Adekvatnim izborom amplitude, pomoću čistih tonova računalom možemo oponašati zvuk pojedinog instrumenta.



Slika 6: Različite funkcije pridružene tonu odsviranom na klaviru, oboi te čistom tonu generiranom računalom.



Slika 7: Spektrogram za ton A_4 odsviran na klaviru, ukazuje na to koje se još frekvencije (odnosno koji harmonici) javljaju osim fundamentalne. Uočimo i da je fundamentalna frekvencija ona koja "se čuje najdulje". Korišten je program Audacity ([url{https://www.audacityteam.org/}](https://www.audacityteam.org/)).

Zvuči neobično, no ne i ako problem razmotrimo s aspekta fizike. Naime, ako napetu žicu učvršćenu na krajevima povučemo (kao, primjerice, kod žičanih instrumenata), to znači da smo je pomaknuli iz početnog položaja. Slika 8 prikazuje prvih nekoliko osnovnih oblika titranja žice. Međutim, ovakva situacija je idealizirana i nijedan instrument neće proizvesti ovakve vibracije (štoviše, to je čisti ton čiji zvuk, kao što smo mogli vidjeti u prethodnoj cjelini, nije ni previše interesantan), ali će te vibracije biti kombinacije ovih osnovnih. Problem opisivanja gibanja vibrirajuće žice u osamnaestom je stoljeću okupirao pažnju velikih matematičara Eulera⁷, D'Alemberta⁸, Daniela Bernoullija⁹ i Lagrangea¹⁰, izazvavši čak i nesuglasice među njima. D'Alembert je 1747. godine opisao to gibanje pomoću parcijalne diferencijalne jednačbe

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (17)$$

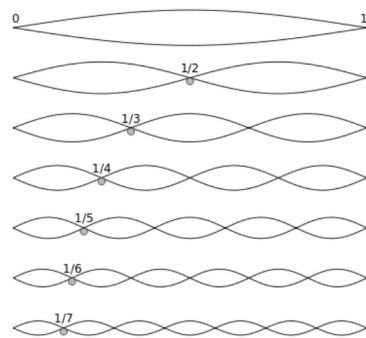
pri čemu je c konstanta koja ovisi o duljini, napetosti i masi žice te je pokazao da su rješenja ove jednačbe oblika

$$y(x, t) = \Phi(x + ct) + \Psi(x - ct),$$

gdje su Φ i Ψ proizvoljne funkcije s neprekidnim derivacijama drugog reda. Ako uključimo pretpostavke da su krajevi žice učvršćeni za $x = 0$ i $x = 1$ te je početni položaj žice opisan funkcijom $x \mapsto f(x)$ na $[0, 1]$ u trenutku $t = 0$ te početnom brzinom 0, rješenje je dano s

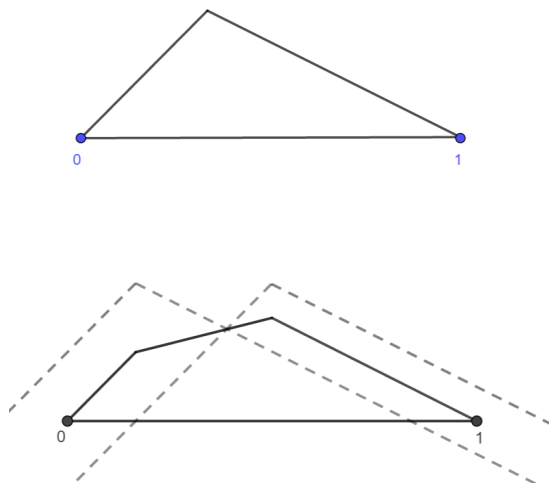
$$y(x, t) = \frac{f(x + ct) + f(x - ct)}{2},$$

pri čemu je f proširena na \mathbb{R} do neparne periodične funkcije s periodom 2. D'Alembert je, promatrajući problem sa strogo matematičkog aspekta, smatrao da je uvjet postojanja derivacija drugog reda nužan u njegovom pristupu. Međutim, Euler nije bio tog mišljenja, odnosno vjerovao je da treba uključiti i funkcije koje nisu nužno diferencijabilne, motiviran vjerojatno činjenicom da postoji početni položaj za koji nije ispunjen prethodni uvjet (slika 9). To se primjerice događa kod glazbala ili tehnika gdje zvuk nastaje "okidanjem" žice – kod, tada popularnog čembala, preteći klavira kod kojeg je zvuk nastajao trzanjem pera po žici ili kada glazbenik na violini izvodi "pizzicato".



Slika 8: činjenicom da je žica učvršćena na krajevima određeno je da se na njenim krajevima stvaraju čvorovi stojnog vala. Prvi red prikazuje najjednostavniji oblik titranja koji se naziva fundamentalni oblik ili prvi harmonik. Dotaknemo li žicu na sredini i stavimo je u titranje, osim dva čvora na krajevima postojat će još jedan čvor na sredini (čvor je mjesto gdje žica miruje). Slika je preuzeta s [\url{https://en.wikipedia.org/wiki/Overtone}](https://en.wikipedia.org/wiki/Overtone).

Tada se 1753. godine u raspravu uključio Daniel Bernoulli, koji je dobro poznao akustiku pa tako i tada već prihvaćenu činjenicu da se ton sastoji od fundamentalne frekvencije i niza alikvotnih tonova. Bernoulli je smatrao da se svako gibanje žice može prikazati u obliku $y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi ct}{\ell}$, uz prikladno odabrane koeficijente A_n (uočimo najprije da svaka funkcija u ovom redu zadovoljava jednadžbu (??)), pri čemu je ℓ duljina žice te da takav pristup obuhvaća i D'Alembertov i Eulerov (međutim, nije znao izračunati koeficijente). To, nadalje, znači da za početni položaj vrijedi $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}$. Ovu tvrdnju je Euler osporio, između ostalog, budući da takva funkcija treba biti nužno periodična te ni on ni D'Alembert nisu vjerovali da se sve neprekidne funkcije mogu prikazati pomoću trigonometrijskih. Ovdje je važno naglasiti da u osamnaestom stoljeću, unatoč tome što je to bilo razdoblje velikog napretka i novih ideja u matematici, neki pojmovi nisu bili precizno definirani, počevši od pojma funkcije, shvaćanje kojeg se upravo navodi kao glavni razlog neslaganja. Daljnji doprinos ovom problemu, bez uvođenja dodatnih uvjeta na neprekinutu žicu, dao je Lagrange 1759. godine, koji se priklonio Eulerovom pristupu umjesto Bernoullijevoj tvrdnji (iako joj se svojim rezultatima približio).



Slika 9: Izraz $f(x + ct)$ iz D'Alembertovog rješenja možemo shvatiti kao val koji "putuje ulijevo" brzinom c , a $f(x - ct)$ udesno.

Pedesetak godina kasnije, Fourier je radio na srodnom problemu širenja topline te je rezultate svojih istraživanja predstavio u radu "Sur la propagation de la chaleur" 1807. godine. Uočio je da se taj problem također može opisati odgovarajućom parcijalnom diferencijalnom jednažbom drugog reda te je tvrdio je da je za rješenje ove jednažbe funkciju koje opisuju početno stanje temperature (definiranu na nekom intervalu) potrebno prikazati pomoću reda koji sadrži funkcije sinus i kosinus (i koji se danas naziva Fourierov red), pri čemu je pokazao kako bi koeficijenti trebali izgledati. Time je pokazao je da je Bernoulli bio u pravu, ali da je i Eulerova primjedba bila točna. Njegova tvrdnja također je uključivala funkcije s prekidima, koje ni D'Alembert ni Euler nisu razmatrali. Međutim, iako su Fourieru i prije ovog rada pristizale potvrde da eksperimenti potvrđuju njegovu teoriju, rad je dočekan sa skepsom, pri čemu je glavna primjedba bila vezana uz nedostatak matematičke strogosti, odnosno uz konvergenciju tog reda. Pokazalo se kasnije da tvrdnja nije bila u potpunosti točna (primjerice, postoji neprekidna funkcija čiji Fourierov red divergira u svim točkama skupa mjere nula), no sam problem zahtijevao je strogi pristup mnogim pojmovima te su rezultati i primjeri iz njegovog rada bili značajni za daljnji razvoj teorije. Rad je objavljen 1822. godine pod nazivom "Théorie analytique de la chaleur", a rezultat Diricheta iz 1829. godine prvi je rezultat vezan uz konvergenciju Fourierovog reda.



Slika 10: Poznati matematičari koji su radili na problemu vibrirajuće žice: D'Alembert, Euler, D. Bernoulli, Lagrange te Fourier koji je radio na srodnom problemu širenja topline.

6 Zaključak

"*Profound study of nature is the most fertile source of mathematical discoveries*", rečenica je iz Fourierovog rada, a ideja prikaza funkcije pomoću trigonometrijskih redova pokazala se puno dalekosežnijom od inicijalno promatranih problema vibrirajuće žice ili širenja topline, proširenjem teorije i na klase funkcija koje se u ovim problemima niti ne javljaju u sklopu početnih uvjeta. Pritom su problemi koji su se prirodno javljali (konvergenije, jedinstvenosti itd.), potakli daljnji razvoj matematičke analize, ali i drugih grana teorijske matematike. Također, spektar primjene ove ideje obuhvaća puno više od primjera spomenutih u ovom radu, a posebno je važan u suvremenom svijetu gdje se većina informacija pohranjuje u digitalnom obliku. Samim time primjena ove teorije dosegla je razmjere koje u trenutku njenog stvaranja nisu mogli ni naslutiti.

Bibliografija

- [1] Benedetto, J.: *Harmonic Analysis and Applications*, CRC Press, 1997
- [2] Deitmar, A.: *A First Course in Harmonic Analysis*, Springer, 2005
- [3] Fourier, J.: *The Analytical Theory of Heat*, Cambridge University Press, London, Reprinted by Dover, New York, 1955.
- [4] Kessler, Bruce: A "Sound" Approach to Fourier Transforms: Using Music to Teach Trigonometry, 2007 Bridges Donostia Conference Proceedings, 135-142 (2007)
- [5] Kurepa, S.: *Matematička analiza 2*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1987.
- [6] Larsen, R.: *Vibrating strings, Fourier series, and some aspects of mathematical analysis*, Nordisk Matematisk Tidsskrift, 22(3/4), 85-102 (1974)
- [7] Plemenčić, Magdalena: *Fourierovi redovi i primjene u procesiranju zvuka*, završni rad, Rijeka, rujan 2019.
- [8] Prestini, E.: *The Evolution of Applied Harmonic Analysis: Models of the Real World*, Birkhäuser Boston, 2004
- [9] Wheeler G.F., Crummett, W.P.: *The vibrating string controversy*, American Journal of Physics 55, 33 (1987)
- [10] Zeeman, E. C.: *Controversy in Science: on the Ideas of Daniel Bernoulli and René Thom*, Nieuw Arch. Wisk. (4), 11(3), 257-282 (1993)
- [11] *Part I Fourier analysis and applications to sound processing*, URL: <https://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/nedlagte-emner/MAT-INF2360/v12/part1.pdf> [pristupljeno ožujak 2020.]

Magdalena Plemenčić, studentica Diplomskog sveučilišnog studija Matematika (smjer nastavnički), Sveučilište u Rijeci - Odjel za matematiku, e-mail: magdalenap19@gmail.com

Ivana Slamić, docentica na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Rijeci, e-mail: islamic@math.uniri.hr

¹Tlak zraka se prema SI sustavu izražava u paskalima (Pa), a 1 Pa odgovara sili od 1 N koja djeluje na površinu od 1 m².

²Jean Baptiste Joseph Fourier (1768.-1830.), francuski matematičar i fizičar, najpoznatiji po radu o kojem govori ovaj članak. Istraživanja prezentirana u tom radu potakla su daljnji razvoj teorije reprezentacije funkcija pomoću trigonometrijskih pa se ta grana po njemu naziva *Fourierova analiza*.

³Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805. - 1859.), njemački matematičar. Dao je veliki doprinos teoriji brojeva i matematičkoj analizi te je jedan od prvih matematičara koji je uveo modernu definiciju funkcije.

⁴Lennart Carleson (rođen 1928. godine), švedski matematičar s radom u području harmonijske analize. Jedan od najistaknutijih rezultata je dokaz teorema o konvergenciji gotovo svuda Fourierovog reda kvadratno integrabilne funkcije, čime je povratio hipotezu Luzina iz 1915. godine. Zbog doprinosa harmonijskoj analizi i teoriji dinamičkih sustava, dodijeljena mu je Abelova nagrada 2006. godine.

⁵engl. square wave

⁶engl. triangle wave

⁷Leonhard Paul Euler (1707. - 1783.), švicarski matematičar, fizičar i astronom. S velikim brojem radova iz različitih područja matematike, kao što su algebra, geometrija, matematička analiza i teorija brojeva, smatra se jednim od najproduktivnijih matematičara uopće.

⁸Jean Le Rond d'Alembert (1717. - 1783.), francuski matematičar, fizičar i filozof, jedan od urednika Enciklopedije.

⁹Daniel Bernoulli (1700. - 1782.), švicarski matematičar i fizičar iz poznate obitelji Bernoulli (sin Johanna Bernoullija i nećak Jacoba Bernoullija). Najveći je njegov doprinos u području hidrodinamike.

¹⁰Joseph - Louis Lagrange (1736. - 1813.), talijansko-francuski matematičar. U matematici je dao značajan doprinos u području matematičke analize i teorije brojeva.

