Nizovi u Pascalovom trokutu

Filip Vučić[1]

U članku će biti pokazan izvod sume niza kvadrata prirodnih brojeva i sume niza potencija broja 2 koristeći svojstva Pascalovog trokuta. Uobičajeni izvod sume niza kvadrata prirodnih brojeva radi se sumiranjem kubova [2].

Suma niza kvadrata prirodnih brojeva

Na slici 1 prikazan je Pascalov trokut zarotiran za 45° [1] s istaknutim stupcem $k=4$. Pascalov trokut ima opći član $a_{n,k}$ koji je dan izrazom

$$a_{n,k} = \binom{n}{k}. \tag{1}$$

n/k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1		0						
3	1	3	3	1	0						
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Slika 1. Pascalov trokut zarotiran za 45° s istaknutim stupcem $k=4$.

Promotrimo sume nizova kvadrata prirodnih brojeva čiji je prvi član 1^2, a posljednji 7^2. Promatrane su sume redom:

$$\begin{gathered}
1^2 = 1\\
1^2+2^2 = 5\\
1^2+2^2+3^2 = 14\\
1^2+2^2+3^2+4^2 = 30\\
1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 = 55\\
1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2 = 91\\
1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2 = 140.
\end{gathered}$$

[1] Učenik je 2. razreda I. gimnazije u Zagrebu; e-pošta: `fico.sah@gmail.com`

Valja uočiti da se te sume mogu pisati u obliku:

$$
\begin{gathered}
1^2 = 1 = 1 - 0 \\
1^2 + 2^2 = 5 = 5 - 0 \\
1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 = 15 - 1 \\
1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30 = 35 - 5 \\
1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55 = 70 - 15 \\
1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 91 = 126 - 35 \\
1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 140 = 210 - 70.
\end{gathered}
$$

Uspoređivanjem prethodno napisanih suma i istaknutog stupca na slici 1 može se pretpostaviti da vrijedi

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \binom{n+3}{4} - \binom{n+1}{4}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Matematičkom indukcijom pokažimo da vrijedi izraz (2).

Dokaz. Nakon sređivanja izraza (2) dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom u sljedeća tri koraka:

1. dokaz da tvrdnja vrijedi za $n = 1$,

2. pretpostavka da tvrdnja vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$,

3. dokaz da iz pretpostavke slijedi da tvrdnja vrijedi za broj $k + 1$.

Treba srediti izraz:

$$
\begin{aligned}
\binom{n+3}{4} - \binom{n+1}{4} &= \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4!} - \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4!} \\
&= n(n+1)\frac{(n+3)(n+2) - (n-1)(n-2)}{4!} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \text{za } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Tvrdnja koju dokazujemo može se pisati u obliku:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{3}$$

Baza indukcije. Treba pokazati da izraz (3) vrijedi za $n = 1$.

Uvrštavanjem $n = 1$ u (3) dobiva se 1 = 1 što znači da tvrdnja vrijedi za $n = 1$.

Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da za neki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}. \tag{4}$$

Korak indukcije. Koristeći pretpostavku treba pokazati

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Prema pretpostavci (4) vrijedi:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= (k+1)\left(\frac{k(2k+1)}{6} + k + 1\right) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \end{aligned} \tag{5}$$

Po principu matematičke indukcije tvrdnja, koju dokazujemo, vrijedi za sve prirodne brojeve.

Iz navedenog proizlazi

Tvrdnja 1.

$$k^2 + (k+1)^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) - k(k-1)(2k-1)}{6}, \quad k,\ n \in \mathbb{N}, \quad k \leq n.$$

Suma niza potencija broja 2

Na slici 2 prikazan je Pascalov trokut na kojemu je istaknuto još jedno njegovo svojstvo.

n/k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Slika 2. Još jedno svojstvo Pascalovog trokuta.

Promotrimo isto označene brojeve:

$$
\begin{gathered}
1+1=2 \\
1+3+6=10 \\
1+5+15+35+70=126 \\
1+7+28+84=120.
\end{gathered}
$$

To se svojstvo može zapisati na ovaj način

$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{0}{k}+\binom{1}{k}+\binom{2}{k}+\binom{3}{k}+\ldots+\binom{n}{k}. \tag{6}$$

Odredimo sumu $s(n)$ svih članova u n-tom retku. Ona se može pisati

$$s(n)=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}. \tag{7}$$

Izraz (7) odgovara broju načina na koji se iz n-članog skupa može izabrati k-člani podskup $(k \in \{0,1,2,3,\ldots,n\})$. Za svaki od n elemenata može se odrediti hoće li ili neće biti u nekom podskupu pa je to 2^n mogućih podskupova. Kako su prebrojavana dva ista izraza, zaključuje se

$$2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n},$$

a iz toga

$$s(n)=2^n. \tag{8}$$

Valja uočiti da se pomoću navedenog svojstva može izračunati suma niza

$$2^0+2^1+2^2+\ldots+2^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Na slici 3 korišten je izraz (6).

Na slici 2 dan je primjer kako naći sumu prethodnog niza pomoću svojstva (6) Pascalovog trokuta.

n/k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Slika 3. Određivanje sume niza potencija s bazom 2.

Zbroj označenih brojeva u k-tom stupcu od 0-tog do n-tog retka jednak je broju označenog u $(n+1)$-om retku i $(k+1)$-om stupcu. Sa slike 3 može se pisati

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2^5 - 1,$$

a to se može poopćiti na način

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{9}$$

Drugi je mogući način za izvod sume (9) pomoću Pascalovog trokuta. Traži se suma svih članova od 0-tog do n-tog retka pa se svi članovi pokriju po stupcima do n-tog retka, a kako je zbroj svih tih članova tražena suma, koristeći svojstvo (6) ona se iskazuje kao u izrazu (9).

Tvrdnja 2. $2^k + 2^{k+1} + 2^{k+2} + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 2^k$, k, $n \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$.

Zadatci

Zadatak 1. Na koliko se načina broj 2019 može zapisati kao zbroj prirodnih brojeva?

Zadatak 2. Za $m \to \infty$ nađite limes izraza $\dfrac{2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^m}{2^{m+2}}$.

Zadatak 3. Zbroj kvadrata četiriju uzastopnih prirodnih brojeva iznosi 174. Nađite te brojeve.

Zadatak 4. U ravnini je dano 2019 točaka od kojih nikoje tri nisu na istom pravcu. Koliko je trokuta određeno tim točkama?

Zadatak 5. U ravnini je dano 2019 točaka u općem položaju takvih da nikoje tri ne leže na istom pravcu i nikoje četiri ne leže na istoj kružnici. Koliko je kružnica određeno tim točkama?

Zadatak 6. Nađite sumu $9 + 18 + 30 + 45 + \ldots + 108$.

Rješenja zadataka

Rješenje zadatka 1. Ispisujmo sve kombinacije za male brojeve dok ne uočimo pravilnost.
$1 = 1$
$2 = 2;\ 2 = 1 + 1$
$3 = 3;\ 3 = 2 + 1;\ 3 = 1 + 2;\ 3 = 1 + 1 + 1$
$4 = 4;\ 4 = 1 + 3;\ 4 = 3 + 1;\ 4 = 2 + 2;\ 4 = 1 + 1 + 2;\ 4 = 1 + 2 + 1;\ 4 = 2 + 1 + 1;$
$4 = 1 + 1 + 1 + 1$

Za broj 1 postoji 1 kombinacija. Za broj 2 postoje 2 kombinacije. Za broj 3 postoje 4 kombinacije. Za broj 4 postoji 8 kombinacija. Lako se uočava da je broj kombinacija potencija broja 2 takva da je u eksponentu broj umanjen za 1 od zadanog, pa je za svaki $n \in \mathbb{N}$ ukupan broj kombinacija jednak 2^{n-1} iz čega slijedi da je za $n = 2019$ traženi broj načina jednak 2^{2018}.

Rješenje zadatka 2. Sumu $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^m$ možemo pisati kao $2^{m+1} - 1$ pa uvrštavanjem u početni izraz dobivamo

$$\lim_{m\to\infty} \frac{2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^m}{2^{m+2}} = \lim_{m\to\infty} \frac{2^{m+1} - 1}{2^{m+2}} = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{m+2}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Rješenje zadatka 3. Traženi zbroj moguće je pisati u obliku

$$174 = \frac{n(n+1)(2n+1) - k(k-1)(2k-1)}{6}.$$

Budući da su u pitanju četiri uzastopna broja (neka je k najmanji, a n najveći), može se pisati $n = k + 3$. Uvrštavanjem $n = k + 3$ u prethodni izraz, dobiva se

$$174 = \frac{(k+3)(k+4)(2k+7) - k(k-1)(2k-1)}{6}.$$

Rješenje gornje jednadžbe je $k = 5$, odakle slijedi da su traženi brojevi 5, 6, 7, 8.

Rješenje zadatka 4. Od ukupno 2019 točaka biraju se tri tako da redoslijed odabira nije bitan. Stoga je traženi broj jednak $\binom{2019}{3}$.

Rješenje zadatka 5. Kružnica je jednoznačno određena ako su joj dane tri rubne točke ili središte i jedna rubna točka. Zato je ukupan broj kružnica koje je moguće odrediti tim točkama jednak zbroju kružnica koji je moguće odrediti tim točkama za oba slučaja. Budući da nikoje četiri točke ne pripadaju istoj kružnici, sigurno je da niti jedna kružnica neće biti brojana dva puta. Od 2019 točaka biraju se dvije, ali ovoga je puta redoslijed odabira bitan jer nije svejedno koja je točka središte, a koja je rubna pa je to $2019 \cdot 2018$ kružnica kojima je središte i jedna rubna točka određeno zadanim točkama. Od 2019 točaka biraju se tri bez ponavljanja i redoslijed odabira nije bitan jer su sve točke rubne pa je to $\binom{2019}{3}$ kružnica kojima su dane tri rubne točke. Iz toga se zaključuje da je ukupan broj kružnica određen tim točkama jednak $2019 \cdot 2018 + \binom{2019}{3}$.

Rješenje zadatka 6. Dani niz može se pisati kao

$$9 + 18 + 30 + 45 + \ldots + 108 = 3(3 + 6 + 10 + 15 + \ldots + 36).$$

Uočimo kako se niz $3 + 6 + 10 + 15 + \ldots + 36$ nalazi u stupcu $k = 2$ Pascalovog trokuta pa prema svojstvu (9) očitamo da je suma tog niza jednaka $1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + 36 - 1 = 120 - 1 = 119$, a tražena je suma trostruko veća od sume niza $3 + 6 + 10 + \ldots + 36$ pa je stoga tražena suma jednaka $3 \cdot 119 = 357$.

Literatura

[1] `https://www.fer.unizg.hr/_download/repository/diskont1-03.pdf`, pristupano 19.10.2019.

[2] Ilija Ilišević, *Neke konačne sume*, Osječki matematički list 11, 2011.