ZANIMLJIVOSTI

Školsko (gradsko) natjecanje iz matematike, 27. siječnja 2020.

Školsko natjecanje prva je razina natjecanja iz matematike za koju zadatke sastavlja Državno povjerenstvo za matematička natjecanja. Školska natjecanja su održana diljem Hrvatske 27. siječnja 2020. Svi učenici rješavali su po sedam zadataka. Prvih pet su lakši i svaki se bodovao s po 6 bodova, a zadnja dva su teža i svaki je vrijedio 10 bodova. Za učenike srednjih škola natjecanje je trajalo tri sata.

Zadatci – A varijanta

I. razred

1. Odredi zbroj svih znamenaka dekadskog zapisa broja $(10^{2020}+2020)^2$.

2. Neka su x i y realni brojevi takvi da vrijedi $x+y=1$ i $x^3+y^3=13$. Koliko je x^2+y^2?

3. Dino, Pino i Tino idu u isti vrtić. Za igru svaki dječak treba dvije kockice iste boje, ali nije nužno da kockice koje imaju različiti dječaci budu različite boje. Odgojiteljica u jednoj ladici ima crvene, plave i zelene kockice. Ako izvlači bez gledanja, koliko najmanje kockica treba izvući iz ladice da bi bila sigurna da će od tih kockica svaki dječak moći uzeti dvije istobojne kockice?

4. U posudi A nalazi se četiri kilograma grickalica, od čega je 45 % kikiriki. U posudi B nalazi se pet kilograma grickalica, od čega je 48 % kikiriki. U posudi C se nalazi jedan kilogram grickalica. Iz te posude se određeni dio prebaci u posudu A, a ostatak u posudu B, i to tako da je udio kikirikija u oba dijela jednak i iznosi k %. Nakon toga je i u posudi A i u posudi B točno 50 % kikirikija. Odredi k.

5. Neka je $ABCDE$ pravilni peterokut i neka je F točka unutar njega takva da je trokut ABF jednakostraničan. Odredi kutove trokuta DEF.

6. Na dvije nasuprotne strane kocke dimenzija $1\times1\times1$ nalazi se po jedna točka, na druge dvije nasuprotne strane po dvije točke, a na preostale dvije strane po tri točke. Od osam takvih identičnih kocki napravljena je kocka dimenzija $2\times2\times2$. Matija je izbrojio ukupan broj točaka na svakoj od strana te kocke i zaključio "dobili smo šest uzastopnih prirodnih brojeva". Je li Matija u pravu? Obrazloži odgovor.

7. Duljine kateta pravokutnog trokuta su a i b, a duljina njegove hipotenuze je c. Ako su sve tri duljine prirodni brojevi, te a k tome neparan prost broj, dokaži da je broj $2(a+b+1)$ kvadrat nekog prirodnog broja.

II. razred

1. Odredi sve prirodne brojeve k za koje su sva rješenja jednadžbe $x^2-63x+k=0$ prosti brojevi.

2. Unutar kružnice k polumjera 20 nalaze se kružnica k_1 polumjera 5 i kvadrat $ABCD$. Pritom se kružnice k i k_1 diraju u točki P, točke A i B leže na kružnici

k, a pravac CD dira kružnicu k_1 u točki Q takvoj da je $\overline{PQ}$ promjer te kružnice. Odredi duljinu stranice kvadrata $ABCD$.

3. Svaki od četiri zida sobe potrebno je obojiti jednom bojom tako da susjedni zidovi ne budu iste boje. Ako na raspolaganju imamo tri različite boje, na koliko je načina moguće obojiti sobu? Nije nužno upotrijebiti sve boje.

4. Odredi najveći prirodni broj n takav da $n+10$ dijeli n^3+100.

5. Upiši u prazna polja tablice brojeve tako da u svakom retku, stupcu i dijagonali broj u sredini bude aritmetička sredina druga dva broja. Obrazloži!

	8	
11		
		29

6. Trapez $ABCD$ s osnovicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ ima opisanu kružnicu k. Njegove dijagonale međusobno su okomite i sijeku se u točki S. Odredi omjer površine kruga omeđenog kružnicom k i zbroja površina trokuta ABS i CDS.

7. Dvije ekipe igraju rukomet. Nijedna ekipa nije postigla 30 ili više pogodaka. Zapisničar na početku utakmice i nakon svakog postignutog pogotka zapisuje rezultat te izračuna zbroj svih znamenaka u rezultatu. Na primjer, kod rezultata $15:6$ zbroj znamenaka iznosi 12. Koliko je najviše puta tijekom utakmice zapisničar mogao zapisati rezultat u kojem je ukupan zbroj znamenaka jednak 10?

III. razred

1. Odredi najmanju i najveću vrijednost koju izraz $\sin^2 x \cos 2x$ postiže za $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. Koliko ima četveroznamenkastih prirodnih brojeva u čijem su zapisu točno dvije različite znamenke od kojih se svaka pojavljuje dvaput?

3. Trapezu s krakovima duljina 4 i 5 može se upisati kružnica, a zbroj veličina kutova uz dulju osnovicu iznosi 120°. Izračunaj površinu tog trapeza.

4. Odredi sva realna rješenja jednadžbe

$$\log_2 x \cdot \log_4 x + \log_4 x \cdot \log_8 x + \cdots + \log_{2^{2019}} x \cdot \log_{2^{2020}} x = \frac{2019}{2020}.$$

5. Za prirodni broj $n \geq 2$ neka je $D(n)$ najveći prirodni djelitelj broja n različit od n. Na primjer, $D(12)=6$ i $D(13)=1$. Odredi najveći prirodni broj n takav da je $D(n)=35$.

6. Posuda oblika uspravnog stošca sadrži određenu količinu vode. Kada je stožac postavljen osnovkom na ravnu površinu vrhom prema gore, razina vode je 8 cm ispod vrha stošca. Ako stožac preokrenemo, razina vode je 2 cm ispod osnovke stošca. Kolika je visina posude?

7. Dani su prosti brojevi p, q, r i s takvi da je $5 < p < q < r < s < p+10$. Dokaži da je zbroj tih četiriju brojeva djeljiv sa 60.

IV. razred

1. Odredi argument kompleksnog broja z ako vrijedi

$$\operatorname{Re}\frac{1}{z} = \operatorname{Im}\frac{1}{z} = 2020.$$

2. Zadan je niz (a_n) takav da je $a_0 = 1$, $a_1 = 4$ i

$$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2},$$

za svaki prirodni broj $n \geq 2$. Dokaži da su svi članovi niza (a_n) kvadrati prirodnih brojeva.

3. Igraća kockica bačena je triput zaredom. Odredi vjerojatnost da je pri svakom bacanju (nakon prvog) pao broj koji nije manji od prethodnog.

4. Odredi skup svih vrijednosti koje postiže funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{2020x}{x^2 + x + 1}.$$

5. Odredi zbroj svih prirodnih brojeva n manjih od 1000 za koje je $2^n + 1$ djeljivo s 11.

6. Odredi točke A i B na paraboli $y^2 = x$ tako da točka $(2, 1)$ pripada dužini $\overline{AB}$, a da polovište dužine $\overline{AB}$ bude što je moguće bliže osi y.

7. Odredi sve prirodne brojeve n koji imaju točno 12 pozitivnih djelitelja

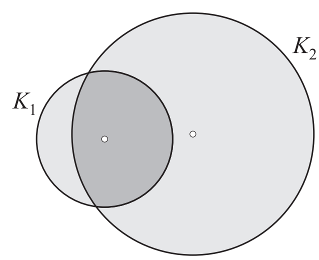
$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{12} = n$$

za koje vrijedi $d_4 = 5$ i $d_5^2 + 1 = d_7$.

Zadatci – B varijanta

I. razred

1. Ako je $\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{3}{2}$ i $\dfrac{c}{b-c} = \dfrac{4}{5}$, koliko je $\dfrac{c-a}{c}$?



2. Dva se kruga K_1 i K_2, osjenčana bojom, sijeku tako da se izvan njihova presjeka nalazi 10 % površine kruga K_1 i 60 % površine kruga K_2. Izračunajte omjer polumjera krugova K_1 i K_2. Koliko iznosi zbroj tih polumjera, ako je ukupna osjenčana površina jednaka 94π?

3. Izračunajte

$$\frac{2020^2 - 2019^2 + 2018^2 - 2017^2 + 2016^2 - 2015^2 + \ldots + 2^2 - 1^2}{1010}.$$

4. Skratite sljedeći razlomak do razlomka koji se više ne može skratiti

$$\frac{x^4 - 16}{x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16}.$$

5. Zlatar ima dvije slitine srebra i zlata. U prvoj je slitini omjer srebra i zlata $4:5$, a u drugoj $2:5$. U kojem omjeru treba pomiješati te dvije slitine da bi omjer srebra i zlata u novoj slitini bio $7:11$?

6. Odredite sve prirodne brojeve x, y i z takve da je $x < y < z$, za koje vrijedi
$$xyz + xy + xz + yz + x + y + z + 1 = 2020.$$

7. Duljina stranice jednakostraničnog trokuta ABC iznosi a. Točka E nalazi se na stranici $\overline{AB}$ i udaljena je od vrha B za $\frac{1}{3}a$. Trokut $A'B'C'$ je osnosimetrična slika trokuta ABC u odnosu na pravac koji prolazi točkom E okomito na stranicu $\overline{AB}$. Ako je opseg nastalog lika (unije trokuta ABC i trokuta $A'B'C'$) 12 cm, kolika mu je površina?

II. razred

1. Riješite jednadžbu $\sqrt{3 - \frac{1}{2020x}} = 1 - \frac{1}{2020x}$.

2. Odredite sve realne brojeve m tako da za rješenja x_1, x_2 jednadžbe $x^2 + m - 3x = mx - 2$ vrijedi $\frac{x_1}{x_1 + 1} + \frac{x_2}{x_2 + 1} < 1$.

3. Maksimalna vrijednost funkcije $f(x) = -3x^2 - 2(k - 5)x + k - 9$ jednaka je minimalnoj vrijednosti funkcije $g(x) = x^2 - 2(k-1)x + k + 7$. Odredite sve takve funkcije f i g.

4. Središta dviju kružnica udaljena su 44 cm. Ako su polumjeri tih kružnica 15 cm i 37 cm, kolika je duljina njihove zajedničke tetive?

5. Na koliko se načina iz skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ mogu odabrati tri broja čiji je zbroj djeljiv s 3?

6. Tijekom skraćivanja razlomka $\dfrac{\overline{200\ldots0x}}{\overline{300\ldots0y}}$ $(x, y \neq 0)$ u kojem između 2 i x te između 3 i y ima po 2020 nula, Matko je zanemario nule i napisao $\dfrac{\overline{200\ldots0x}}{\overline{300\ldots0y}} = \dfrac{\overline{2x}}{\overline{3y}}$ te dobio točan rezultat. Odredite sve vrijednosti znamenaka x i y za koje je opisanim skraćivanjem Matko mogao dobiti točan rezultat.

7. Unutar kvadrata $ABCD$ nalaze se točke E, F, G i H takve da su trokuti ABE, BCF, CDG i DAH jednakostranični. U kojem su omjeru površina kvadrata $ABCD$ i površina četverokuta $EFGH$?

III. razred

1. Riješite nejednadžbu $1 - 27^x \leq 6 \cdot 9^{3x}$.

2. Ako je $\log_2 3 = a$ i $\log_7 2 = b$, koliko je $\log_6 28$?

3. Ako je $f(x) = 4\sin^2 \frac{3x}{2} - 4\cos^2 \frac{3x}{2}$, odredite $f\left(\frac{2020\pi}{9} + 2021k\pi\right)$ u ovisnosti o cijelom broju k.

4. Koliko rješenja na intervalu $[0, 2020\pi]$ ima jednadžba $\frac{1}{2}\sin 2x + 1 = \sin x + \cos x$?

5. U skupu cijelih brojeva riješite jednadžbu $a^2 + b^2 + 50 = 8a + 12b$.

6. Jedna je kateta pravokutnog trokuta ABC dvostruko dulja od druge. Trokut $A'B'C$ nastaje rotacijom trokuta ABC oko vrha pravog kuta C za $30°$. Točke A, A', B, B' i C vrhovi su konveksnog peterokuta čija je površina $20 + 8\sqrt{3}$. Izračunajte duljine kateta trokuta ABC.

7. Za koje vrijednosti realnog broja t jednadžba

$$x^2 + \frac{1}{\sqrt{\cos t}}\, 2x + \frac{1}{\sin t} = 2\sqrt{2}$$

ima točno jedno rješenje?

IV. razred

1. Odredite koordinate sjecišta krivulja zadanih jednadžbama $x^2 + 2y^2 = 2$ i $2x^2 + y^2 = 2$, te površinu konveksnog mnogokuta čiji su vrhovi te točke.

2. Učenici su u parovima pisali objave za Instagram kojima pozivaju na "Večer matematike". Par koji zajedno sakupi najviše lajkova očekuje nagrada. Maja je sakupila 3731, Matko 2754, ali tvrde da zajedno imaju 6705, zbog čega ostali parovi sumnjaju na prevaru. Ako dopustimo mogućnost da brojevi nisu zapisani u dekadskom sustavu, mogu li Maja i Matko biti u pravu? Obrazložite.

3. Zadan je kompleksan broj $z = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}$. Izračunajte $\sqrt[3]{z^{2020}}$.

4. U razvoju binoma $(a+b)^n$ treći je član jednak $\frac{56}{9}$, četvrti član je $\frac{70}{3}$, a binomni koeficijenti trećeg i šestog člana su jednaki. Odredite brojeve a, b i n.

5. Na satu hrvatskog jezika djeca su se nadmetala u slaganju riječi od pet slova. Pri tome su mogli koristiti samo slova riječi SNIJEG (jedno su slovo mogli koristiti i više puta). Jedini je uvjet bio da u svakoj riječi moraju upotrijebiti slovo E i to točno dva puta. Koliko je najviše različitih riječi (ne nužno smislenih) mogao netko složiti?

6. Odredite sve prirodne brojeve x za koje vrijedi jednakost

$$3 \cdot \binom{2x^2 - 10x + 16}{x^2 - 5x + 9} = 2 \cdot \binom{2x^2 - 10x + 17}{x^2 - 5x + 7}.$$

7. Leda i Una se igraju plastelinom u obliku valjka kojemu je visina 6 puta veća od promjera baze. Leda je uzela dio tog plastelina i napravila veću, a Una je od ostatka napravila manju kuglicu. Koliko je puta obujam Ledine kuglice veći od obujma Unine kuglice, ako je zbroj njihovih polumjera 3 puta veći od polumjera baze valjka?

Ivan Kokan