

Sudoku – napredne metode rješavanja (11.1)

Žarko Čulić¹

U prethodnim nastavcima (njih 21) obradili smo sve značajne grupe metoda za rješavanje sudokua. U naredna četiri nastavka obradit ćemo neke dodatne metode koje nam mogu pomoći pri rješavanju teških sudokua. Počet ćemo s metodom *WXYZ-krilom* (*WXYZ-Wing*) koja spada u grupu *krila* i predstavlja logičan nastavak *XYZ-krila*. Pogledajte sliku 1.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A		WZ						
B	WX YZ	Z	Z	XZ	YZ			
C								
D								
E								

Slika 1.

Na slici 1 je klasičan primjer *WXYZ-krila* koje se definira analogno *XYZ-krilu*. Ovdje središnje polje ne sadrži 3 već 4 kandidata (W, X, Y, Z) i vidi 3 polja od kojih svako sadrži barem po jednog kandidata W ili X ili Y i jednog zajedničkog kandidata Z i svi zajedno čine tzv. *WXYZ-krilo*. Koristeći tu metodu možemo eliminirati kandidata Z iz svih polja koja vide sva polja *krila*. Analiza: ako je točno bilo koje polje od onih koje namjeravamo eliminirati, tada nam preostaje 4 polja *krila* sa samo tri kandidata i to je kontradiktorna situacija, koja pokazuje da je početna pretpostavka netočna. Uočite da možemo eliminirati samo kandidate Z iz polja unutar kvadrata gdje je i središnje polje.

Pogledajte primjer na slici 2.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
A	¹ ₆ 8 9	¹ ₆ 9	¹ _{8 9}	¹ ₅ 8 9	2	4	7	3	¹ ₅ 8	
B	5	4	¹ 8 9	3	7	8 9	2	6	¹ 8	
C	2	3	7	¹ _{5 6} 8	¹ ₅	^{5 6 8}	¹ ₅	¹ ₉ 8 9	4	
D	7	^{1 2} _{5 6} 9	^{1 2} ₅ 9	⁵ 9	3	² 5 9	8	4	¹ _{5 6}	
E	⁶ 9	² _{5 6} 9	3	4	8	1	⁵ 9	² 7 9	^{5 6} 7	
F	¹ 9	8	4	⁵ 7 9	6	² _{5 9}	¹ _{5 9}	^{1 2} 9	3	
G	3	^{1 2} 8	^{1 2} 8	¹ ₆ 7 8	¹ ₄	⁶ 7 8	4	6	5	9
H	¹ ₄ 8	7	¹ ₅ 8	^{5 6 8}	9	3	4	¹ 8	2	
I	¹ ₄ 8 9	¹ ₅ 9	6	2	¹ _{4 5}	⁵ 8	3	¹ 7 8	¹ 7 8	

Slika 2.

¹ Autor je predavač na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu; e-pošta: zculic@math.hr

Središnje polje D3 ima 4 kandidata $\{1, 2, 5, 9\}$ i vidi tri druga polja: D4 s kandidatima $\{5, 9\}$, D6 s $\{2, 5, 9\}$ i F1 s $\{1, 9\}$. U polju D2 imamo kandidata 9 koji vidi sva polja krila i stoga ga sukladno pravilima metode *WXYZ-krila* možemo eliminirati.

No, *WXYZ-krilo* funkcionira čak i u situacijama kada središnje polje ne sadrži sva 4 kandidata, već tri ili samo dva. Stoga se i definicija metode prilagodila i glasi: *WXYZ-krilo* se smatra grupom od 4 polja sa 4 kandidata (znamenke) koja ima točno samo jednu ne-ograničenu zajedničku znamenku (non-restricted common digit) i upravo tu znamenku možemo eliminirati iz svih polja koja vide sve te znamenke u krilu. Ograničena (restricted) znamenka je ona kod koje se sve instance pojedinog kandidata u krilu (uzorku) međusobno vide, a analogno tome ne-ograničena je ona koja ne vidi sve identične znamenke u krilu. Pogledajte primjer na slici 3.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A								
B		WX YZ	Z	XZY	Z			
C	WZ							
D								
E								

Slika 3.

Na slici 3 vidimo da krilo čini grupa od 4 polja sa 4 kandidata W, X, Y i Z. Znamenke W, X i Y se međusobno vide u postojećim poljima krila (pogledajte iscrtane veze) te čine ograničene znamenke, dok je znamenka Z jedina ne-ograničena znamenka budući da se međusobno ne vide sve znamenke Z u svim poljima krila. Time smo zadovoljili zadane uvjete definicije i možemo eliminirati Z iz polja koja vide sve Z-ove u krilu, konkretno u primjeru iz polja B3. Analiza: neka je Z u B3 točan, tada je B4=X, B5=Y i B2=W, kao i u C1, što je očita kontradikcija i dokazuje da Z ne može biti točno u B3. Općenito vrijedi da je ne-ograničena znamenka točna u jednom od polja *WXYZ-krila*.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	8	4	2	5 6	5 6	3	7	1	9
B	⁶ ₇	⁶ _{7 9}	3	1	^{7 8 9}	4	^{5 6} ₈	² _{5 8}	² ₆
C	5	⁶ _{7 9}	1	² ₇	² _{7 8 9}	² _{8 9}	⁶ ₈	3	4
D	⁶ ₉	3	8	² ₆	1	² _{6 9}	4	7	5
E	⁴ ₉	2	4 5	3	⁵ ₉	7	1	6	8
F	1	5 6	7	4 5 6	^{4 5} ₈	^{5 6} ₈	2	9	3
G	3	⁵ ₈	6	² _{4 7}	² _{4 5 7}	² ₅	9	^{4 5} ₈	1
H	⁴ ₇	⁵ _{7 8}	4 5	9	3	1	^{5 6} ₈	² _{5 8}	² ₆
I	2	1	9	8	4 5 6	5 6	3	4 5	7

Slika 4.

Na slici 4 imamo primjer gdje središnje polje ima samo 3 kandidata: D6 = $\{2, 6, 9\}$ i vidi polja E5 = $\{5, 9\}$, G6 = $\{2, 5\}$ i I6 = $\{5, 6\}$. Dakle imamo grupu od 4 polja s

4 kandidata $\{2, 5, 6, 9\}$ i imamo samo jednog ne-ograničenog kandidata, broj 5. Stoga sukladno definiciji *WXYZ-krila*, možemo eliminirati broj 5 iz F6, G5 i I5 jer vide sva polja krila (E5, G6 i I6) koja sadrže broj 5.

Na slici 5 imamo primjer *WXYZ-krila* gdje središnje polje C1 ima također samo 3 kandidata $\{4, 5, 9\}$, ali se ne-ograničeni kandidat 3 nalazi samo u dva polja B2 i C8. Stoga možemo eliminirati broj 3 iz polja B789. Uočite da bi u ovom slučaju središnje polje moglo biti i C3 sa samo dva kandidata $\{5, 9\}$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
A	2 4 5 7	1 3 5 7	1 2 5 7	4 3 6 7	2 3 6 4	2 4 7	8	4 5 6 3 7	9	
B	4 7 9	2 9	3 9	8	4 6 7 9	2 3 6 7	5	1 3 4 6	3 1 3 6	
C	4 5 9	6	5 9	1	3 8 9	4 8 9	7	4 5 3 7	2	
D	5 8 9	5 8 9	2 5 6 9	7 7 9	6 7 9	1 5 6 7 9	3	1 2 5 9	2 7 9	4
E	2 5 9	7	2 3 5 6 9	6 9	4	1 9	1 2 3 5 9	8	1 3 5	
F	1	4	5 3 9	2	5 7 8 9	7 8 9	6	3 7 9	5 3	
G	3	5 8 9	4	7 8 9	7 9	2 7 9	6	2 5 9	1 5 7 8	
H	7 8 9 4	2 7 9	1 7 9	5	1 3 7 9	1 7 9	4	3 7 9	3 7 8	
I	6	5 8 9	1 7 9	3 7 8 9	1 2 3 7 9	1 2 4	2 3 5 9	2 3 7 9	3 7 8	

Slika 5.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	9	6	4 8	2 5 8	2 8	1	3	7	4 5
B	1 3 4	1 4	2	5 3 6	9	7	8	6	4 5
C	3 8	5	7	6	4	3 8	1 2 9	1 2 9	1 9
D	1 8	2	1 3 8	4 3 6	5 8 9	4 3 8 9	7	1 8 9	1 6 9
E	7	4 8 9	4 3 8	1 8	6	5	8 9	2	
F	5	1 9	1 8	2 8 9	7	2 8 9	4	3	1 6 8 9
G	1 2 4 8	7	1 4	4 2 3 8	6 4 8	9	5	1 3 8	
H	4	3	5	4 8 9	1 4 8 9	2 8 9	6	2 8	7
I	6	1 8	9	7	2 3 8	5	1 2 4	1 3 4	

Slika 6.

I za kraj imamo na slici 6 primjer *WXYZ-krila* gdje središnje polje ima samo 2 kandidata, $F2 = \{1, 9\}$. Polja krila su $D1 = \{1, 8\}$, $F4 = \{2, 8, 9\}$ i $F6 = \{2, 8, 9\}$. Dakle, 4 kandidata u 4 polja i samo jedan ne-ograničeni kandidat 8 kojeg možemo eliminirati iz polja D46 i F3 koja vide sva polja krila koja sadrže broj 8.

U sljedećem nastavku bit će govora o nepravilnim *XYZ-krilima*, metodi koja nam također može pomoći pri rješavanju teških sudokua.

Zadatak za vježbu s rješenjem:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	7	1		4					
B	5	6		2		7		3	
C						9	7		
D		5		4			2	9	
E	2				6				7
F		3	1			2		6	
G			6	3					
H		7		5		4		8	3
I					2			7	4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	7	1	9	8	4	3	5	2	6
B	5	6	4	2	1	7	8	3	9
C	8	2	3	6	5	9	7	4	1
D	6	5	7	4	3	1	2	9	8
E	2	4	8	9	6	5	3	1	7
F	9	3	1	7	8	2	4	6	5
G	4	9	6	3	7	8	1	5	2
H	1	7	2	5	9	4	6	8	3
I	3	8	5	1	2	6	9	7	4