Format papira A4 i iracionalnost broja $\sqrt{2}$

Jens Carstensen, Alija Muminagić

Podsjetimo se: prema ISO standardima dan je format papira kojemu se duljine stranica pravokutnika odnose kao $\sqrt{2}:1$. Prednost ovakvih formata prvi je uočio Georg Christof Lichtenberg[1] 1786. godine, a tek je u 20-tom stoljeću Walter Porstmann[2] uveo to u odgovarajući sustav formata koji se i dan-danas primijenjuje.

U praksi je poznato da format papira A4 ima dimenzije $a \times b = 297 \times 210$ mm, što su prirodni brojevi. U ovom slučaju je $\frac{a}{b} \approx \sqrt{2}$. Pri tome je $\left|\frac{a}{b} - \sqrt{2}\right| < 10^{-4}$.

Dokazat ćemo još na jedan način da je $\sqrt{2}$ iracionalan broj.

Pretpostavimo da je $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ racionalan broj, gdje su a i b relativno prosti prirodni brojevi. Tada je

$$\frac{a}{b} = \frac{2b-a}{a-b}.$$

Kako je $\sqrt{2}+1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$, imamo

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{1}{\frac{a}{b} - 1} = \frac{b}{a-b} \iff \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} - 1 = \frac{2b-a}{a-b} = \frac{a_1}{b_1}.$$

Kako je $1 < \sqrt{2} < 2$, imamo $b < a < 2b$ i $0 < 2b - a = a_1 < a$ i $\frac{a_1}{b_1} = \sqrt{2}$. Isti postupak možemo provesti s a_1 i b_1, itd. Dobivamo niz prirodnih brojeva (a_n), $a > a_1 > a_2 > \ldots$ Ali kako postoji samo konačno mnogo prirodnih brojeva manjih od danog prirodnog broja, to nije moguće. Prema tome $\sqrt{2}$ je iracionalan broj. (Ovo je Fermatova[3] metoda beskonačnog silaska.)

Uzmimo papir formata $a \times b$ tako da je $a \approx 297$ mm i $b \approx 210$ mm tako da je $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Presavijanjem tog lista papira dokazivat ćemo $\frac{a}{b} = \frac{2b-a}{a-b}$.

Dokaz 1. Neka je $ABCD$ list papira $|AD| = a$ i $|AB| = b$ tako da je $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Presavijmo list tako da točka A padne u točku B' na dužini $\overline{BC}$. Time je određena i točka A' na stranici $\overline{AD}$ (slika 1). Presavijmo sada papir po dužini $\overline{A'B'}$. Točke C i D preslikajmo simetrično u odnosu na pravac $A'B'$. Dobijemo točke C' i D'.

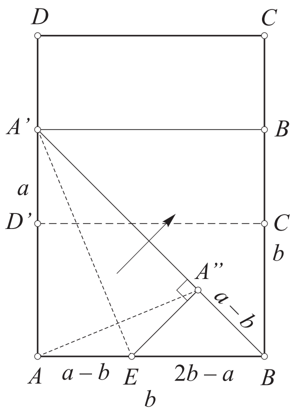
Presavijmo kvadrat $ABB'A'$ tako da točka B' padne u A. Presavijmo pravokutan trokut ABA' tako da A padne u A'' na stranici $\overline{A'B}$. Sada imamo, $|A'A''| = |AA'| = b$, $|A''B| = |A'B| - |A'A''| =$ (zbog $|A'B| = b\sqrt{2} = a$ i $|A'A''| = |A'A| = b$) $= a - b$.

[1] Georg Christof Lichtenberg (1742. – 1799.), njemački je matematičar, fizičar i filozof.

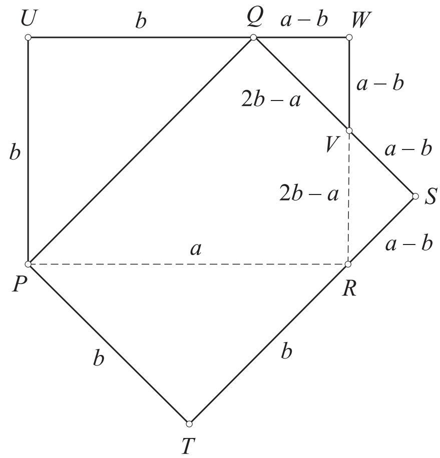
[2] Walter Porstmann (1886. – 1959.), njemački je inženjer, matematičar i kreator formata A4.

[3] Pierre de Fermat (1601. – 1665.), poznati je francuski matematičar.

Nadalje, $|A''E| = a - b = |AE|$ i $|EB| = |AB| - |AE| = b - (a - b) = 2b - a$, što povlači $\triangle A''EB \sim \triangle ABA'$, odakle slijedi $\dfrac{2b-a}{a-b} = \dfrac{a}{b} = \sqrt{2}$.



Slika 1.

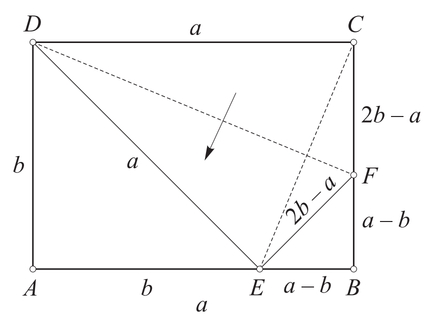


Slika 2.

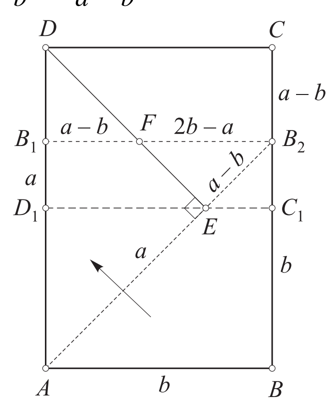
Dokaz 2. U ovom dokazu koristit ćemo dva lista papira formata A4, čije su duljine stranica b i $a = b\sqrt{2}$, imaju zajednički vrh P i vrh Q donjeg lista je na stranici $\overline{UW}$ gornjeg lista.

Stranica $\overline{ST}$ donjeg lista prolazi vrhom R gornjeg lista. Tada ostale dužine imaju mjere kao na slici 2, pa iz sličnosti trokuta (kojih?) dobivamo $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{2b-a}{a-b}$.

Dokaz 3. List papira formata A4, $a = b\sqrt{2}$ presavijemo tako da točka C padne u E. Dalje prepuštamo čitatelju (slika 3). Dobivamo $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{2b-a}{a-b}$.



Slika 3.



Slika 4.

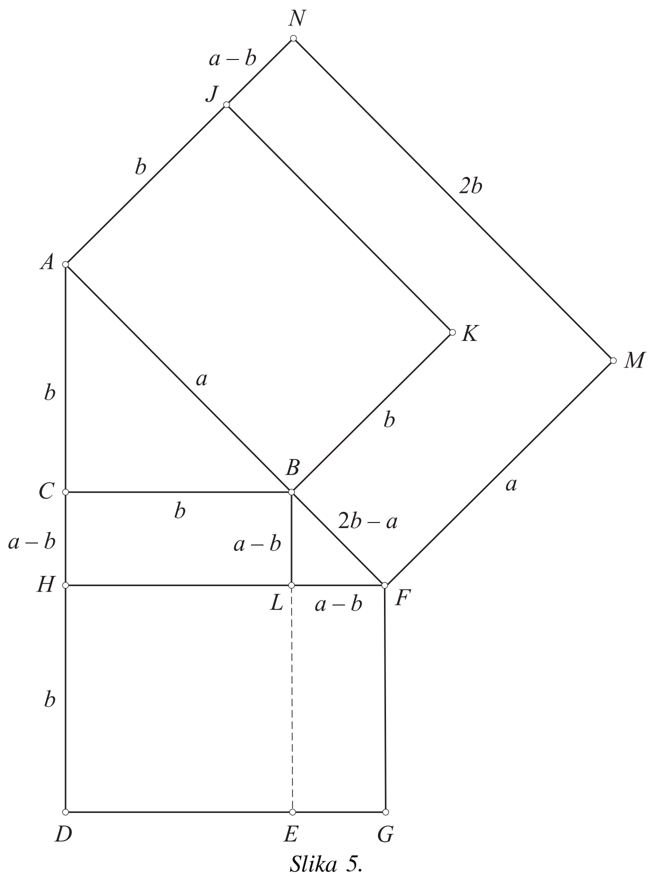
Dokaz 4. Presavijmo list papira A4 $(a = b\sqrt{2})$ tako da točka B padne u B_1, zatim list ispravimo i presavijemo tako da točke C i D padnu redom u B i A. Ispravimo ponovo papir i označimo točku E. Trokut AED je jednakokračan pravokutan s hipotenuzom $|AD| = a$. Zbog $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ je $|DE| = |AE| = \frac{a}{\sqrt{2}} = b$. Dalje je $|B_2E| = |AB_2| - |AE| = a - b$, a kako je $|DB_1| = a - b$ i trokut DB_1F je jednakokračan pravokutan, dobivamo $|B_1F| = a - b$. Sada imamo $|FB_2| = |B_1B_2| - |B_1F| = b - (a - b) = 2b - a$. Konačno iz sličnosti $\triangle EB_2F \sim \triangle ABB_2$ proizlazi $\frac{a}{b} = \frac{2b - a}{a - b}$.

Dokaz 5. Na slici 5 $\triangle ABC$ je jednakokračan pravokutan ($|AC| = |BC| = b$, $|AB| = a$). Lako presavijanjem papira formata A4 možemo dobiti taj trokut, vidi sliku. Uzmimo tri papira formata A4 ($BCDE$, $DGFH$, $AJKB$) i postavimo ih kao na slici 5. Produžetak hipotenuze $\overline{AB}$ trokuta ABC prolazi kroz točku F (zašto?), pa je $|BL| = |LF| = a - b$. Iz sličnosti trokuta ACB i AHF slijedi

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AH|}{|AF|} \implies \frac{b}{a} = \frac{a}{|AF|} \implies |AF| = \frac{a^2}{b}.$$

Zbog $a^2 = 2b^2$ dobivamo $|AF| = 2b$. Nadalje je $|BF| = |AF| - |AB| = 2b - a$, te konačno iz sličnosti trokuta ACB i BLF dobivamo $\frac{a}{b} = \frac{2b - a}{a - b}$.

Pored toga primijetite da je pravokutnik $ANMF$ formata A3.

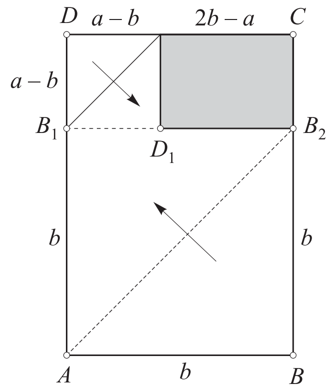


Slika 5.

Dokaz 6. Presavijmo list papira A4 u točki A tako da B padne u B_1 na $\overline{AD}$, a zatim presavijmo papir oko B_1 tako da točka D padne na $\overline{B_1B_2}$ u točku D_1. Lako vidimo da dužine imaju mjere kao na slici 6. Formati A4 i A5 su s lični pa imamo

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{\frac{1}{2}a}.$$

Odavde (radi pravila za računanje s razlomcima) imamo $\dfrac{2b-a}{a-b} = \dfrac{a}{b}$. Vidimo da je obojeni pravokutnik na slici 6 sličan pravokutniku formatu A4.



Slika 6.

Literatura

[1] Jens Carstensen, *Format A4 og irationalitet af* $\sqrt{2}$, (članak pripremljen za časopis LMFK-bladet).

[2] Nick Lord, *Using A4-sized paper to illustrate that* $\sqrt{2}$ *is irrational*, The Mathematical Gazette, 2017.