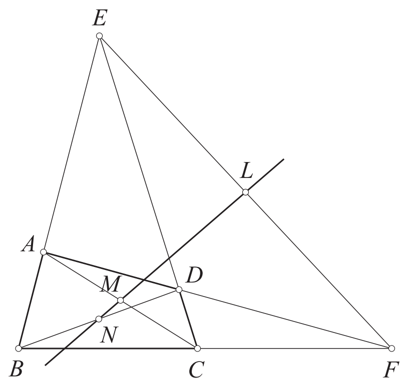
Newtonov pravac četverokuta

Predrag Lončar[1]

Uvod

Neka je $ABCD$ **konveksni** četverokut sa stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$, duljina redom a, b, c i d, takvim da je $a+b+c+d > 2\cdot\max\{a,b,c,d\}$ (nejednakost četverokuta). Dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ su dijagonale četverokuta $ABCD$. Neka je p duljina dužine $\overline{AC}$, a q duljina od $\overline{BD}$. Neka je točka M polovište dijagonale $\overline{AC}$, N polovište od $\overline{BD}$. Upotpunimo konveksni četverokut $ABCD$ do potpunog četverovrha (četverostrana) tako da produljimo njegove nasuprotne stranice. Uzmimo da se pravci AB i CD sijeku u točki E, $AB\cap CD = E$, a da se pravci BC i DA sijeku u točki F, $BC\cap DA = F$. Dužina $\overline{EF}$ je treća dijagonala potpunog četverostrana $ABCDEF$, koji je nastao iz četverokuta $ABCD$. Neka je točka L polovište dužine $\overline{EF}$.



Slika 1.

Površinu četverokuta $ABCD$ označit ćemo s $\mathcal{P}$, a površinu trokuta ABC s $\mathcal{P}(\triangle ABC)$. Nadalje, s $|MN|$ označit ćemo udaljenost točaka M i N. Konveksni četverokut $ABCD$ određen je s pet elemenata.

U daljnjem ćemo provoditi dokaze pomoću vektora. Neka je O proizvoljna točka u ravnini konveksnog četverokuta $ABCD$. Za neku točku P u toj ravnini s $\overrightarrow{r_P}$ označit ćemo radijus vektor točke P s obzirom na O kao početnu točku, tj. vektor $\overrightarrow{r_P} = \overrightarrow{OP}$. Tako ćemo napraviti i za sve ostale točke u ravnini četverokuta $ABCD$ uzimajući odabranu točku O za početak svih radijus vektora koje ćemo koristiti. Pri tome položaj točke O u ravnini četverokuta neće biti uvijek isti, već ćemo je birati tako da se izvodi štoviše pojednostavne.

---

[1] Autor je viši predavač na Geotehničkom fakultetu u Varaždinu; e-pošta: `ploncar@gfv.hr`

U četverokutu $ABCD$ (slika 1) vrijedi:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}\right) \tag{1}$$

tj.

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\right).$$

Definicija 1. *Tri točke P, Q i R koje leže na jednom pravcu su **kolinearne točke**, a tri pravca p, q i r koji prolaze istom točkom su **konkurentni pravci**.*

Kolinearnost točaka P, Q i R pišemo $\overrightarrow{PR}=\lambda\overrightarrow{PQ}$ za neko realno λ, $\lambda\neq 0$.

U daljnjem ćemo koristiti pojmove skalarnog i vektorskog produkta dvaju vektora. Detaljnije o skalarnom produktu možete naći u [1], a o vektorskom produktu u [2]. Neka je r_P duljina (norma) vektora $\overrightarrow{r_P}$, što pišemo: $r_P=|\overrightarrow{r_P}|=\sqrt{\overrightarrow{r_P}\cdot\overrightarrow{r_P}}$.

Točke P, Q i R su kolinearne jedino u slučaju da je $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\vec{0}$. Raspišimo uvjet $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\vec{0}$ koristeći za ishodište bilo koju točku O u ravnini četverokuta. Imamo:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}&=(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})\times(\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP})\\&=\overrightarrow{OQ}\times\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OQ}\times\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OP},\end{aligned}$$

tj.

$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OQ}\times\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OR}\times\overrightarrow{OP}. \tag{2}$$

Pri tome smo koristili svojstva vektorskog produkta: antikomutativnost, $-\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OR}\times\overrightarrow{OP}$ i $\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OP}=\vec{0}$. Pogledajmo izraz na desnoj strani relacije (2). Iz (2) vidimo da on uopće ne ovisi o ishodištu O, već samo o točkama P, Q i R. Stavljajući u taj izraz $O\equiv P$, i koristeći $\overrightarrow{PP}=\vec{0}$ dobijemo $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$. Stavljajući u izraz $O\equiv Q$ dobijemo $\overrightarrow{QR}\times\overrightarrow{QP}$, a stavljajući $O\equiv R$ dobijemo $\overrightarrow{RP}\times\overrightarrow{RQ}$. Time smo pokazali da je $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{QR}\times\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{RP}\times\overrightarrow{RQ}$. Otprije znamo da je duljina vektora $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$ jednaka (do na predznak) površini paralelograma razapetog vektorima $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{PR}$, odnosno $\pm 2\mathcal{P}(\triangle PQR)$. U daljnjem koristimo oznaku $[PQR]$ za algebarsku površinu $\triangle PQR$, dakle $[PQR]$ je pozitivna površina $\triangle PQR$ ako je orijentacija njegovih vrhova P, Q i R suprotna od smjera kazaljke na satu, a $[PQR]$ je negativna površina $\triangle PQR$ u protivnom slučaju. Uočimo da vrijedi $[PQR]=-[PRQ]$ i da, zbog relacije (2), imamo $[PQR]=[QRP]=[RPQ]$. Iz (2) slijedi

$$\mathcal{P}(\triangle PQR)=|[PQR]|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OQ}\times\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OR}\times\overrightarrow{OP}\right|. \tag{3}$$

Sada možemo izreći sljedeću lemu.

Lema 1. *Neka su P, Q i R tri točke u ravnini, a $\overrightarrow{r_P}$, $\overrightarrow{r_Q}$ i $\overrightarrow{r_R}$ njihovi radijus vektori s obzirom na istu točku O. Točke P, Q, R su kolinearne ako i samo ako vrijedi:*

$$\overrightarrow{r_P}\times\overrightarrow{r_Q}+\overrightarrow{r_Q}\times\overrightarrow{r_R}+\overrightarrow{r_R}\times\overrightarrow{r_P}=\vec{0}. \tag{4}$$

Dokaz. Prema (2) imamo:

$$\vec{r_P} \times \vec{r_Q} + \vec{r_Q} \times \vec{r_R} + \vec{r_R} \times \vec{r_P} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}.$$

No $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \vec{0}$ ako i samo ako je $\mathcal{P}(\triangle PQR) = 0$, (3). No to je ako i samo ako su točke P, Q i R kolinearne, tj. jedino u slučaju $\overrightarrow{PR} = \lambda \overrightarrow{PQ}$ za neko realno λ. $\square$

Definirajmo sada vektor $\vec{\mathcal{A}}_{PQR}$:

$$\vec{\mathcal{A}}_{PQR} = \vec{r_P} \times \vec{r_Q} + \vec{r_Q} \times \vec{r_R} + \vec{r_R} \times \vec{r_P}. \tag{5}$$

Definicija 1 je valjana, jer prema (2) vektor $\vec{\mathcal{A}}_{PQR}$ ne ovisi o izboru ishodišta O promatranih radijus vektora. Lema 1 kaže da su tri točke P, Q i R kolinearne ako i samo ako je $\vec{\mathcal{A}}_{PQR} = \vec{0}$. Uzmimo da je točka Q između točaka P i R i da je O izabrano tako da je orijentacija O, P i R suprotna od kazaljke na satu. Tada uvjet (4) iz leme 1 kaže da je uvjet kolinearnosti takvih triju točaka P, Q i R ekvivalentan uvjetu između triju pozitivnih površina $\triangle OPQ$, $\triangle OQR$ i $\triangle OPR$:

$$\mathcal{P}(\triangle OPR) = \mathcal{P}(\triangle OPQ) + \mathcal{P}(\triangle OQR).$$

Za tri kolinearne točke P, Q i R, koje leže na nekom po volji orijentiranom pravcu, definirajmo djelišni omjer $\dfrac{[PQ]}{[QR]}$ trojke P, Q i R ovako: $\dfrac{[PQ]}{[QR]} = \dfrac{|PQ|}{|QR|}$, ako su vektori $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{QR}$ jednake orijentacije, i $\dfrac{[PQ]}{[QR]} = -\dfrac{|PQ|}{|QR|}$, ako su vektori $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{QR}$ suprotne orijentacije. Spomenimo formulu

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 + |\vec{u} \cdot \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2, \tag{6}$$

koja vrijedi za bilo koja dva vektora $\vec{u}$ i $\vec{v}$, a slijedi iz definicije vektorskog i skalarnog produkta.

Zadatak 1. *Pokažite da u četverokutu $ABCD$ vrijede formule:*

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{CB}.$$

Newtonov pravac četverokuta

Pokažimo da vrijedi tzv. Newtonov teorem.

Teorem 1. *Tri polovišta dijagonala $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ i $\overline{EF}$ svakog potpunog četverovrha $ABCDEF$ su kolinearne točke.*

Dokaz. Vrijedi $\overrightarrow{r_M} = \dfrac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_C}}{2}$, $\overrightarrow{r_N} = \dfrac{\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_D}}{2}$ i $\overrightarrow{r_L} = \dfrac{\overrightarrow{r_E} + \overrightarrow{r_F}}{2}$. Koristeći (5) i svojstva vektorskog produkta dobivamo

$$4\overrightarrow{\mathcal{A}}_{MNL} = \overrightarrow{\mathcal{A}}_{ABE} + \overrightarrow{\mathcal{A}}_{CBF} + \overrightarrow{\mathcal{A}}_{CDE} + \overrightarrow{\mathcal{A}}_{ADF}. \tag{7}$$

Kako su točke A, B, E; C, B, F; C, D, E te A, D, F kolinearne (vidi sliku 1), po lemi 1 imamo: $\overrightarrow{\mathcal{A}}_{ABE} = 0$, $\overrightarrow{\mathcal{A}}_{CBF} = 0$, $\overrightarrow{\mathcal{A}}_{CDE} = 0$ i $\overrightarrow{\mathcal{A}}_{ADF} = 0$. Relacija (7) daje $\overrightarrow{\mathcal{A}}_{MNL} = \vec{0}$. Dokazali smo da vrijedi uvjet (4) iz leme 1 za točke M, N i L, pa zaključujemo da su točke M, N i L kolinearne. $\square$

Drugi dokaz teorema 1, pomoću Menelajevog teorema, može se naći u [3]. Gauss je prvi strogo dokazao da su polovišta M, N i L dijagonala četverovrha $ABCDEF$ tri kolinearne točke i da one leže na pravcu kojeg je proučavao Newton. Stoga se ovaj zove *Newton-Gaussov ili Newtonov pravac četverokuta $ABCD$*. Newtonov pravac, označimo ga s $\mathcal{N}$, postoji za svaki ravninski četverokut $ABCD$, osim za one kod kojih je $M \equiv N$, tj. osim za paralelograme (sjetimo se da je paralelogram takav konveksni četverokut kojemu se dijagonale raspolavljaju). Jedno očito svojstvo Newtonovog pravca $\mathcal{N}$ četverokuta $ABCD$ je da su nasuprotni vrhovi četverokuta A i C jednako udaljeni od $\mathcal{N}$ (jer $M \in \mathcal{N}$). Isto vrijedi i za nasuprotne vrhove B i D četverokuta $ABCD$ (jer $N \in \mathcal{N}$).

Uočimo jednu istaknutu točku Newtonovog pravca $\mathcal{N}$: polovište G dužine $\overline{MN}$. Za G vrijedi,

$$\overrightarrow{r_G} = \frac{\overrightarrow{r_M} + \overrightarrow{r_N}}{2} = \frac{\dfrac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_C}}{2} + \dfrac{\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_D}}{2}}{2} = \frac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D}}{4}. \tag{8}$$

Relacija (8) tvrdi da je polovište dužine $\overline{MN}$ ujedno težište G sustava od četiri vrha četverokuta $ABCD$, koji svi imaju iste težine, odnosno fizikalno gledajući, koji svi imaju iste mase. Valja napomenuti da točka G u relaciji (8) nije težište četverokuta $ABCD$. Sjetimo se da je u slučaju trokuta ABC točka G dana s $\overrightarrow{r_G} = \dfrac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}}{3}$, težište sustava od tri vrha trokuta ABC koji svi imaju iste težine, i ujedno težište površine unutar trokuta ABC. No kod četverokuta, težište sustava jediničnih masa u vrhovima četverokuta i težište četverokuta određenih tim vrhovima su općenito dvije različite točke.

Zadatak 2. *Vektorskom metodom, koristeći formulu (1), dokažite da vrijedi Eulerov teorem*

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = p^2 + q^2 + 4|MN|^2. \tag{9}$$

Jedno svojstvo Newtonovog pravca

Lema 2. *Neka Newtonov pravac $\mathcal{N}$ konveksnog četverokuta $ABCD$ siječe dužinu $\overline{AD}$ ili njezin produžetak u točki I i dužinu $\overline{CB}$ ili njezin produžetak u točki J. Tada vrijedi jednakost djelišnih omjera dviju trojki kolinearnih točaka A, I, D i C, J, B*

$$\frac{[AI]}{[ID]} = \frac{[CJ]}{[JB]}. \tag{10}$$

Dokaz. Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$. Vektori $\vec{a}$ i $\vec{d}$ su linearno nezavisni, pa postoje pozitivni realni brojevi α i β takvi da je $\overrightarrow{AC} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{d}$ (vidi sliku 1). Sada je, s jedne strane $\overrightarrow{AI} = \lambda\vec{d}$, za neko realno λ, a s druge, zbog $I \in \mathcal{N}$, postoji realan broj μ tako da $\overrightarrow{AI} = \mu\overrightarrow{AN} + (1-\mu)\overrightarrow{AM} = \mu\dfrac{\vec{a}+\vec{d}}{2} + (1-\mu)\dfrac{\alpha\vec{a}+\beta\vec{d}}{2}$. Izjednačimo li te dvije relacije, imamo: $\mu\dfrac{\vec{a}+\vec{d}}{2} + (1-\mu)\dfrac{\alpha\vec{a}+\beta\vec{d}}{2} = \lambda\vec{d}$. Odatle, zbog linearne nezavisnosti vektora $\vec{a}$ i $\vec{d}$, dobivamo sustav od dvije linearne algebarske jednadžbe s dvije nepoznanice, koji nakon rješavanja daje: $\lambda = \dfrac{\beta-\alpha}{2(1-\alpha)}$ i $\mu = \dfrac{1}{1-\alpha}$. Odavde $\dfrac{[AI]}{[ID]} = \dfrac{\lambda}{1-\lambda} = \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta-2}$, ili vektorski $(\alpha+\beta-2)\overrightarrow{AI} = (\alpha-\beta)\overrightarrow{ID}$. Sličan račun se provodi i za točku J. Naime, iz $\overrightarrow{BJ} = \lambda_1\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{BJ} = \mu_1\overrightarrow{BN} + (1-\mu_1)\overrightarrow{BM}$ dobivamo analogno: $\lambda_1 = -\dfrac{\alpha+\beta-2}{2(1-\alpha)}$ i $\mu_1 = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$. Odavde $\dfrac{[CJ]}{[JB]} = \dfrac{\lambda_1-1}{-\lambda_1} = \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta-2}$ ili vektorski $(\alpha+\beta-2)\overrightarrow{CJ} = (\alpha-\beta)\overrightarrow{JB}$. Sada vidimo da vrijedi: $\dfrac{[AI]}{[ID]} = \dfrac{[CJ]}{[JB]} = \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta-2}$ i dokaz je gotov. $\square$

U slučaju $\alpha-\beta=0$ je $\mathcal{N} = AC$, a u slučaju $\alpha+\beta-2=0$ je $\mathcal{N} = BD$ u lemi 2, i jednakost djelišnih omjera u (10) vrijedi i tada. Lema 2 tvrdi da Newtonov pravac $\mathcal{N}$ dijeli dužine $\overline{AD}$ i $\overline{CB}$ u jednakim djelišnim omjerima. Posve analogno bi dokazali da Newtonov pravac $\mathcal{N}$ dijeli i drugi par nasuprotnih stranica $\overline{DC}$ i $\overline{BA}$ četverokuta $ABCD$ u jednakim djelišnim omjerima.

Anneov teorem i njegova primjena

Postoji jedna karakterizacija Newtonovog pravca, koja je dana *Anneovim teoremom i njegovim obratom.*

Teorem 2. *Neka je X bilo koja nutarnja točka na Newtonovom pravcu $\mathcal{N}$ četverokuta $ABCD$, koji nije paralelogram. Tada vrijedi ova jednakost zbroja površina*

$$[ABX] + [CDX] = [DAX] + [BCX]. \tag{11}$$

I obratno, ako za neku točku X u ravnini četverokuta $ABCD$ vrijedi jednakost (11), tada je $X \in \mathcal{N}$.

Dokaz. Dokažimo samo prvi dio izreke ovog teorema (to je zapravo obrat Anneovog teorema). Uzmimo $O \equiv M$, tj. $\vec{r_M} = \vec{0}$. Za točku $X = M$ lako se provjeri da vrijedi: $[ABM]+[CDM] = \dfrac{1}{2}([ABC]+[CDA]) = \dfrac{\mathcal{P}}{2}$ i $[DAM]+[BCM] = \dfrac{1}{2}([DAC]+[BCA]) = \dfrac{\mathcal{P}}{2}$, pa je $[ABM] + [CDM] = [DAM] + [BCM]$. Relacija (11) za točku M daje

$|\overrightarrow{r_A} \times \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} \times \overrightarrow{r_D}| = |\overrightarrow{r_D} \times \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} \times \overrightarrow{r_C}|$. Označimo:

$$\mathcal{S} = |\overrightarrow{r_A} \times \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} \times \overrightarrow{r_D}| = |\overrightarrow{r_D} \times \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} \times \overrightarrow{r_C}|. \tag{12}$$

Za točku N vidi se, na isti način: $[ABN] + [CDN] = \dfrac{\mathcal{P}}{2} = [DAN] + [BCN]$. Neka je sada X bilo koja nutarnja točka pravca $\mathcal{N}$. Tada je

$$\overrightarrow{r_X} = \vartheta \overrightarrow{r_N} = \frac{\vartheta}{2}(\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_D}),$$

za neko realno ϑ. Površina $\triangle ABX$ je po (3) $\frac{1}{2}|\overrightarrow{r_A} \times \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_B} \times \overrightarrow{r_X} + \overrightarrow{r_X} \times \overrightarrow{r_A}|$, što se svodi na $\frac{1}{2}\left|\left(1 - \frac{\vartheta}{2}\right)\overrightarrow{r_A} \times \overrightarrow{r_B} + \frac{\vartheta}{2}\overrightarrow{r_B} \times \overrightarrow{r_D} + \frac{\vartheta}{2}\overrightarrow{r_D} \times \overrightarrow{r_A}\right|$, a površina $\triangle CDX$ je, na isti način, $\frac{1}{2}\left|\left(1 - \frac{\vartheta}{2}\right)\overrightarrow{r_C} \times \overrightarrow{r_D} - \frac{\vartheta}{2}\overrightarrow{r_B} \times \overrightarrow{r_D} + \frac{\vartheta}{2}\overrightarrow{r_B} \times \overrightarrow{r_C}\right|$. Kako trokuti ABX i CDX imaju istu orijentaciju, zbroj pozitivnih površina ABX i CDX za nutarnje točke X pravca $\mathcal{N}$ je:

$$\frac{1}{2}\left[\left|\left(1 - \frac{\vartheta}{2}\right)|\overrightarrow{r_A} \times \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} \times \overrightarrow{r_D}| + \frac{\vartheta}{2}|\overrightarrow{r_D} \times \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} \times \overrightarrow{r_C}|\right|\right] = \frac{1}{2}\mathcal{S}. \tag{13}$$

Pri tome smo u izvodu (13) koristili relaciju (12). Površina trokuta DAX je analogno $\frac{1}{2}\left|\left(1 - \frac{\vartheta}{2}\right)\overrightarrow{r_D} \times \overrightarrow{r_A} + \frac{\vartheta}{2}\overrightarrow{r_A} \times \overrightarrow{r_B} + \frac{\vartheta}{2}\overrightarrow{r_B} \times \overrightarrow{r_D}\right|$, a površina od BCX iznosi $\frac{1}{2}\left|\left(1 - \frac{\vartheta}{2}\right)\overrightarrow{r_B} \times \overrightarrow{r_C} + \frac{\vartheta}{2}\overrightarrow{r_C} \times \overrightarrow{r_D} - \frac{\vartheta}{2}\overrightarrow{r_B} \times \overrightarrow{r_D}\right|$. Za nutarnje točke $X \in \mathcal{N}$ zbroj pozitivnih površina $\triangle DAX$ i $\triangle BCX$ je na isti način:

$$\frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{\vartheta}{2}\right)|\overrightarrow{r_D} \times \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} \times \overrightarrow{r_C}| + \frac{\vartheta}{2}|\overrightarrow{r_A} \times \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} \times \overrightarrow{r_D}|\right] = \frac{1}{2}\mathcal{S}. \tag{14}$$

Pri tome smo i u izvodu (14) koristili relaciju (12). Iz (13) i (14) vidimo da svaka nutarnja točka Newtonovog pravca $\mathcal{N}$ ima svojstvo (11). $\square$

Napomena 1. *Jednakost (11) u teoremu 2 vrijedi za svaku točku pravca $\mathcal{N}$, jedino tada nisu sve "površine" u relaciji (11) pozitivne, već su neke od njih negativne. Dokaz druge, ovdje nedokazane tvrdnje Anneovog teorema, može se naći u [4]. Tamo je grafički dokazano da je skup svih točaka u ravnini konveksnog četverokuta (koji nije paralelogram) koje zadovoljavaju uvjet (11), pravac koji prolazi točkama M i N, tj. Newtonov pravac $\mathcal{N}$.*

Pokažimo sada jednu primjenu Anneovog teorema. Neka je četverokut $ABCD$ tangencijalni četverokut (četverokut koji ima upisanu kružnicu, a njegove stranice su tangente te kružnice). Znamo da je jednakost $a + c = d + b$ nužan i dovoljan uvjet da četverokut $ABCD$ bude tangencijalni četverokut. Dokažimo sada, koristeći teorem 2, Newtonov teorem.

Teorem 3. *Središte S upisane kružnice k tangencijalnog četverokuta $ABCD$, koji nije romb, leži na Newtonovom pravcu $\mathcal{N}$.*

Dokaz. Neka je r polumjer upisane kružnice k. Imamo $[ABS] = \frac{1}{2}ar$, $[CDS] = \frac{1}{2}cr$, $[DAS] = \frac{1}{2}dr$ i $[BCS] = \frac{1}{2}br$, i sve su te površine pozitivne, jer je S unutar četverokuta

$ABCD$. Sada imamo, koristeći jednakost $a+c=d+b$

$$[ABS]+[CDS]=\frac{1}{2}(a+c)r=\frac{1}{2}(d+b)r=[DAS]+[BCS],$$

pa je ispunjen uvjet (11). Po teoremu 2 je $S\in\mathcal{N}$. $\square$

Površina četverokuta

Površina $\mathcal{P}$ konveksnog četverokuta $ABCD$ je $\mathcal{P}=\mathcal{P}(\triangle ABC)+\mathcal{P}(\triangle CDA)$ (ili $\mathcal{P}=\mathcal{P}(\triangle ABD)+\mathcal{P}(\triangle BCD)$). Koristimo li (3), dobijemo da je površina $\mathcal{P}$ četverokuta $ABCD$:

$$\mathcal{P}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OD}\times\overrightarrow{OA}|. \tag{15}$$

Ova, kao i formula (3), ne ovise o izboru ishodišta O u ravnini konveksnog četverokuta $ABCD$. Stavimo li u (15) $O\equiv A$, dobijemo:

$$\mathcal{P}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}|. \tag{16}$$

Neka je φ kut između dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ konveksnog četverokuta $ABCD$.

Teorem 4. *U konveksnom četverokutu $ABCD$ vrijedi*

$$\mathcal{P}^2=\left(\frac{1}{2}pq\right)^2-\left[\frac{a^2+c^2-(b^2+d^2)}{4}\right]^2. \tag{17}$$

Dokaz. Za vektore $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{BD}$ imamo, iz (6):

$$|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}|^2+|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}|^2=p^2q^2.$$

Kako je, prema (16), $2\mathcal{P}=|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}|=pq\cdot\sin\varphi$, imamo:

$$(2\mathcal{P})^2+|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}|^2=p^2q^2. \tag{18}$$

Imamo $|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}|=pq\cdot|\cos\varphi|$. Neka je točka H_1 ortogonalna projekcija od B na pravac AC, a H_2 ortogonalna projekcija od D na pravac AC (nacrtaj sliku). Vektor $\overrightarrow{H_1H_2}$ je tada ortogonalna projekcija vektora $\overrightarrow{BD}$ na pravac AC, pa je $\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{H_1H_2}\right)=0$, tj. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{H_1H_2}$. Odavde je $|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{H_1H_2}|=|[AC]\cdot[H_1H_2]|$.

Koristeći Pitagorin poučak i orijentirane dužine, imamo:

$$\begin{aligned}\left|\frac{(a^2-b^2)+(c^2-d^2)}{2}\right| &= \left|\frac{([AH_1]^2-[CH_1]^2)+([CH_2]^2-[AH_2]^2)}{2}\right| \\ &= \left|\frac{[AC]}{2}\cdot([AH_1]-[CH_1]+[CH_2]-[AH_2])\right|.\end{aligned}$$

Zato je:

$$\begin{aligned}\left|\frac{a^2+c^2-(b^2+d^2)}{2}\right| &= \left|\frac{[AC]}{2}\cdot(([AH_1]-[AH_2])+([CH_2]-[CH_1]))\right| \\ &= |[AC]\cdot[H_1H_2]|.\end{aligned}$$

Imamo:

$$|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}| = |[AC]\cdot[H_1H_2]| = \left|\frac{a^2+c^2-(b^2+d^2)}{2}\right|, \qquad (19)$$

što zajedno s (18) daje (17). $\square$

Napomena 2. *Pomnožimo li (17) sa (16) i koristimo li formulu za razliku kvadrata, vidimo da za površinu četverokuta $\mathcal{P}$ vrijedi i*

$$16\mathcal{P}^2 = \left(2pq+a^2+c^2-b^2-d^2\right)\left(2pq+b^2+d^2-a^2-c^2\right).$$

Zadatak 3. *Iz dokaza teorema 3 izlaze formule za $\sin\varphi$ i $|\cos\varphi|$. Napišite ih! Iz formule (17) imamo nejednakost: $\mathcal{P} \le \frac{1}{2}pq$. Kada vrijedi jednakost i koliki je tada kut φ?*

Čitatelj, koji želi znati nešto više o geometriji četverokuta, naći će dosta dodatnih podataka i zadataka u [5].

Literatura

[1] S. Kurepa, *Matematika 3 za treći razred gimnazije, Trigonometrijske funkcije, Analitička geometrija u ravnini*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[2] S. Kurepa, *Uvod u linearnu algebru, Vektori-Matrice-Grupe*, Školska knjiga, Zagreb, 1975.

[3] `https://en.wikipedia.org/wiki/Newton line`

[4] Hans Humenberger and Berthold Schuppar, *Balanced areas in quadrilaterals – Anne's Theorem and its unknown origin*, Teaching Mathematics and Computer Science, 17/ 1 (2018), p. 93–103.

[5] Claudi Alsina, Roger B. Nelsen, *A cornucopia of quadrilaterals*, Dolciani Mathematical Expositions, 2020.