Dokazivanje nejednakosti pomoću rastavljanja na faktore

Šefket Arslanagić[1]

Još u osnovnoj školi kod skraćivanja razlomaka raznih oblika koristili smo rastavljanje složenih brojeva na proste faktore. Sada ćemo na nekoliko raznovrsnih primjera pokazati kako se pomoću rastavljanja na faktore mogu dokazivati razne nejednakosti. Najprije ćemo poći od lakših primjera, da bismo na kraju dali i znatno teže koji su se pojavljivali na matematičkim natjecanjima.

Primjer 1. Za pozitivne realne brojeve x, y i z vrijedi nejednakost

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} \geqslant 4(x - z). \tag{1}$$

Dokaz. Imamo

$$\frac{x^2}{y} \geqslant 4(x - y) \quad / \cdot (y > 0) \tag{2}$$

$$\iff x^2 - 4xy + 4y^2 \geqslant 0$$

$$\iff (x - 2y)^2 \geqslant 0.$$

[1] Autor je izvanredni profesor u miru na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu;
e-pošta: `asefket@pmf.unsa.ba`

Kako je posljednja nejednakost istinita, takva je i ona u (2). Analogno se dokazuje i nejednakost

$$\frac{y^2}{z} \geqslant 4(y-z). \tag{3}$$

Nakon zbrajanja nejednakosti (2) i (3) dobivamo (1). Jednakost u (1) vrijedi ako i samo ako je $x = 2y$ i $y = 2z$, tj. $x = 2y = 4z$.

Primjer 2. Ako su $a \geqslant b \geqslant c$ realni brojevi, vrijedi nejednakost

$$a^2b + b^2c + c^2a \geqslant b^2a + a^2c + c^2b. \tag{4}$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} &a^2b + b^2c + c^2a - b^2a - a^2c - c^2b \\ &= (a^2b - b^2a) - (a^2c - b^2c) + (c^2a - c^2b) \\ &= ab(a-b) - c(a-b)(a+b) + c^2(a-b) \\ &= (a-b)[ab - c(a+b) + c^2] \\ &= (a-b)[a(b-c) - c(b-c)] \\ &= (a-b)(b-c)(a-c) \geqslant 0, \end{aligned}$$

jer je $a \geqslant b \geqslant c$, Stoga vrijedi i nejednakost (4). Jednakost u (4) vrijedi ako i samo ako je $a = b$ ili $b = c$.

Primjer 3. Za nenegativne realne brojeve a i b imamo nejednakost

$$a^3(b+1) + b^3(a+1) \geqslant a^2(b+b^2) + b^2(a+a^2). \tag{5}$$

Dokaz. Redom dobivamo

$$\begin{aligned} &a^3(b+1) + b^3(a+1) - a^2(b+b^2) - b^2(a+a^2) \\ &= (a^3b - a^2b^2) + (a^3 - a^2b) - (a^2b^2 - ab^3) - (ab^2 - b^3) \\ &= a^2b(a-b) + a^2(a-b) - ab^2(a-b) - b^2(a-b) \\ &= (a-b)[(a^2b - ab^2) + (a^2 - b^2)] \\ &= (a-b)[ab(a-b) + (a-b)(a+b)] \\ &= (a-b)^2(ab + a + b) \geqslant 0, \end{aligned}$$

jer je $(a-b)^2 \geqslant 0$ te $ab + a + b \geqslant 0$. Odavde dobivamo nejednakost (5). Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b$.

Primjer 4. Za sve realne brojeve vrijedi nejednakost

$$2x^4 + 2y^4 \geqslant xy(x+y)^2. \tag{6}$$

Dokaz. Nejednakost je ekvivalentna sljedećoj

$$A = 2x^4 + 2y^4 - x^3y - xy^3 - 2x^2y^2 \geqslant 0. \tag{7}$$

Sređivanjem dobivamo

$$\begin{aligned} A &= (x^4 - 2x^2y^2 + y^4) + (x^4 - x^3y) + (y^4 - xy^3) \\ &= (x^2 - y^2)^2 + x^3(x-y) - y^3(x-y) \\ &= (x^2 - y^2)^2 + (x-y)(x^3 - y^3) \end{aligned}$$

$$= (x^2 - y^2)^2 + (x - y)^2(x^2 + xy + y^2)$$
$$= (x^2 - y^2)^2 + (x - y)^2 \left[\left(x + \frac{1}{2}y \right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \right] \geqslant 0,$$
jer je $(x^2 - y^2)^2 \geqslant 0$, $(x - y)^2 \geqslant 0$ i $\left(x + \frac{1}{2}y \right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geqslant 0$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Primjer 5. Za sve realne brojeve x, y i z takve da je $x > y > z$ vrijedi nejednakost
$$xy(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3) + yz(y^3 - y^2z + yz^2 - z^3) + zx(z^3 - z^2x + zx^2 - x^3) \geqslant 0. \quad (8)$$
Dokaz. Lijevu stranu L redom transformiramo:
$$L = xy[x^2(x - y) + y^2(x - y)] + z[z^3(x - y) - (x^4 - y^4) - z^2(x^2 - y^2) + z(x^3 - y^3)]$$
$$= (x - y)(x^3y + xy^3 + z^4 - zx^3 - x^2yz - xy^2z - y^3z - xz^3 - yz^3 + x^2z^2 + xyz^2 + y^2z^2)$$
$$= (x - y)[x^3(y - z) - z^3(y - z) + x(y^3 - z^3) - zx^2(y - z) - xyz(y - z) - zy^2(y - z)]$$
$$= (x - y)(y - z)(x^3 - z^3 + xy^2 - y^2z - x^2z + xz^2)$$
$$= (x - y)(y - z)[(x - z)(x^2 + xz + z^2) + y^2(x - z) - xz(x - z)]$$
$$= (x - y)(y - z)(x - z)(x^2 + y^2 + z^2) \ > \ 0,$$
jer zbog $x > y > z$ imamo $x - y > 0$, $y - z > 0$ i $x - z > 0$. Dakle, vrijedi dana nejednakost.

Primjer 6. Za sve $a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$ vrijedi nejednakost
$$(a^3 + b^3 + c^3) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geqslant (a + b + c)^2. \quad (9)$$

Dokaz. Kako je prema danim uvjetima $abc > 0$, nakon množenja s abc i sređivanja dana nejednakost prelazi u njoj ekvivalentnu
$$(a^3 + b^3 + c^3)(ab + bc + ca) \geqslant abc(a + b + c)^2,$$
odnosno
$$(a^4b - 2a^2bc^2 + bc^4) + (a^4c - 2a^2b^2c + b^4c) + (ab^4 - 2ab^2c^2 + ac^4) \geqslant 0,$$
tj.
$$b(a^2 - c^2)^2 + c(a^2 - b^2)^2 + a(b^2 - c^2)^2 \geqslant 0.$$
Kako je $a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$, ova nejednakost je istinita, što znači da je i njoj ekvivalentna nejednakost (9) također istinita. Jednakost u (9) dostiže se samo u slučaju $a = b = c$.

Primjer 7. Za pozitivne realne brojeve a, b i c vrijedi sljedeća nejednakost
$$\frac{a^2}{(a + b)(a + c)} + \frac{b^2}{(b + c)(b + a)} + \frac{c^2}{(c + a)(c + b)} \geqslant \frac{3}{4}. \quad (10)$$
Dokaz. Danu nejednakost možemo zapisati kao
$$\frac{a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b)}{(a + b)(b + c)(c + a)} = \frac{a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + ac^2 + a^2c}{2abc + a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + ac^2 + a^2} \geqslant \frac{3}{4},$$
a nakon sređivanja,
$$a(b - c)^2 + b(a - c)^2 + c(b - a)^2 \geqslant 0.$$
Posljednja nejednakost je istinita jer je $a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$. Zato je i njoj ekvivalentna nejednakost (10) također istinita. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$.

Primjer 8. Za realne brojeve $0 \leqslant x,\ y,\ z \leqslant 1$ vrijedi nejednakost

$$\frac{x}{7+y^3+z^3}+\frac{y}{7+z^3+x^3}+\frac{z}{7+x^3+y^3} \leqslant \frac{1}{3}. \tag{11}$$

Dokaz. Radi danog uvjeta vrijedi nejednakost

$$\begin{aligned} &\frac{x}{7+y^3+z^3}+\frac{y}{7+z^3+x^3}+\frac{z}{7+x^3+y^3} \\ \leqslant\ &\frac{x}{6+x^3+y^3+z^3}+\frac{y}{6+x^3+y^3+z^3}+\frac{z}{6+x^3+y^3+z^3} \\ =\ &\frac{x+y+z}{6+x^3+y^3+z^3}. \end{aligned} \tag{12}$$

Dokazat ćemo sada

$$\frac{x+y+z}{6+x^3+y^3+z^3} \leqslant \frac{1}{3}. \tag{13}$$

odnosno

$$3(x+y+z) \leqslant 6+x^3+y^3+z^3. \tag{14}$$

Promatrajmo nejednakost

$$3x \leqslant 2+x^3 \quad \text{tj.} \quad x^3-3x+2 \geqslant 0. \tag{15}$$

Lijeva strana se može faktorizirati $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$. Kako je $0 \leqslant x \leqslant 1$, vrijedi nejednakost (15). Analogno se dobivaju i ove dvije nejednakosti:

$$3y \leqslant 2+y^3, \tag{16}$$

$$3z \leqslant 2+z^3. \tag{17}$$

Zbrajanjem nejednakosti (15)–(17) dobivamo (13), odakle slijedi (11). Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x=y=z=1$.

Literatura

[1] N. Agahanov, O. Podlipsky, *Olimpiade matematice*, Rusesti Moscova, 1993–2002, Editura GIL (Zalsan – Romania), 2004.

[2] Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene* (2. izdanje), Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

[3] Š. Arslanagić, *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.

[4] V. Dragović, P. Mladenović, S. Ognjanović, *Pripremni zadaci za matematička takmičenja za učenike srednjih škola (sa rješenjima)*, Društvo matematičara Srbije, Materijali za mlade matematičare, Beograd, 1999.

[5] R. Đurković, R. Lazović, *Zbirka riješenih zadataka za takmičenje iz matematike (2. izdanje)*, Svjetlost – zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Sarajevo, 1990.