ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. prosinca 2020. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 3/283.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 72.

A) Zadatci iz matematike

3763. Odredi polinom $f(x)$ trećeg stupnja takav da vrijedi

$$f(-1)=0,\ f(1)=4,\ f(2)=3,\ f(3)=16.$$

3764. Nađi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$x^2-16x+9x^2-12xy+72=0.$$

3765. Riješi kvadratnu jednadžbu

$$2(a^3+b^3)x^2-3x+a+b=0,$$

gdje su a i b rješenja jednadžbe

$$x^2-px+\frac{p^2-1}{2}=0.$$

3766. Ako je

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x^2-2x+1}}$$

odredi

$$f(1)+f(3)+f(5)+\ldots+f(999).$$

3767. Odredi sve parove pozitivnih cijelih brojeva (a,b) koji zadovoljavaju jednadžbu

$$100(a+b)=ab-100.$$

3768. Nađi sve pozitivne cijele brojeve n za koje je $-5^4+5^5+5^n$ potpuni kvadrat.

3769. Odredi sva rješenja jednadžbe

$$\log 2+\log(4^{x-2}+9)=1+\log(2^{x-2}+1).$$

3770. Jedan vrh jednakostraničnog trokuta u kartezijevom koordinatnom sustavu je $(2,3)$, a nasuprotna stranica leži na pravcu $x+y=2$. Nađi jednadžbe pravaca na kojima leže druge dvije stranice trokuta.

3771. Neka je ABC jednakokračan trokut ($|AB|=|AC|$) i D točka na $\overline{BC}$ takva da su polumjeri upisane kružnice trokuta ABD i pripisane kružnice trokuta ADC uz stranicu $\overline{CD}$, jednaki. Pokaži da su polumjeri tih kružnica jednaki četvrtini duljine visine trokuta ABC iz vrha B.

3772. U trokutu ABC je $|AB|=28$, $|BC|=21$, $|CA|=14$. Dane su točke D i E na $\overline{AB}$ tako da je $|AD|=7$ i $\sphericalangle ACD=\sphericalangle BCE$. Odredi duljinu $|BE|$.

3773. Dan je četverokut $ABCD$. Konstruiran je četverokut $A_1B_1C_1D_1$ čiji su vrhovi A_1, B_1, C_1, D_1 redom težišta trokuta BCD, CDA, DAB, ABC. Dokaži da ova dva četverokuta imaju zajedničko težište.

3774. Nađi sva rješenja jednadžbe

$$\sin^3 x+\cos^3 x=1.$$

3775. Neka je k pozitivan cijeli broj takav da je $p=3k+1$ prost broj i

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)\cdot 2k}=\frac{m}{n}$$

za neke relativno proste brojeve m i n. Dokaži da p dijeli m.

3776. Tri osobe žele podijeliti određenu svotu novaca tako da prvi dobije jednu polovinu, drugi jednu trećinu, a treći jednu šestinu. Na početku je svaki od njih uzeo neku svotu tog novca tako da nije ostalo ništa. Prvi od njih je vratio jednu polovinu novaca koji je uzeo, drugi je vratio jednu trećinu, a treći jednu šestinu. Zatim je svaki dobio još trećinu ukupno vraćenog novca i tako su podijelili novac kako su željeli na početku. Koliko je novaca na početku svaki od njih uzeo, ako su imali ukupno 846 novčića?

B) Zadatci iz fizike

OŠ – 474. Prosječna duljina koraka odraslog čovjeka se može izračunati po formuli $k=\frac{v}{4}+0.37m$, pri čemu je k duljina koraka u metrima, v je visina čovjeka u metrima, a 4 i $0.37m$ su konstante dobivene analizom. Koliko koraka napravi čovjek visok 184 centimetra kad 45 minuta hoda brzinom 5 kilometara na sat?

OŠ – 475. U seriju su spojeni otpornici od 30 oma, 13 oma i paralela u kojoj su otpornici od 12 oma, 20 oma i 15 oma. Napon izvora je 24 volta. Kolika struja teče kroz svaki otpornik?

OŠ – 476. Dva dječaka vuku sanjke mase 5 kilograma na kojima sjedi djevojčica mase 25 kilograma. Dječaci vuku jednakim silama, a smjer tih sila zatvara sa smjerom gibanja kut od 30 stupnjeva. Koeficijent trenja iznosi 0.1. Kolikim silama dječaci moraju vući da bi se sanjke gibale jednoliko?

OŠ – 477. Šuplja bakrena cijev vanjskog promjera 22 milimetra, a unutarnjeg 20 milimetara košta 50 kuna po metru duljine. Gustoća bakra iznosi $8900\ \mathrm{kg/m^3}$. Kolika je cijena te cijevi po kilogramu bakra?

1735. Niz kosinu nagiba α kolica se gibaju jednoliko, bez ubrzanja. Ako nagib povećamo na 2α, kolica će ubrzavati akceleracijom jednakom 25 % ubrzanja slobodnog pada. Odredi koeficijent trenja kolica i kosine i kut α.

1736. Mjesec je od Zemlje udaljen najmanje 361.8, a najviše 407 tisuća kilometara (udaljenosti su od središta do središta kugli). Odredi prosječnu, najveću i najmanju brzinu gibanja Mjeseca u odnosu na Zemlju. Masa Zemlje je $5.98 \cdot 10^{24}$ kg, a masu Mjeseca i utjecaj Sunca zanemarimo.

1737. Element torij (Th) je u prirodi zastupljen sa samo jednim izotopom (^{232}Th), koji se nakon niza α i β raspada raspadne u olovo (^{208}Pb). Odredi energiju (u MeV) koja se ukupno oslobodi u tom nizu raspada. Mase α-čestice, olova i torija u atomskim jedinicama mase dane su tablicom:

^{4}He	4.002603
^{208}Pb	207.976636
^{232}Th	232.038050

1738. Iz uspravnog, stajaćeg položaja padne na pod dijete mase 15 kg visine 60 cm i odrasla osoba mase 80 kg i visine 180 cm. Koliko je puta više energije oslobođeno padom odrasle osobe u odnosu na pad djeteta? Zanemarujemo razlike u rasporedu tjelesne mase.

1739. Neki čovjek koji stoji na sjevernom polu ima masu 100 kilograma. Ako dođe na ekvator, onda je on radi vrtnje zemlje nešto lakši nego na polu. Koliko je u postotku gubitak njegove težine? (Naputak. Smatramo da je Zemlja idealna kugla polumjera $R = 6378$ km, a iznos ubrzanja sile teže na sjevernom polu $9.83\ \mathrm{m/s^2}$).

1740. U $1\ \mathrm{cm^3}$ nalazi se čisti metan (CH_4), temperature 300 K i pri tlaku 101 325 Pa. Iako je prosječna molekulska masa metana 16 g/mol (12 za ugljik $+4 \cdot 1$ za vodik), rijetki atomi vodika i ugljika su teži od tog prosjeka. Tako je 1.1 % vjerojatnosti da je ugljik težine 13 umjesto 12, a 0.0115 % da je vodik težine 2 umjesto 1. Koliko je prosječno molekula metana u zadanom kubnom centimetru mase 21 g/mol (13 za ugljik $+4 \cdot 2$ za vodik)?

1741. Niz kosinu nagiba α homogena kuglica se kotrlja bez proklizavanja ubrzanjem $2.1\ \mathrm{m/s^2}$. Ako je ubrzanje slobodnog pada $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$, odredi kut kosine (α). Trenje kotrljanja je zanemarivo.

C) Rješenja iz matematike

3735. *Pokaži da je broj* $(835^5 + 6)^{18} - 1$ *djeljiv sa 112.*

Rješenje. Najprije vidimo da je $112 = 16 \cdot 7$, i sada koristeći pravila kongruencije uzmimo:

$$835 \equiv 3 \pmod{16}$$
$$\Longrightarrow\ 835^5 \equiv 3^5 \pmod{16} \equiv 243 \pmod{16}$$
$$\equiv 3 \pmod{16}$$
$$\Longrightarrow\ 835^5 + 6 \equiv 9 \pmod{16};$$
$$(835^5 + 6)^{18} \equiv 9^{18} \pmod{16} \equiv (9^2)^9 \pmod{16},$$

jer je $9^2 \equiv 1 \pmod{16}$ slijedi:

$$(835^5 + 6)^{18} \equiv 1 \pmod{16},$$

tj.

$$(835^5 + 6)^{18} - 1 \equiv 0 \pmod{16}; \qquad (1)$$

$$835 \equiv 2 \pmod 7$$
$$\Longrightarrow\ 835^5 \equiv 2^5 \pmod 7 \equiv 4 \pmod 7$$
$$\Longrightarrow\ 835^5 + 6 \equiv 3 \pmod 7$$

$$\Longrightarrow\ (835^5+6)^{18} \equiv 3^{18} \pmod 7$$
$$\equiv (3^6)^3 \pmod 7 \equiv 729^3 \pmod 7,$$

i opet jer je $729 \equiv 1 \pmod 7$ slijedi:

$$(835^5+6)^{18} \equiv 1 \pmod 7,$$

tj.

$$(835^5+6)^{18} - 1 \equiv 0 \pmod 7. \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) slijedi:

$$(835^5+6)^{18} - 1 \equiv 0 \pmod{112}$$

što se i tvrdilo.

Oliver Kukas (4),
Gimnazija A. G. Matoša, Zabok

3736. *Riješi jednadžbu*

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} = \sqrt[3]{x-8}.$$

Rješenje. Kubiranjem obje strane jednadžbe dobivamo

$$x + 3\sqrt[3]{x(x-16)}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16}) + x - 16$$
$$= x - 8$$
$$x - 8 = -3\sqrt[3]{x(x-16)}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16})$$
$$x - 8 = -3\sqrt[3]{x(x-16)} \cdot \sqrt[3]{x-8}.$$

Jedno rješenje je $x_1 = 8$.

Za $x \neq 8$ imamo

$$\sqrt[3]{(x-8)^2} = -3\sqrt[3]{x^2-16x}.$$

Odavde se sređivanjem dobiva kvadratna jednadžba $7x^2 - 7\cdot 16x + 16 = 0$. Postoje još dva rješenja

$$x_{2,3} = 8 \pm \frac{12\sqrt{21}}{7}.$$

Borna Cesarec (2),
Srednja škola Krapina, Krapina

3737. *Odredi minimum od*

$$\log_{x_1}\left(x_2 - \frac{1}{4}\right) + \log_{x_2}\left(x_3 - \frac{1}{4}\right)$$
$$+ \ldots + \log_{x_n}\left(x_1 - \frac{1}{4}\right)$$

za sve $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)$.

Rješenje. Označimo s

$$L = \log_{x_1}\left(x_2 - \frac{1}{4}\right) + \log_{x_2}\left(x_3 - \frac{1}{4}\right)$$
$$+ \ldots + \log_{x_n}\left(x_1 - \frac{1}{4}\right).$$

Jer je $\left(x_k - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0 \Longrightarrow x_k^2 \geqslant x_k - \frac{1}{4}$, za sve $k = 1, 2, \ldots, n$ i budući da su baze svih logaritama manje od 1, imamo:

$$\log_{x_{k-1}}\left(x_k - \frac{1}{4}\right) \geqslant \log_{x_{k-1}} x_k^2 = 2\cdot\log_{x_{k-1}} x_k,$$
$$k = 2, \ldots, n, n+1, \quad x_1 = x_{n+1}.$$

Dakle, vrijedi:

$$L \geqslant 2(\log_{x_1} x_2 + \log_{x_2} x_3 + \ldots + \log_{x_n} x_1).$$

Svi pribrojnici u zagradi su pozitivni pa možemo primijeniti A-G nejednakost za n pozitivnih brojeva

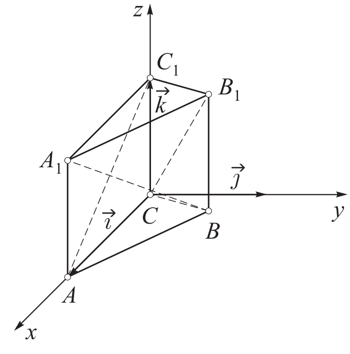
$$L \geqslant 2n\sqrt[n]{\log_{x_1} x_2 \cdot \log_{x_2} x_3 \cdot \ldots \cdot \log_{x_n} x_1}$$
$$= 2n\underbrace{\sqrt[n]{\frac{\log x_2}{\log x_1}\cdot\frac{\log x_3}{\log x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{\log x_1}{\log x_n}}}_{=1} = 2n.$$

Dakle, $L \geqslant 2n$ i jednakost se postiže ako je $x_1 = x_2 = \ldots + x_n = \frac{1}{2}$. Tada se postiže i minimum koji iznosi $L = 2n$.

Oliver Kukas (4), Zabok

3738. *Bočne strane pravilne trostrane prizme* $ABCA_1B_1C_1$ *su kvadrati čije dijagonale su* $\overline{AC_1}$, $\overline{BA_1}$, $\overline{CB_1}$. *Nađi kut između pravaca* AC_1 *i* BA_1, CB_1 *i* AC_1, BA_1 *i* CB_1.

Rješenje. Zadanu pravilnu trostranu prizmu smjestimo u koordinatni sustav kao na slici.



Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je prizma jedinična, tj. svi njeni bridovi su duljine 1. Očito je:

$$A(1,0,0),\ B\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right),\ C(0,0,0),$$

$$A_1(1,0,1),\ B_1\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1\right),\ C_1(0,0,1).$$

Sada je

$$\overrightarrow{AC_1}=-\vec{\imath}+\vec{k},$$

$$\overrightarrow{BA_1}=\frac{1}{2}\vec{\imath}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}+\vec{k},$$

$$\overrightarrow{CB_1}=\frac{1}{2}\vec{\imath}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}+\vec{k},$$

pa računamo po formuli

$$\cos\sphericalangle(\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{BA_1})$$

$$=\frac{|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

$$=\frac{\left|-\frac{1}{2}+1\right|}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+1}}=\frac{1}{4}$$

tj. $\sphericalangle(\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{BA_1})=\arccos\frac{1}{4}$.
Analogno dobivamo da je

$$\sphericalangle(\overrightarrow{CB_1},\overrightarrow{AC_1})=\sphericalangle(\overrightarrow{BA_1},\overrightarrow{CB_1})=\arccos\frac{1}{4}.$$

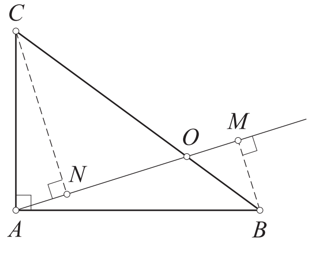
Dakle, kutovi među danim mimosmjernim pravcima su jednaki.

Oliver Kukas (4), Zabok

3739. *Dan je pravokutan trokut ABC s hipotenuzom $\overline{BC}$ i na njoj točka O. Iz B i C povučene su okomice BM i CN na pravac AO. Dokaži jednakost*

$$|AM|^2+|AN|^2=|OM|^2+|ON|^2+2|BO||OC|.$$

Rješenje.



Sa slike vidimo (uz Pitagorin poučak):

$$|BC|=|BO|+|OC|\ /\ ^2$$

$$\begin{aligned}|BC|^2&=|BO|^2+|OC|^2+2|BO||OC|\\&=(|OM|^2+|BM|^2)+(|CN|^2+|ON|^2)\\&\quad+2|BO|\cdot|OC|\\&=|OM|^2+(|AB|^2-|AM|^2)\\&\quad+(|AC|^2-|AN|^2)+|ON|^2|\\&\quad+2|BO||OC|.\end{aligned}$$

Radi $|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2$ imamo

$$|AM|^2+|BN|^2=|OM|^2+|ON|^2+2|BO||OC|$$

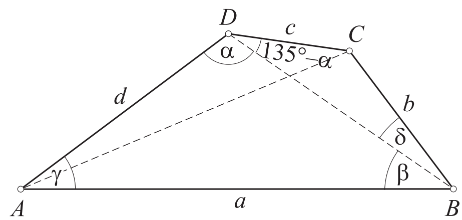
što se i tvrdilo.

Oliver Kukas (4), Zabok

3740. *Neka je $ABCD$ konveksan četverokut u kojem je $\sphericalangle ADC=135^\circ$. Nadalje vrijedi: $\sphericalangle ADB-\sphericalangle ABD=2\sphericalangle DAB=4\sphericalangle CBD$. Ako je $|BC|=\sqrt{2}|CD|$ dokaži $|AB|=|BC|+|AD|$.*

Prvo rješenje. Uz oznake kao na slici uvjete zadatka možemo zapisati:

$$\alpha-\beta=2\gamma=4\delta,\quad b=\sqrt{2}c.$$



Najprije iz sustava

$$\left.\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma&=180^\circ\\\alpha-\beta&=2\gamma\end{aligned}\right\}\implies 3\alpha+\beta=360^\circ\qquad(1)$$

i

$$\begin{aligned}\sphericalangle BCD&=360^\circ-135^\circ-\beta-\gamma-\delta\\&=225^\circ-\beta-\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{4}\\&=225^\circ-\frac{1}{4}(3\alpha+\beta)\overset{(1)}{=}135^\circ.\end{aligned}$$

Koristimo poučak o sinusima više puta:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{d}{\sin\beta}$$

$$\Longrightarrow\ d = \frac{a}{\sin\alpha}\cdot\sin(360^\circ - 3\alpha)$$
$$= -\frac{a}{\sin\alpha}\sin 3\alpha$$
(formula sinusa trostrukog kuta)
$$= (4\sin^2\alpha - 3)a; \qquad (2)$$

$$\frac{|BD|}{\sin 135^\circ} = \frac{b}{\sin(135^\circ-\alpha)}$$
$$\Longrightarrow\ |BD| = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{b}{\sin\alpha+\cos\alpha};$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{|BD|}{\sin\gamma}$$
$$\Longrightarrow\ \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{|BD|}{\sin\gamma}$$
$$\Longrightarrow\ \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b}{\sin\alpha+\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$
$$\Longrightarrow\ \frac{b\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} = a\sin(2\alpha - 180^\circ)$$
$$\Longrightarrow\ \frac{b}{1+\operatorname{ctg}\alpha} = -a\sin 2\alpha$$
$$\Longrightarrow\ b = -2a\sin\alpha\cos\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha). \qquad (3)$$

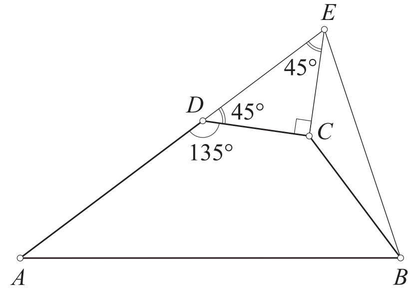
Još je $\dfrac{b}{\sin(135^\circ-\alpha)} = \dfrac{c}{\sin\delta}$

$$\Longrightarrow\ \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)} = \frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{4}}$$
$$\Longrightarrow\ \frac{1}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha) = \sin(\alpha - 90^\circ)$$
$$\Longrightarrow\ \sin\alpha+\cos\alpha = -2\cos\alpha$$
$$\Longrightarrow\ \operatorname{tg}\alpha = -3. \qquad (4)$$

Sada iz (2) i (3) lako izračunamo $d = \frac{3}{5}a$ i $b = \frac{2}{5}a$, pa je $b + d = a$, što se i tvrdilo u zadatku.

Oliver Kukas (4), Zabok

Drugo rješenje. Spustimo okomicu $\overline{CE}$ na $\overline{CD}$ koja siječe pravac AD u točki E. Tada je $\triangle CDE$ jednakokračan pravokutan trokut s hipotenuzom $\overline{DE}$. Tada je $|DE| = |CD|\sqrt{2}$, a kako je $|BC| = |CD|\sqrt{2}$, to je $|BC| = |DE|$.



Treba dokazati da je
$$|AB| = |BC| + |AD| = |DE| + |AD| = |AE|.$$
Dakle, dovoljno je pokazati $|AB| = |AE|$. Drugim riječima dovoljno je pokazati da je $\measuredangle ABE = \measuredangle BEA$. Iz danog uvjeta imamo

$$\measuredangle ADB = \measuredangle ABD + 2\measuredangle DAB$$
$$= 180^\circ - \measuredangle ADB + \measuredangle DAB$$
$$\Longrightarrow \measuredangle ADB = 90^\circ + \frac{1}{2}\measuredangle DAB$$
$$\measuredangle CDB = 135^\circ - \measuredangle ADB$$
$$= 135^\circ - 90^\circ - \frac{1}{2}\measuredangle DAB$$
$$= 45^\circ - \frac{1}{2}\measuredangle DAB$$
$$\measuredangle BCD = 180^\circ - \measuredangle CDB - \measuredangle CBD$$
$$= 180^\circ - 45^\circ + \frac{1}{2}\measuredangle DAB - \frac{1}{2}\measuredangle DAB = 135^\circ$$
$$\Longrightarrow \measuredangle BCE = 360^\circ - \measuredangle DCE - \measuredangle BCD = 135^\circ.$$

Nadalje, $\measuredangle CBD = \measuredangle CBE$ radi sukladnosti trokuta $\triangle BCE$ i $\triangle BCD$ (dvije stranice i kut među njima)

$$\measuredangle BEA = 45^\circ + \measuredangle BEC$$
$$= 45^\circ + 180^\circ - \measuredangle BCE - \measuredangle CBE$$
$$= 45^\circ + 180^\circ - 135^\circ + \frac{1}{2}\measuredangle DAB$$
$$\measuredangle ABE = \measuredangle ABD + 2\measuredangle CBD = \measuredangle ABD + \measuredangle DAB$$
$$= 180^\circ - \measuredangle ADB - \measuredangle DAB + \measuredangle DAB$$
$$= 180^\circ - 90^\circ - \frac{1}{2}\measuredangle DAB$$
$$= 90^\circ - \frac{1}{2}\measuredangle DAB$$
$$\Longrightarrow \measuredangle BEA = \measuredangle ABE.$$

Ur.

3741. *Dan je jednakokračan trokut ABC tako da je $|AB| = |AC| = b$, $|BC| = a$ i vrijedi $a^3 + b^3 = 3ab^2$. Dokaži da je $\sphericalangle CAB = 20°$ ili $100°$.*

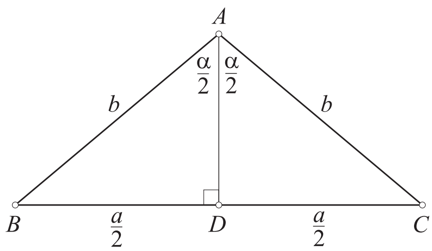
Rješenje. Kako je $|AB| = |AC| = b$, $|BC| = a$ i $a^3+b^3 = 3ab^2$ iz pravokutnog trokuta BDA slijedi $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\frac{a}{2}}{b} = \dfrac{a}{2b} \implies \dfrac{a}{b} = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}$.
Podijelimo li jednadžbu $a^3 + b^3 = 3ab^2$ s ab^2 dobit ćemo

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b}{a} = 3,$$

odnosno $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 + \dfrac{b}{a} = 3$. U jednadžbi $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 + \dfrac{b}{a} = 3$ zamijenimo $\dfrac{a}{b} = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}$ i $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$, pa je

$$\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = 3$$

$$8\sin^3\frac{\alpha}{2} - 6\sin\frac{\alpha}{2} + 1.$$



Koristit ćemo identitet

$$\sin^3 t = \frac{1}{4}(3\sin t - \sin 3t).$$

Dobivamo

$$8\cdot\frac{1}{4}\left(3\sin\frac{\alpha}{2} - \sin 3\cdot\frac{\alpha}{2}\right) - 6\sin\frac{\alpha}{2} + 1 = 0$$

$$\sin\frac{3\alpha}{2} = \frac{1}{2}.$$

Odavde je

1) $3\cdot\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\pi}{6}$, $\alpha = \dfrac{\pi}{9}$, $\alpha = 20°$

2) $3\cdot\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{5\pi}{6}$, $\alpha = \dfrac{5\pi}{9}$, $\alpha = 100°$.

Prema tome $\sphericalangle CAB = 20°$ ili $100°$.

Borna Cesarec (2), Krapina

3742. *Dan je pravokutan trokut ABC, $\sphericalangle CAB = 90°$. Neka je I središte upisane mu kružnice, a D i E su redom sjecišta pravaca BI i CI s AC i AB. Dokaži da vrijedi*

$$\frac{|BI|^2 + |ID|^2}{|CI|^2 + |IE|^2} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}.$$

Rješenje. Iz $\triangle EBI \implies \sin\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{r}{|BI|}$,

$$|BI| = \frac{r}{\frac{\beta}{2}}.$$

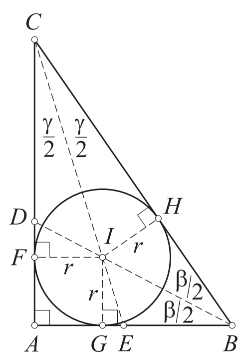
Iz $\triangle IDF$ $\left(\sphericalangle IDF = 90° - \dfrac{\beta}{2}\right)$

$\implies \sin\left(90° - \dfrac{\beta}{2}\right) = \dfrac{r}{|ID|}$, $|ID| = \dfrac{r}{\cos\frac{\beta}{2}}$.

Iz $\triangle CIH \implies \sin\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{r}{|CI|}$, $|CI| = \dfrac{r}{\sin\frac{\gamma}{2}}$.

Iz $\triangle IGE$ $\left(\sphericalangle IGE = 90° - \dfrac{\gamma}{2}\right)$

$\implies \sin\left(90° - \dfrac{\gamma}{2}\right) = \dfrac{r}{|IE|}$, $|IE| = \dfrac{r}{\cos\frac{\gamma}{2}}$.



Sada je

$$\frac{|BI|^2 + |ID|^2}{|CI|^2 + |IE|^2} = \frac{\dfrac{r^2}{\sin^2\frac{\beta}{2}} + \dfrac{r^2}{\cos^2\frac{\beta}{2}}}{\dfrac{r^2}{\sin^2\frac{\gamma}{2}} + \dfrac{r^2}{\cos^2\frac{\gamma}{2}}}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\sin^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}}}{\dfrac{1}{\sin^2\frac{\gamma}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}}} = \frac{\sin^2\frac{\gamma}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}}{\sin^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}}$$

$$= \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\beta} = \frac{|BC|^2\sin^2\gamma}{|BC|^2\sin^2\beta} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}$$

čime smo gotovi.

Oliver Kukas (4), Zabok

3743. *Ako je r polumjer upisane kružnice trokuta i s njegov poluopseg, dokaži nejednakost*

$$s^2 \geq 27r^2.$$

Rješenje. Za pozitivne brojeve $a+b-c$, $b+c-a$, $c+a-b$ gdje su a, b i c stranice promatranog trokuta, primijenimo li A-G nejednakost imamo:

$$\frac{(a+b-c)+(b+c-a)+(c+a-b)}{3}$$

$$\geqslant \sqrt[3]{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} \quad \Big/ \ ^3$$

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geqslant (a+b-c)(b+c-a) \cdot (c+a-b)$$

$$(a+b+c)^4 \geqslant 27(a+b+c)(a+b-c) \cdot (b+c-a)(c+a-b)$$

$$(2s)^4 \geqslant 27 \cdot 2s \cdot 2(s-a) \cdot 2(s-b) \cdot 2(s-c)$$

$$s^4 \geqslant 27 \cdot s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Koristeći Heronovu formulu dobivamo

$$s^4 \geqslant 27 \cdot P^2,$$

a iz formule $P = r \cdot s$ imamo

$$s^4 \geqslant 27 \cdot r^2 s^2 \ / \ : s^2$$

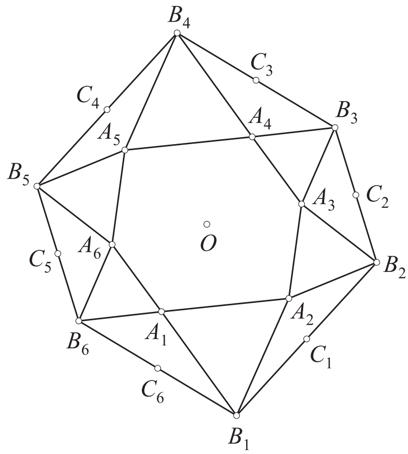
$$s^2 \geqslant 27 \cdot r^2,$$

što je i trebalo dokazati.

Filip Vučić (1),
XV. gimnazija, Zagreb

3744. *Na stranicama šesterokuta koji ima središte simetrije, konstruirani su izvana jednakostranični trokuti. Vrhovi tih trokuta, koji nisu vrhovi početnog šesterokuta, vrhovi su novog šesterokuta. Dokaži da su polovišta stranica tog šesterokuta vrhovi pravilnog šesterokuta.*

Rješenje. Promatrajmo problem u kompleksnoj ravnini i neka je ishodište O središte simetrije. Vrhovi šesterokuta neka označavaju ujedno kompleksne brojeve koji pripadaju tim vrhovima.



Neka je $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ dani šesterokut u smjeru suprotnom od kazaljke na satu. Vrijedi $A_i = -A_{i+3}$, $i = 1, 2, \ldots, 6$, $A_i = A_{i+6}$. Dani trokuti su $A_1A_2B_1$, $A_2A_3B_2$, $A_3A_4B_3$, $A_4A_5B_4$, $A_5A_6B_5$, $A_6A_1B_6$. Točke C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 su polovišta dužina $\overline{B_1B_2}$, $\overline{B_2B_3}$, $\overline{B_3B_4}$, $\overline{B_4B_5}$, $\overline{B_5B_6}$, $\overline{B_6B_1}$, tim redom. Točka B_1 se dobije rotacijom A_2 oko A_1 za $-\frac{\pi}{3}$,

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 + e^{-\frac{i\pi}{3}}(A_2 - A_1) \\ &= \left(1 - e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)A_1 + e^{-\frac{i\pi}{3}}A_2 \\ &= e^{\frac{i\pi}{3}}A_1 + e^{-\frac{i\pi}{3}}A_2. \end{aligned}$$

Slično je

$$B_2 = e^{\frac{i\pi}{3}}A_2 + e^{-\frac{i\pi}{3}}A_3,$$
$$B_3 = e^{\frac{i\pi}{3}}A_3 + e^{-\frac{i\pi}{3}}A_4.$$

Slijedi

$$C_1 = \frac{B_1 + B_2}{4} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{i\pi}{3}}A_1 + A_2 + e^{-\frac{i\pi}{3}}A_3\right)$$

$$C_2 = \frac{B_2 + B_3}{4} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{i\pi}{3}}A_2 + A_3 + e^{-\frac{i\pi}{3}}A_4\right).$$

Ako rotiramo C_1 u smjeru suprotnom od kazaljke na satu za $\frac{\pi}{3}$ dobijemo točku s koordinatama

$$\frac{1}{2}\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}A_1+e^{\frac{i\pi}{3}}A_2+A_3\right).$$

Ovo je jednako C_2 jer je $A_4=-A_1$, zbog simetrije i $e^{i\frac{2\pi}{3}}=-e^{-\frac{i\pi}{3}}$.

Isto vrijedi za C_i i C_{i+1} za $i=2,3,\ldots,6$.

Dakle, $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$ je pravilni šesterokut sa središtem u ishodištu.

Ur.

3745. *Dokaži da za svaki prirodan broj* $n\geq 3$ *vrijedi nejednakost*

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}<\frac{3}{2}-\frac{1}{n}.$$

Prvo rješenje.

Dokaz matematičkom indukcijom.

Za $n=3$ je

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}&=1+\frac{1}{8}+\frac{1}{20}\\&=\frac{251}{8\cdot 27}<\frac{3}{2}-\frac{1}{3}=\frac{7}{6}\\&\Longrightarrow 251<256.\end{aligned}$$

Pretpostavimo da za neki $n\geqslant 3$ tvrdnja vrijedi. Tada je

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{(n+1)^3}\\<\frac{3}{2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^3}.\end{aligned}$$

Dovoljno je pokazati da vrijedi

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^3}<\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}$$

što je ekvivalentno s

$$\frac{1}{(n+1)^3}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)},$$

a ovo vrijedi.

Filip Vučić (1), Zagreb

Drugo rješenje. Stavimo

$$a_n=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}$$

i $b_n=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{n}$.

Najprije je

$$\begin{aligned}a_3&=1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}=\frac{251}{216}\\&\approx 1.162<1.1\dot{6}\\&=\frac{7}{6}=\frac{3}{2}-\frac{1}{3}=b_3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n-b_{n-1}&=\frac{3}{2}-\frac{1}{n}-\frac{3}{2}+\frac{1}{n-1}\\&=\frac{1}{n(n-1)}>\frac{1}{n^3}\\&=a_n-a_{n-1},\ n\geqslant 3.\end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}a_n&=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})\\&\quad+\ldots+(a_2-a_1)+a_1\\&<(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})\\&\quad+\ldots+(b_2-b_1)+b_1\\&=b_n,\quad \text{za } n\geqslant 3,\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Oliver Kukas (4), Zabok

3746. *Dokaži da za svaki pozitivan cijeli broj* n *vrijedi jednakost*

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n+1}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\operatorname{tg}\frac{n\pi}{2n+1}=\sqrt{2n+1}.$$

Rješenje. Neka su

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+i\sin\frac{2k\pi}{2n+1},$$

$k=0,1,\ldots,2n$ svi $(2n+1)$-i korijeni iz jedinice. Tada je $\varepsilon_0=1$ i

$$\overline{\varepsilon}_k=\cos\frac{2k\pi}{2n+1}-i\sin\frac{2k\pi}{2n+1}.$$

Sada je:

$$\begin{aligned}x^{2n+1}-1&=(x-1)\prod_{k=1}^{n}(x-\varepsilon_k)(x-\overline{\varepsilon}_k)\\&=(x-1)\prod_{k=1}^{n}(x^2-(\varepsilon_k+\overline{\varepsilon}_k)x+\varepsilon_k\overline{\varepsilon}_k)\\&=(x-1)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1\right)\end{aligned}$$

ili

$$\frac{x^{2n+1}-1}{x-1}=\prod_{k=1}^{n}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1\right)$$

$$\Longrightarrow x^{2n}+x^{2n-1}+\ldots+x^2+x+1$$
$$=\prod_{k=1}^{n}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1\right). \qquad (1)$$

Sada u dobiveni izraz (1) uvrstimo $x=1$, pa dobivamo:

$$2n+1=\prod_{k=1}^{n}\left(2-2\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$$
$$2n+1=2^n\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(1-\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$$
$$\prod_{k=1}^{n}\left(2\cdot\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)=\frac{2n+1}{2^n}$$
$$\prod_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{2n+1}{2^{2n}}$$
$$\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}. \qquad (2)$$

Sada u izraz (1) uvrstimo $x=-1$ i dobivamo:

$$1=\prod_{k=1}^{n}\left(1+2\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1\right)$$
$$1=\prod_{k=1}^{n}\left(2+2\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$$
$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right)=\frac{1}{2^n}$$
$$\prod_{k=1}^{n}\left(2\cdot\cos^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)=\frac{1}{2^n}$$
$$\prod_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^{2n}}$$
$$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^n}. \qquad (3)$$

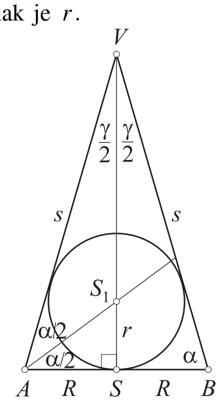
Konačno, dijeljenjem izraza (2) i (3) slijedi traženo:

$$\prod_{k=1}^{n}\operatorname{tg}\frac{k\pi}{2n+1}=\sqrt{2n+1}.$$

Oliver Kukas (4), Zabok

3747. *Osni presjek stošca je jednakokračan trokut kojemu je kut uz bazu jednak α. Polumjer upisane mu kružnice je r. Odredi volumen stošca.*

Rješenje. Na slici je prikaz osnog presjeka uspravnog stošca kojemu je kut uz bazu jednak α. Polumjer upisane kružnice jednakokračnog trokuta jednak je r.



Iz trokuta ASS_1 je $\frac{a}{2}=R$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{R}\Longrightarrow R=\frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. Iz trokuta ASV je $\operatorname{tg}\alpha=\frac{h}{R}$, $h=R\operatorname{tg}\alpha$. Kako je $R=\frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$ slijedi $h=\frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\operatorname{tg}\alpha$. Obujam stošca jednak je:

$$V=\frac{1}{3}Bh=\frac{1}{3}R^2\pi h$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\right)^2\pi\frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\operatorname{tg}\alpha$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{r^3}{\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}\operatorname{tg}\alpha.$$

Borna Cesarec (2), Krapina

3748. *Ako je p prost broj dokaži da je $\binom{2p}{p}\equiv 2\pmod{p}$.*

Prvo rješenje. Primijetimo da vrijedi

$$1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(p-1)$$
$$\equiv(p+1)(p+2)\cdot\ldots\cdot(2p-1)\pmod{p}.$$

Svaki faktor je relativno prost s p, pa je

$$1\equiv\frac{(p+1)(p+2)\cdot\ldots\cdot(2p-1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(p-1)}\pmod{p}.$$

Dakle,

$$\frac{(p+1)(p+2)\cdot\ldots\cdot(2p-1)\cdot 2p}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(p-1)\cdot p}\equiv 2 \pmod p$$

tj. $\binom{2p}{p}\equiv 2 \pmod p$.

Ur.

Drugo rješenje. Dokazat ćemo i više

$$\binom{2p}{p}\equiv 2 \pmod{p^2}.$$

Za svaki realan broj x je

$$(1+x)^p\cdot(1+x)^p=(1+x)^{2p}.$$

Razvojem po binomnom poučku i izjednačavanjem koeficijenata uz x^p dobivamo:

$$1+\binom{p}{1}\binom{p}{p-1}+\binom{p}{2}\binom{p}{p-2}$$
$$+\ldots+\binom{p}{p-1}\binom{p}{1}+1=\binom{2p}{p}$$
$$\binom{2p}{p}-2=\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p}{i}^2,$$

jer je $\binom{p}{i}=\binom{p}{p-i}$.

Kako je p prost broj, svaki od brojeva

$$\binom{p}{i}=\frac{p(p-1)\ldots(p-i+1)}{i!}$$

je djeljiv s p jer se u nazivniku ne pojavljuje prost broj p. Prema tome, zbroj $\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p}{i}^2$ je djeljiv s p^2 i tvrdnja je dokazana.

Oliver Kukas (4), Zabok

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 466. *Automobil Tesla P100 Ludicrous je prije tri godine zadivio svijet automobilske industrije svojim nečujnim ubrzavanjem iz mirovanja do brzine 60 milja na sat za 2.28 sekundi. Masa automobila s vozačem je 2300 kilograma. Jedna milja ima 1.6 kilometara. Izračunaj snagu tog automobila.*

Rješenje.

$v=60\ \frac{\text{milja}}{\text{h}}=96\ \frac{\text{km}}{\text{h}}=\frac{80}{3}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$t=2.28$ s

$m=2300$ kg

$P=?$

$$a=\frac{v}{t}=\frac{\frac{80\ \text{m}}{3\ \text{s}}}{2.28\ \text{s}}=11.6959\ \text{m/s}^2$$

$$F=am=11.6959\ \text{m/s}^2\cdot 2300\ \text{kg}$$
$$=26\,900\ \text{N}$$

$$s=\frac{a}{2}t^2=30.4\ \text{m}$$

$$W=Fs=26\,900\ \text{N}\cdot 30.4\ \text{m}=817\,760\ \text{J}$$

$$P=\frac{W}{t}=\frac{817\,760\ \text{J}}{2.28\ \text{s}}=358\,666.7\ \text{W}$$
$$=358.7\ \text{kW}.$$

Antonija Glasnović (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 467. *Saonice se spuštaju niz snježnu padinu visoku 20 i dugačku 60 metara. Nakon toga slete na ravni dio po kojem se gibaju 40 metara dok ne stanu. Koeficijent trenja na padini je tri puta manji nego na ravnom dijelu. Koliki su ti koeficijenti?*

Rješenje.

$h=20$ m

$s_1=60$ m

$s_2=40$ m

$\mu_2=3\mu_1$

$\mu_1,\ \mu_2=?$

$$E_{gp}-F_{\text{tr}_1}s_1=F_{\text{tr}_2}s_2$$

$$E_{gp}=F_{\text{tr}_1}s_1+F_{\text{tr}_2}s_2$$

$$mgh=\mu_1 mgs_1+\mu_2 mgs_2$$

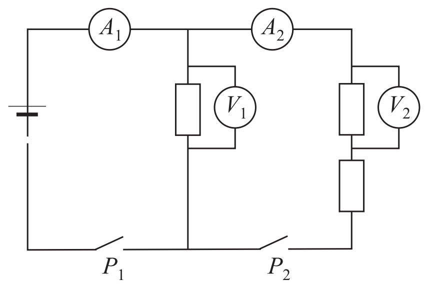
$$h=\mu_1 s_1+3\mu_1 s_2=\mu_1(s_1+3s_2)$$

$$\mu_1=\frac{h}{s_1+3s_2}$$
$$=\frac{20\ \text{m}}{60\ \text{m}+3\cdot 40\ \text{m}}=\frac{20\ \text{m}}{180\ \text{m}}=\frac{1}{9}$$

$$\mu_2=3\mu_1=\frac{1}{3}.$$

Porin Kotnik (8),
OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 468. *Svi otpornici na slici su jednaki. Izvor ima napon 12 V. Kad su oba prekidača zatvorena ampermetar* A_1 *pokazuje 0.6 ampera. Koliko pokazuju ostali instrumenti? Koliko će pokazivati svi instrumenti kad se prekidač* P_2 *otvori?*



Rješenje.

$U = 12$ V

$I_1 = 0.6$ A

$\underline{I_2,\ U_1,\ U_2 = ?}$

$I_1',\ I_2',\ U_1',\ U_2' = ?$

Prvi ampermetar mjeri struju u glavnom vodu koja se raspodjeljuje tako da je struja kroz lijevu granu s jednim otpornikom dvostruko veća od struje kroz granu s dva otpornika jer je struja obrnuto proporcionalna s otporom, dakle kroz lijevu će granu teći struja od 0.4 A, a kroz desnu od 0.2 A:

$$I_2 = 0.2 \text{ A}, \quad U_1 = 12 \text{ V}$$

jer je u toj grani samo jedan otpornik i desna grana dobiva 12 volti, ali drugi voltmetar mjeri napon na jednom od dva jednaka otpornika od kojih svaki dobiva pola napona izvora, dakle $U_2 = 6$ V.

Kad je otvoren samo prekidač P_1 kroz desnu granu ne teče struja pa je $I_2' = 0$, $U_2' = 0$.

U lijevoj se grani ništa ne mijenja: $U_1' = 12$ V, $I_1' = 0.4$ A.

Porin Kotnik (8), Zagreb

OŠ – 469. *Konvergentna leća stvara prividnu sliku udaljenu 30 cm od leće. Slika je dvostruko veća od predmeta. Kolika je jakost te leće?*

Rješenje.

$b = 30$ cm

$\underline{y = 3x}$

$j = ?$

$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$

$a = \frac{xb}{y} = \frac{xb}{3x} = \frac{b}{3} = 10$ cm

$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{10\text{ cm}} + \frac{1}{30\text{ cm}} = \frac{3+1}{30\text{ cm}}$

$f = \frac{30}{4}$ cm $= 7.5$ cm $= 0.075$ m

$j = \frac{1}{f} = \frac{1}{0.075\text{ m}} = 13.3\text{ m}^{-1}$.

Antonija Glasnović (8), Zagreb

1721. *Olovna kugla mase 2 kg rotira jednoliko usporeno. U poslijednjih 8 sekundi do zaustavljanja kugla se okrenula točno 5 puta. Odredi kutno ubrzanje i moment sile koji je djelovao na kuglu. Gustoća olova je 11.3* g/cm^3.

Rješenje. Za jednoliko ubrzano pravocrtno gibanje vrijede izrazi

$$s = v_0 t + \frac{a}{2}t^2,$$

$$v = v_0 + at,$$

pa za jednoliko ubrzano kružno gibanje vrijede analogni izrazi

$$\theta = \omega_0 t + \frac{\alpha}{2}t^2,$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t.$$

Iz uvjeta da se kugla u $t = 8$ s zaustavi, donja jednadžba glasi $0 = \omega_0 + \alpha \cdot 8$. Uvrštavanjem ω_0 u gornju jednadžbu daje:

$$\theta = -\frac{\alpha}{2} \cdot 8^2,$$

kako se kugla 5 puta okrenula, $\theta = 5 \cdot 2\pi = 10\pi$, slijedi

$$\alpha = -\frac{5\pi}{16}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Izraz za moment sile analogan je 2. Newtonovom zakonu,

$$F = ma,$$

$$M = I\alpha,$$

gdje je $I = \frac{2}{5}mR^2$ moment tromosti kugle. Polumjer R izračunamo iz gustoće i mase kugle kao:

$$R = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}} = 3.483 \text{ cm}.$$

Uvrštavanjem dobijemo

$$I = 0.0009705 \text{ kg m}^2,$$
$$M = 0.0009528 \text{ Nm}.$$

Filip Vučić (1),
XV. gimnazija, Zagreb

1722. *Satelit se giba oko Zemlje tako da mu je kutna brzina dvostruko veća u perigeju (najbližoj) nego u apogeju (najdaljoj) točki putanje. Ako je ophodno vrijeme satelita 6 sati, izračunaj kojim se rasponom brzina satelit giba u odnosu na Zemlju i koliki je ekscentricitet njegove putanje. Masa Zemlje je* $6 \cdot 10^{24}$ *kg.*

Rješenje. Veliku poluos elipse putanje izračunamo iz 3. Keplerovog zakona:

$$a^3 = T^2 \frac{GM_Z}{4\pi^2}$$
$$= 4.73244 \cdot 10^{14},$$
$$a = 16\,789\,138 \text{ m}.$$

Kutnu brzinu ω izrazimo preko linearne brzine i udaljenosti i uvrstimo u $\omega_{\max} = 2\omega_{\min}$:

$$\omega_{\max} = \frac{v_{\max}}{r_{\min}} = 2\frac{v_{\min}}{r_{\max}},$$
$$v_{\max} r_{\max} = 2 v_{\min} r_{\min}.$$

Općenito, najveću i najmanju brzinu na eliptičnoj putanji možemo izraziti preko prosječne ($\overline{v}$) brzine i minimalne i maksimalne udaljenosti:

$$v_{\max} = \overline{v}\sqrt{\frac{r_{\max}}{r_{\min}}},$$
$$v_{\min} = \overline{v}\sqrt{\frac{r_{\min}}{r_{\max}}}.$$

Uvrstimo to u odnos kutnih brzina i odatle je

$$r_{\max}^2 = 2r_{\min}^2.$$

Kako je i $r_{\max} + r_{\min} = 2a$, dobivamo

$$r_{\max} = 19\,669\,699 \text{ m},$$
$$r_{\min} = 13\,908\,577 \text{ m}.$$

Numerički ekscentricitet putanje je

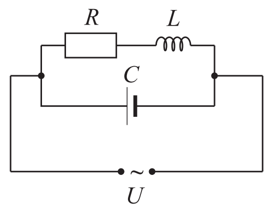
$$\varepsilon = \frac{r_{\max}}{a} - 1 = (\sqrt{2} - 1)^2 = 0.171573,$$

a raspon brzina odredimo iz

$$\overline{v} = \frac{2a\pi}{T} = 4883.76 \text{ m/s}.$$
$$v_{\max} = 5807.805 \text{ m/s},$$
$$v_{\min} = 4106.738 \text{ m/s}.$$

Ur.

1723. *Koliki treba biti kapacitet spojenog kondenzatora da bi strujni krug na slici bio u rezonanciji pri frekvenciji 500 Hz, ako je* $R = 20\ \Omega$, $L = 10$ *mH i* $U = 220$ *V?*



Rješenje. Ako s iX_L označimo induktivni otpor zavojnice, a s $-iX_C$ kapacitivni otpor kondenzatora, ukupan otpor (impedanciju) strujnog kruga izrazimo pomoću tih veličina kao:

$$Z = \frac{(R + iX_L)(-iX_C)}{R + iX_L - iX_C}.$$

Uvjet rezonancije možemo matematički izraziti tako da imaginarni dio Z izjednačimo s nulom,

$$\operatorname{Im}(Z) = \operatorname{Im}\left(\frac{-iX_CR+X_LX_C}{R+i(X_L-X_C)} \cdot \frac{R-iX_L+iX_C}{R-iX_L+iX_C}\right)$$
$$= \frac{-X_CR^2 - X_L^2X_C + X_LX_C^2}{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 0.$$

Nazivnik zanemarimo, a brojnik podijelimo s X_C pa dobijemo

$$-R^2 - X_L^2 + X_LX_C = 0,$$
$$X_C = X_L + \frac{R^2}{X_L}.$$

Uvrstimo $R = 20\ \Omega$ i $X_L = 2\pi f \cdot L = 31.416\ \Omega$ i dobijemo

$$X_C = 44.148\ \Omega.$$

Kako je $X_C = \frac{1}{2\pi f \cdot C}$, slijedi

$$C = 3.1416 \text{ mF}.$$

Ur.

1724. *Smjesu vode i alkohola zagrijali smo u kalorimetru dovodeći toplinu 12 000 J, pri čemu je temperatura porasla za* $8\,^\circ C$. *Ako je u smjesi bilo 2 dl vode, koliko je bilo alkohola? Gubitke topline zanemari, a specifični toplinski kapacitet vode je* $4190\ J/kgK$, *alkohola* $2500\ J/kgK$. *Gustoća vode je* $1\ kg/l$, *a alkohola* $0.789\ kg/l$.

Rješenje. Iz količine topline i porasta temperature možemo odrediti ukupni toplinski kapacitet smjese, $m_v c_v + m_a c_a$:

$$m_v c_v + m_a c_a = \frac{Q}{\Delta T} = \frac{12\,000}{8} = 1500 \text{ J/K}.$$

Kako imamo zadano m_v, c_v i c_a, odatle izračunamo masu alkohola, m_a:

$$0.2 \cdot 4190 + m_a \cdot 2100 = 1500,$$

$$m_a = 0.2648 \text{ kg}.$$

Iz gustoće alkohola izračunamo i volumen,

$$V_a = \frac{m_a}{\rho_a} = \frac{0.2648}{0.789} = 0.3356 \text{ litara}.$$

Borna Cesarec (2),
Srednja škola Krapina, Krapina

1725. *Automobil mase 900 kg penje se jednolikom brzinom* $50\ km/h$ *uz uzbrdicu nagiba* 9°. *Ako je koeficijent trenja s podlogom 0.09, odredi trenutnu snagu motora.*

Rješenje. Iz 2. Newtonovog zakona za silu F koja vuče automobil vrijedi

$$F - F_{tr} - mg\sin\alpha = ma.$$

S obzirom da se automobil giba jednoliko, $a = 0$ i imamo

$$F = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha),$$

$$F = 900 \cdot 9.81 \cdot (\sin 9^\circ + 0.09\cos 9^\circ),$$

$$F = 2166 \text{ N}.$$

Snaga pri djelovanju konstantne sile iznosi

$$P = F \cdot v = \frac{2166 \cdot 50}{3.6} = 30083 \text{ W} \approx 30 \text{ kW}.$$

Borna Cesarec (2), Krapina

1726. *Sabirna leća jačine +4.5 dpt. načinjena je od stakla indeksa loma 1.52. Ako je debljina stakla na optičkoj osi 5 mm, odredi debljinu stakla na rubu udaljenom 2.5 cm od optičke osi.*

Rješenje. Uzmimo radi jednostavnosti tanku plankonveksnu leću (s jednim ravnim dioptrom), za koju izrazimo jačinu preko radijusa zakrivljenosti:

$$J = \frac{n-1}{R}$$

$$R = \frac{n-1}{J} = 0.115555 \text{ m} = 115.555 \text{ mm}.$$

Ako traženu debljinu leće na $h = 25$ mm od optičke osi označimo s d, a debljinu na optičkoj osi s $d_0 = 5$ mm, imamo pravokutan trokut s katetama h, $R - d_0$ i hipotenuzom $R - d$, pa je $(R-d)^2 = (R-d_0)^2 + h^2$, nakon kraćenja R^2 i uvrštavanja d_0 i h dobivamo

$$-2Rd + d^2 = -10R + 5^2 + 25^2.$$

Samo rješenje manje od 5 mm je fizikalno prihvatljivo za ovu leću, a to je za ovu kvadratnu jednadžbu $d = 2.208$ mm.
Napomena. Za drugačiji oblik leće dobili bi neznatno drugačiji broj, no ionako račun vrijedi jedino u aproksimaciji tankih leća, tj. $d, d_0 \ll R_1, R_2$, što je u rezultatu ispunjeno $(2.208,\ 5 \ll 115.555,\ \infty)$.

Ur.

1727. *Element kalij sadrži 0.012 % radioaktivnog* ^{40}K, *vremena poluraspada 1.277 milijardi godina. Koliki je bio udio* ^{40}K *pri formiranju Zemlje, prije 4.5 milijardi godina? Koliko je puta radioaktivnost kalija tada bila veća nego danas?*

Rješenje. Za radioaktivni raspad vrijedi

$$m(t) = m_0 e^{-\lambda t} = 2^{-t/T},$$

gdje je T vrijeme poluraspada, a za male učestalosti u stabilnom uzorku, masa je proporcionalna učestalosti, tj.

$$w(t) = w_0 2^{-t/T}.$$

Uvrstimo li $w(t) = 0.012$ % i $t/T = 4.5/1.277$ dobit ćemo

$$0.012 = w_0 \cdot 2^{-4.5/1.277},$$

$$w_0 = 0.138 \text{ \%}.$$

Pri formiranju Zemlje radioaktivnost kalija bila je $\frac{w_0}{w(t)} = 2^{\frac{4.5}{1.277}} = 11.5$ puta veća nego danas.

Filip Vučić (1), Zagreb