Simetrija u klasičnoj mehanici

Filip Vučić[1]

Uvod

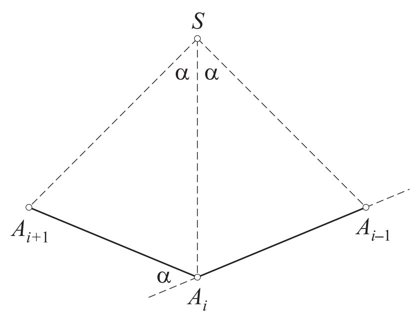
Cilj članka je nizom primjera pokazati značaj simetrije i simetričnih konfiguracija u klasičnoj mehanici. Simetrija će kroz primjere biti pokazana u područjima kinematike, dinamike i nebeske mehanike. Mlađim čitateljima, posebno natjecateljima iz fizike, preporuča se da prvo samostalno pokušaju riješiti dani primjer, a tek zatim pogledaju navedeno rješenje.

Simetrija u kinematici

Primjer 1. (preuzet iz [1]) U vrhovima pravilnog n-terokuta duljine stranice l nalazi se n kukaca. U jednom trenutku kukci se počinju gibati brzinom v konstantnog iznosa tako da je smjer vektora $\vec{v}$ uvijek prema susjednom kukcu gledano u smjeru kazaljke na satu. Gdje i nakon kojeg vremena τ će se kukci sresti? Koliki put s će prijeći svaki kukac do susreta?

Rješenje. Valja uočiti kako je svaki pravilni mnogokut rotacijski simetričan s obzirom na središte rotacije u središtu upisane mu i opisane kružnice. Budući da se svaki kukac mora gibati prema sebi susjednom u smjeru kazaljke na satu, slijedi da će mnogokut rotirati i tako smanjivati svoj polumjer opisane kružnice, a budući da je on rotacijski simetričan, slijedi da će kukci uvijek biti u vrhovima pravilnog n-terokuta, samo će se mijenjati duljina stranice tog n-terokuta i njegov opseg. Također, kukci će se sresti u središtu rotacije, tj. u središtu početnom mnogokutu opisane (i upisane) kružnice.

Na slici 1 pokazan je dio pravilnog n-terokuta s vrhovima A_{i-1}, A_i te A_{i+1}. Sa slike se također vidi da je kut α središnji kut tog pravilnog n-terokuta pa slijedi $\alpha = \dfrac{2\pi}{n}$. Jednostavnim *angle chasingom* dokazuje se kako je kut između pravca $A_{i-1}A_i$ i dužine $\overline{A_iA_{i+1}}$ također jednak α.



Slika 1. Dio pravilnog n-terokuta s označenim kutovima.

Sada valja promotriti gibanje kukca iz točke A_{i-1} prema kukcu u točki A_i. Rastavljanjem na komponente vektora brzine kukca u točki A_i, lako se nađe da je relativna brzina približavanja kukaca u točkama A_{i-1} i A_i jednaka:

$$v(1-\cos\alpha) = v\Big(1-\cos\frac{2\pi}{n}\Big).$$

[1] Autor je učenik 2. razreda I. gimnazije u Zagrebu; e-pošta: `fico.sah@gmail.com`

Gibajući se relativnom brzinom $v\left(1-\cos\dfrac{2\pi}{n}\right)$ jedan prema drugome, kukci u točkama A_{i-1} i A_i prijeći će put l (duljina stranice početnog mnogokuta) za vrijeme τ pa slijedi:

$$\tau = \frac{l}{v\left(1-\cos\dfrac{2\pi}{n}\right)}.$$

Ukupan put s koji će svaki kukac prijeći jednak je:

$$s = v\tau = \frac{l}{\left(1-\cos\dfrac{2\pi}{n}\right)}.$$

⋆ ⋆ ⋆

Još jedan primjer simetrije u kinematičkim problemima može se naći u zadatku 4 s državne razine Natjecanja iz fizike učenika srednjih škola (1. skupina) iz 2015. godine. Zadatak se može naći na [2].

Simetrija u statici i dinamici

Primjer 2. Dana je drvena ploča oblika homogenog valjka zanemarive debljine i čvrsta točka na osi simetrije ploče na visini h iznad središta ploče. Dano je i $2n$ jednakih savršeno elastičnih niti zanemarive mase čiji je jedan kraj ovješen u danu čvrstu točku, a drugi na neku točku na ploči. Kolika je konstanta elastičnosti svake niti k ako ploča miruje u horizontalnoj ravnini i duljina svih niti je jednaka? Elastično ponašanje niti približno se može opisati izrazom $T = kl$ gdje je k konstanta elastičnosti, l duljina niti, a T napetost niti.

Rješenje. Budući da je drvena ploča homogena, zbog osne i zrcalne simetrije valjka, težište se nalazi na polovištu dužine koja spaja središta njegovih baza. To znači da težina ploče djeluje iz te točke, a kako je njezina debljina zanemariva, slijedi da težina ima približno hvatište u središtu njegove baze.

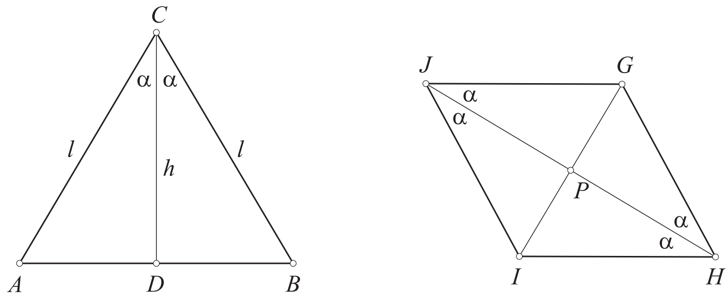
Napetost svake pojedine niti jednaka je po iznosu jer je duljina svih niti ista, a niti su identične. Uočimo kako se traži samo vrijednost konstante elastičnosti k. To znači da treba pronaći konstrukciju postava niti za koju je zadovoljen sljedeći uvjet:

- vektorska suma svih napetosti niti mora biti jednaka vektoru koji je suprotan vektoru težine ploče i ima isto hvatište,
- duljina svih niti mora biti jednaka jer po uvjetu zadatka ploča miruje u horizontalnoj ravnini.

Prvi uvjet slijedi iz dvaju uvjeta ravnoteže $\sum \vec{M} = \vec{0}$ i $\sum \vec{F} = \vec{0}$.

Konstrukcija koja zadovoljava te uvjete je da se krajevi niti postave u vrhove pravilnog $2n$-terokuta polumjera opisane kružnice $r \leq R$. To valja dokazati. Zbog centralne simetrije svakog pravilnog $2n$-terokuta s obzirom na njegovo središte, postoji samo komponenta na pravcu težine jer se sile po komponenti okomitoj na težinu međusobno poništavaju. Također, zbog centralne simetrije je i hvatište rezultante svih napetosti u središtu $2n$-terokuta koje se podudara sa središtem ploče. Dakle, oba uvjeta su zadovoljena i to je odgovarajuća konstrukcija postava niti.

Sada promotrimo par dviju niti koje su pričvršćene u dijametralne vrhove pravilnog $2n$-terokuta (udaljeni su za $2r$). Takvih je parova niti n. Rezultanta tih dvaju napetosti niti mora biti jednaka $2F = \dfrac{Mg}{n}$ jer zbog simetrije, svaki takav par nosi jednak dio težine ploče. Preostaje iz geometrije problema izračunati rezultantu takvog para. Slika 2 pokazuje trokut ABC sa stranicom duljine $|AB| = R$ te stranicom duljine l i paralelogram sila na kojemu je $\overrightarrow{JG} = \overrightarrow{IH} = \vec{T}$ i $\overrightarrow{JH} = \vec{F}$ pri čemu je $2F = \dfrac{Mg}{n}$. Uz to su na ove dvije slike označeni jednaki kutovi, a vrijedi da su kutovi u vrhovima D i P trokuta ACD i GPH pravi.



Slika 2. Dijagram sila za dijametralno suprotne niti.

Trokuti ACD i GPH stoga su slični po K-K poučku (imaju svaki po jedan pravi kut i jedan kut α). Iz sličnosti se može pisati razmjer:

$$\frac{T}{l} = \frac{F}{h}.$$

Uvrštavanjem $T = kl$ i $F = \dfrac{Mg}{2n}$ u prethodni izraz, dobiva se:

$$k = \frac{Mg}{2nh}.$$

⋆ ⋆ ⋆

Primjer 3. $2n$ nebeskih tijela jednake mase M postavljeno je u vrhove pravilnog $2n$-terokuta polumjera opisane kružnice R. Kako se mora gibati svako tijelo mase M da bi se sva nebeska tijela uvijek nalazila u vrhovima tog istog pravilnog $2n$-terokuta?

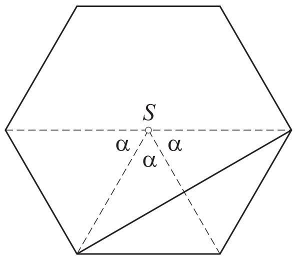
Rješenje. Zbog centralne simetrije svakog pravilnog $2n$-terokuta, rezultantna sila na svako tijelo je jednaka. Zbog osne simetrije svakog pravilnog $2n$-terokuta s obzirom na pravac koji prolazi bilo kojim njegovim vrhom i središtem opisane mu kružnice, slijedi da je rezultantna sila na svako tijelo usmjerena radijalno prema središtu pravilnom $2n$-terokutu opisane kružnice. To upućuje na činjenicu da svako tijelo mora rotirati jednakom kutnom brzinom ω po pravilnom $2n$-terokutu opisanoj kružnici polumjera R.

Promotrimo tijelo u nekom vrhu. Na njega djeluje $2n-1$ sila. Da bi se odredio iznos tih sila, valja promotriti geometriju problema. Neka je promatrano tijelo u vrhu A_1 i neko drugo u vrhu A_{1+k} pri čemu je $k \le 2n-1$. Neka je duljina dužine $|A_1A_{1+k}| = d_k$. Po Newtonovom općem zakonu gravitacije, tijelo u vrhu A_{1+k} djeluje na tijelo u vrhu A_1 silom koja je dana izrazom:

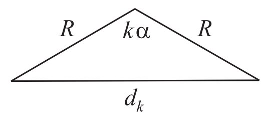
$$F_k = \frac{M^2G}{d_k^2}. \tag{1}$$

Ranije je pokazano da je rezultanta svih sila usmjerena radijalno prema središtu opisane kružnice pa je bitna samo radijalna komponenta sile F_k. Promotrimo sada primjer za

$n = 3$ kako bi došli do opće formule za duljinu k-te dijagonale d_k. Pravilni šesterokut prikazan je na slici 3 u svrhu izračunavanja duljine k-te dijegonale.



Slika 3. Položaj k-te $(k = 2)$ dijagonale za $n = 3$.



Slika 4. Određivanje duljine k-te dijagonale.

Vidi se sa slike 3 da je dijagonala d_k osnovica jednakokračnog trokuta kojemu su krakovi polumjeri opisane kružnice mnogokuta, a kut nasuprot osnovici jednak je $k\alpha$ gdje je α središnji kut pravilnog $2n$-terokuta, tj. $\alpha = \dfrac{\pi}{n}$. Taj je trokut prikazan na slici 4.

Po definiciji sinusa iz trokuta sa slike 4 sada slijedi duljina k-te dijagonale:

$$d_k = 2R\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right). \tag{2}$$

Uvrštavanjem (2) u (1), dobiva se

$$F_k = \frac{M^2G}{\left(2R\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)^2} \tag{3}$$

Valja još uzeti radijalnu komponentu sile dane izrazom (3), a to se vidi iz trokuta sa slike 4 jer smjer djelovanja sile F_k leži na stranici d_k:

$$F_{kr} = \frac{M^2G\cos\left(90^\circ - \left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)}{\left(2R\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)^2} = \frac{M^2G\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}{\left(2R\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)^2} = \frac{M^2G}{4R^2}\frac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}. \tag{4}$$

Zbroj komponenata sila u radijalnom smjeru na svako tijelo dan je izrazom:

$$F_r = \frac{M^2G}{4R^2}\left(1 + 2\sum_{1}^{n-1}\frac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}\right). \tag{5}$$

Valja dati kratko obrazloženje odakle dolazi faktor $\left(1 + 2\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}\right)$. Član 1 dolazi zbog činjenice da postoji samo jedna dijagonala duljine promjera opisane kružnice $2R$, a član $2\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}$ je kraće zapisano zbrajanje izraza (5) za sve $k \leq n-1$ pri čemu je uzeto da postoje po dvije dijagonale istih duljina za svaki $k \neq n$.

Sada se dobiva i kutna brzina ω kojom mora rotirati svako tijelo po pravilnom $2n$-teroktu opisanoj kružnici polumjera R:

$$M\omega^2 R = \frac{M^2 G}{4R^2}\left(1+2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}\right)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{MG}{4R^3}\left(1+2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}\right)} = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{MG}{R}\left(1+2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}\right)}. \tag{6}$$

Parcijalnu sumu reda $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}$ u izrazu (6) na žalost nije moguće eksplicitno izraziti jedino u ovisnosti o parametru n, no moguće je razviti funkciju $\frac{1}{\sin(x)}$ u Maclaurinov red i uzeti aproksimaciju u obliku prva dva člana reda na način:

$$\frac{1}{\sin(x)} \approx \frac{1}{x}+\frac{x}{6}.$$

Tada vrijedi:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} \approx \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2n}{k\pi}+\frac{k\pi}{12n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2n}{k\pi}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k\pi}{12n}. \tag{7}$$

Po Gaussovoj dosjetki vrijedi:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k\pi}{12n} = \frac{\pi}{12n}\sum_{k=1}^{n-1}k = \frac{(n-1)\pi}{24}.$$

Poznata je Ramanjuanova aproksimacija za n-tu parcijalnu sumu harmonijskog reda koja glasi:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \approx \ln(n)+\gamma+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}. \tag{8}$$

Po (8) slijedi:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2n}{k\pi} = \frac{2n}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \approx \frac{2n}{\pi}\left(\ln(n-1)+\gamma+\frac{1}{2(n-1)}-\frac{1}{12(n-1)^2}\right).$$

Supstitucijom nađenih dviju suma u (7), dobiva se:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} \approx \frac{(n-1)\pi}{24}+\frac{2n}{\pi}\left(\ln(n-1)+\gamma+\frac{1}{2(n-1)}-\frac{1}{12(n-1)^2}\right). \tag{9}$$

Valja napomenuti kako je aproksimacija (9) to točnija što je n veći.

Supstitucijom (9) u (6), dobiva se:

$$\omega \approx \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{MG}{R}\left(1+\frac{(n-1)\pi}{12}+\frac{4n}{\pi}\left(\ln(n-1)+\gamma+\frac{1}{2(n-1)}-\frac{1}{12(n-1)^2}\right)\right)}. \tag{10}$$

Izraz (10) tek je gruba aproksimacija izraza (6) pa za manje n treba koristiti izraz (6), no za veće n poželjno je koristiti izraz (10) zbog jednostavnijeg računa i vrlo male pogreške.

⋆ ⋆ ⋆

Primjer 4. Homogena opruga mase m konstante elastičnosti k duljine l_0 ovjesi se o strop. Kolika je duljina opruge l ako opruga neopterećena miruje?

Rješenje. Promotrimo vrlo mali element mase opruge duljine Δx. Na njega djeluju tri sile, a to su težina elementa opruge $F_g = \frac{\Delta x}{l_0} mg$, sila opruge prema stropu $T(x)$ i sila opruge suprotno od stropa $T(x+\Delta x)$ pri čemu je s x obilježena udaljenost promatranog elementa od stropa. Tada po uvjetu ravnoteže vrijedi:

$$T(x) = \frac{\Delta x}{l_0} mg + T(x+\Delta x). \tag{11}$$

Po izrazu (11) vidi se da sila opruge $T(x)$ linearno opada s porastom x pri čemu vrijedi:

$$T(0) = mg$$
$$T(l) = 0.$$

Po Hookeovom zakonu izraz (11) i prethodna dva izraza upućuju na to da produljenje Δl_0 malog elementa mase opruge linearno opada s porastom x pri čemu vrijedi:

$$\Delta l_0(0) = \frac{mg}{k}$$
$$\Delta l_0(l) = 0.$$

Ukupno produljenje opruge Δl zbroj je svih malih produljenja $\Delta l_0(x)$. U koordinatnom sustavu se može nacrtati graf ovisnosti produljenja elementa mase opruge u ovisnosti o udaljenosti od stropa. Taj graf je pravac, a graf funkcije na intervalu $x \in [0, l]$ je dužina koja pripada tom pravcu. Na osi ordinata tom intervalu odgovara interval $\Delta l_0 \in \left[0, \frac{mg}{k}\right]$. Kako je dužina centralno simetrična s obzirom na njezino polovište, a postoji bijekcija s intervala $\Delta l_0 \in \left[0, \frac{mg}{k}\right]$ na promatranu dužinu na osi ordinata, to slijedi da su i vrijednosti produljenja elemenata masa simetrično raspoređene s obzirom na polovište opruge, odnosno oko vrijednosti $\frac{mg}{2k}$. Iz toga se zaključuje da je zbroj svih malih produljenja elemenata opruge jednak upravo $\Delta l = \frac{mg}{2k}$, a iz toga slijedi konačno rješenje:

$$l = l_0 + \Delta l = l_0 + \frac{mg}{2k}.$$

Zaključak

Kroz ova četiri primjera pokazana su neka obilježja simetrije u klasičnoj mehanici. Posebno se moglo uočiti kako je simetrija posebno oružje u rješavanju složenijih zadatka. Prilikom rješavanja danih primjera uočavaju se sljedeće bitne primjene simetrije:

- česta je invarijantnost simetrične konfiguracije s obzirom na određene transformacije sustava,
- konstrukciju rješenja uz dane uvjete obično je korisno započeti simetričnim konfiguracijama, odnosno odmah postaviti uvjet simetričnosti rješenja,
- simetrija u velikom broju slučajeva olakšava pronalazak matematičkog rješenja jednadžbi koje bi bez simetrije bile znatno složenije ili uopće nerješive.

Svaka od navedenih stavki ukratko će biti objašnjena kroz korištena četiri primjera.

U primjeru 1 ključno je bilo uočiti činjenicu da se kukci u svakom trenutku nalaze u vrhovima pravilnog n-terokuta. Ta je tvrdnja posljedica rotacijske simetrije pravilnog mnogokuta. Naime, rotacijska simetrija upućuje na činjenicu da će pri opisanom gibanju (transformaciji) sustava kukci upravo zadržavati tu istu rotacijski simetričnu konfiguraciju u odnosu na točku u kojoj će se susresti.

U primjeru 2 valjalo je pronaći konfiguraciju koja je stabilna uz dane uvjete, odnosno prije matematičkog pristupa problemu trebalo je pronaći geometrijsku konstrukciju problema. Na temelju istih konstanti elastičnosti svih niti i homogenosti mase ploče pretpostavljena je simetrična konfiguracija koja je zatim konstruirana i naknadno je ispitano zadovoljava li ta konfiguracija fizikalne uvjete koje problem nameće.

U primjerima 3 i 4 očitovala se posljednja stavka. Simetrija je uvelike olakšala provođenje matematičkog proračuna. Kad u primjeru 3 konfiguracija nebeskih tijela ne bi bila centralno simetrična, fizikalne jednadžbe postale bi znatno rigoroznije, pojavili bi se nelinearni članovi i diferencijalne jednadžbe, no centralna simetrija i jednakost masa omogućili su elegantno rješavanje problema.

U primjeru 4 bilo bi znatno teže odrediti ukupno produljenje opruge da nije iskorišteno svojstvo grafa linearne zavisnosti – centralna simetrija intervala s obzirom na aritmetičku sredinu rubnih točaka tog intervala. Pokazano je kako je ta simetrija ekvivalentna centralnoj simetriji dužine s obzirom na njezino polovište. To upućuje na činjenicu da su produljenja elemenata opruge simetrično raspoređena s obzirom na polovište opruge, a odatle je utvrđeno kako ukupno produljenje odgovara aritmetičkoj sredini rubnih točaka promatranog intervala.

Literatura

[1] MIRKO PLANINIĆ I NIKOLA POLJAK, *Zbirka zadataka iz mehanike*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] `http://vinkovic.org/Projects/MindExercises/index_03.php`