Jedna trigonometrijska jednakost i neke njene posljedice

Šefket Arslanagić, Daniela Zubović

U ovom članku ćemo dokazati zanimljivu trigonometrijsku jednakost

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}=\frac{s}{R+r} \tag{1}$$

gdje su α, β, γ unutarnji kutovi $\triangle ABC$, a s njegov poluopseg te R i r radijusi opisane i upisane kružnice tog trokuta.

Dokaz. Prvo ćemo dokazati sljedeće dvije jednakosti:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\frac{s}{R} \tag{2}$$

i

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+\frac{r}{R}. \tag{3}$$

Dokaz od (2). Iz poučka o sinusima za trokut imamo

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}=\frac{a+b+c}{2R}=\frac{2s}{2R}=\frac{s}{R}.$$

Dokaz od (3). Imamo poznatu jednakost

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}. \tag{4}$$

Dalje imamo

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$

a odavde na osnovu kosinusovog poučka:

$$\begin{aligned}\sin\frac{\alpha}{2}&=\sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{bc}}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{bc}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(s-b)\cdot 2(s-c)}{bc}}\\&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\end{aligned}$$

tj.

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \tag{5}$$

te analogno:

$$\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} \tag{6}$$

i

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \tag{7}$$

Nakon množenja jednakosti (5), (6) i (7), dobivamo:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}\cdot\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$
$$=\sqrt{\frac{(s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2}{a^2b^2c^2}}=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}. \tag{8}$$

Na osnovu Heronove formule $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ za površinu trokuta i poznate formule $abc=4PR$, iz (8) dobivamo

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{\frac{P^2}{s}}{4RP}=\frac{P}{4Rs},$$

a odavde zbog $P=rs$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{4R}. \tag{9}$$

Sada iz (4) i (9) dobivamo

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+\frac{r}{R}. \tag{10}$$

Iz (2) i (3) slijedi jednakost (1).

Više raznih dokaza Eulerove[1] nejednakosti

$$R\geqslant 2r \tag{11}$$

mogu se naći u [1].

Sada iz (1) i (11) dobivamo sljedeću dvojnu nejednakost

$$\frac{2s}{3R}\leqslant\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}\leqslant\frac{s}{3r}, \tag{12}$$

gdje jednakost vrijedi ako i samo ako je $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$ ili $a=b=c$ (jednakostranični trokut).

Sada ćemo dati jedan novi oblik nejednakosti (12). Prije toga ćemo dokazati Mitrinovićevu[2] nejednakost

$$3\sqrt{3}r\leqslant s\leqslant\frac{3\sqrt{3}R}{2}. \tag{13}$$

Dokaz. Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja redom imamo:

$$\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\geqslant\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$\iff 3s-(a+b+c)\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$\iff s\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}\iff s^3\geqslant 27(s-a)(s-b)(s-c)$$
$$\iff s^4\geqslant 27s(s-a)(s-b)(s-c)\iff s^4\geqslant 27P^2\iff s^4\geqslant 27r^2s^2$$
$$\iff s^2\geqslant 27r^2\iff s\geqslant 3\sqrt{3}r. \tag{14}$$

---

[1] Leonhard Euler (Ojler), 1707. – 1783., švicarski matematičar

[2] Dragoslav S. Mitrinović, 1908. – 1995., srpski matematičar

Uvrštavanjem u poznatu nejednakost:

$$(x+y+z)^2 \geqslant 3(xy+yz+zx) \quad (x,\, y,\, z \in \mathbb{R})$$
$$\left(\iff \frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right] \geqslant 0\right)$$

$x = r_a$, $y = r_b$, $z = r_c$, gdje su r_a, r_b, r_c radijusi pripisanih kružnica $\triangle ABC$, dobivamo

$$(r_a+r_b+r_c)^2 \geqslant 3(r_ar_b+r_br_c+r_cr_a). \tag{15}$$

Kako je $r_a = \dfrac{P}{s-a}$, $r_b = \dfrac{P}{s-b}$, $r_c = \dfrac{P}{s-c}$, to imamo (radi $ab+bc+ca = s^2+r^2+4Rr$):

$$\begin{aligned}
r_a+r_b+r_c &= \frac{P}{s-a}+\frac{P}{s-b}+\frac{P}{s-c} = P\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\right)\\
&= P\cdot\frac{(s-b)(s-c)+(s-a)(s-c)+(s-a)(s-b)}{(s-a)(s-b)(s-c)}\\
&= P\cdot\frac{3s^2-2s(a+b+c)+ab+bc+ca}{(s-a)(s-b)(s-c)} = P\cdot\frac{3s^2-4s^2+s^2+r^2+4Rr}{\frac{P^2}{s}}\\
&= \frac{r^2+4Rr}{\frac{P}{s}} = \frac{r(4R+r)}{\frac{rs}{s}} = 4R+r,
\end{aligned}$$

tj.

$$r_a+r_b+r_c = 4R+r \tag{16}$$

te

$$\begin{aligned}
r_ar_b+r_br_c+r_cr_a &= \frac{P^2}{(s-a)(s-b)}+\frac{P^2}{(s-b)(s-c)}+\frac{P^2}{(s-c)(s-a)}\\
&= \frac{P^2(s-a+s-b+s-c)}{(s-a)(s-b)(s-c)} = P^2\cdot\frac{3s-(a+b+c)}{\frac{P^2}{s}} = s^2,
\end{aligned}$$

tj.

$$r_ar_b+r_br_c+r_cr_a = s^2. \tag{17}$$

Sada iz (15), (16) i (17) dobivamo:

$$(4R+r)^2 \geqslant 3s^2 \iff 4R+r \geqslant s\sqrt{3}. \tag{18}$$

Zbrajanjem nejednakost (14) u obliku $\dfrac{s}{3\sqrt{3}} \geqslant r$ i nejednakost (18), imamo:

$$4R+r+\frac{s}{3\sqrt{3}} \geqslant r+s\sqrt{3} \iff 4R \geqslant \frac{8s}{3\sqrt{3}} \iff s \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}R.$$

Ovim je nejednakost (13) dokazana.

Jednakost u (13) vrijedi ako i samo ako je $x = y = z \iff r_a = r_b = r_c \iff \dfrac{P}{s-a} = \dfrac{P}{s-b} = \dfrac{P}{s-c} \iff a = b = c$ (jednakostranični trokut).

Zbog nejednakosti (13) imamo nejednakosti:

$$\frac{s}{3r} \leqslant \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}R}{3r} = \frac{\sqrt{3}R}{2r},$$

te

$$\frac{2s}{3R} \geqslant \frac{2 \cdot 3\sqrt{3}r}{3R} = \frac{2\sqrt{3}r}{R},$$

pa sada nejednakost (12) postaje

$$\frac{2\sqrt{3}r}{R} \leqslant \frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma} \leqslant \frac{\sqrt{3}R}{2r}.$$

Dat ćemo još jedno poboljšanje nejednakosti (14) koje glasi

$$s^2 \geqslant \frac{27}{2}Rr. \tag{19}$$

Iz nejednakosti (14) imamo:

$$s^2 \geqslant 27r^2.$$

Sada ćemo dokazati nejednakost:

$$\frac{27}{2}Rr \geqslant 27r^2 \iff \frac{1}{2}Rr \geqslant r^2 \iff Rr \geqslant 2r^2 \iff R \geqslant 2r, \tag{20}$$

a ovo je Eulerova nejednakost koja vrijedi pa je i nejednakost (20) točna, tj. vrijedi i nejednakost (19).

Dokažimo nejednakost (19).

Dokaz. Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja imamo:

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc} \iff (a+b+c)^3 \geqslant 27abc,$$

a odavde zbog $abc = 4RP = 4Rrs$:

$$(2s)^3 \geqslant 27 \cdot 4Rrs \iff 8s^3 \geqslant 27 \cdot 4Rrs \ / \ :4 \iff 2s^2 \geqslant 27Rr,$$

tj.

$$s^2 \geqslant \frac{27}{2}Rr.$$

Dokazat ćemo još nekoliko nejednakosti koje vrijede za $\triangle ABC$.

Nejednakost 1. Vrijedi nejednakost:

$$4r^2 \leqslant \frac{abc}{a+b+c}. \tag{20}$$

Dokaz. Dana nejednakost je zbog $a+b+c = 2s$ i $abc = 4RP = 4Rrs$ ekvivalentna s nejednakošću:

$$4r^2 \leqslant \frac{4Rrs}{2s} \iff 4r^2 \leqslant 2Rr \iff R \geqslant 2r,$$

a ovo je Eulerova nejednakost koja vrijedi, pa je onda točna i nejednakost (20).

Nejednakost 2. Vrijedi nejednakost

$$abc \leqslant (R\sqrt{3})^3. \tag{21}$$

Dokaz 1. Zbog $abc = 4RP = 4Rrs$, dana nejednakost je ekvivalentna sa nejednakošću:

$$\begin{aligned} &4Rrs \leqslant 3\sqrt{3}R^3 \\ \iff &4rs \leqslant 3\sqrt{3}R^2 \iff \text{(zbog nejednakosti (13))} \quad 4r \cdot \frac{3\sqrt{3}R}{2} \leqslant 3\sqrt{3}R^2 \\ \iff &R^2 \geqslant 2Rr \iff R \geqslant 2r, \end{aligned}$$

a ovo je Eulerova nejednakost koja je vrijedi, pa je točna i nejednakost (21).

Dokaz 2. Iz nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja imamo:

$$\begin{aligned} &\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3} \\ \iff &\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{2s}{3} \iff \text{(zbog nejednakosti (13))} \quad \sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{3\sqrt{3}R}{3} \ /\ ^3 \\ \iff &abc \leqslant (R\sqrt{3})^3. \end{aligned}$$

Nejednakost 3. Vrijedi nejednakost:

$$\frac{1}{R^2} \leqslant \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} \leqslant \frac{1}{4r^2}. \tag{22}$$

Dokaz. Dana nejednakost je redom ekvivalentna s:

$$\frac{1}{R^2} \leqslant \frac{a+b+c}{abc} \leqslant \frac{1}{4r^2} \iff \frac{1}{R^2} \leqslant \frac{2s}{4Rrs} \leqslant \frac{1}{4r^2} \iff \frac{1}{R^2} \leqslant \frac{1}{2Rr} \leqslant \frac{1}{4r^2},$$

a ova dvojna nejednakost je točna zbog Eulerove nejednakosti $R \geqslant 2r$. Dakle, nejednakost (22) vrijedi.

Nejednakost 4. Vrijedi nejednakost:

$$36r^2 \leqslant a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 9R^2. \tag{23}$$

Dokaz. Na osnovu nejednakosti između kvadratne i aritmetičke sredine imamo:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geqslant \frac{a+b+c}{3},$$

a odavde zbog nejednakosti (13), tj. $s \geqslant 3\sqrt{3}r$ ili $2s \geqslant 6\sqrt{3}r$ dobivamo:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geqslant 2\sqrt{3}r \ /\ ^2,$$

tj.

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 36r^2.$$

Poznato je da vrijedi jednakost (vidi [1], str. 435–437)

$$|OH|^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2),$$

gdje je točka O centar opisane kružnice, a točka H ortocentar $\triangle ABC$. Pošto je $|OH|^2 \geqslant 0$, slijedi:

$$9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \geqslant 0,$$

tj.

$$a^2+b^2+c^2 \leqslant 9R^2.$$

Nejednakost 5. Vrijedi nejednakost:

$$\frac{\sqrt{3}}{R} \leqslant \frac{9}{2s} \leqslant \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqslant \frac{s}{3Rr} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2r}. \tag{24}$$

Dokaz. Iz nejednakosti između aritmetičke i harmonijske sredine za tri pozitivna broja imamo

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}},$$

a odavde

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{a+b+c},$$

tj.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{2s},$$

odnosno zbog nejednakosti (13), tj. $\frac{1}{s} \geqslant \frac{2}{3\sqrt{3}R}$:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{2s} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{R}.$$

Koristeći poznatu nejednakost

$$(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ca) \quad (a,\ b,\ c \in \mathbb{R})$$

imamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{4s^2}{3} \geqslant ab+bc+ca \\
\iff &\frac{4s^2}{3} \geqslant abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \iff \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqslant \frac{4s^2}{3}\cdot\frac{1}{abc} \\
\iff &\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqslant \frac{4s^2}{3\cdot 4Rrs} \iff \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqslant \frac{s}{3Rr},
\end{aligned}$$

a odavde zbog nejednakosti (13), tj. $s \leqslant \frac{3\sqrt{3}R}{2}$:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqslant \frac{s}{3Rr} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2r}.$$

Napomena. U ovih pet nejednakosti jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostranični.

Literatura

[1] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

[2] Š. Arslanagić, *Matematička čitanka 9*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2017.

[3] O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Geometric inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen (The Netherlands), 1969.