Temperiranje zvuka

Ivan Blašković, Marino Jurinović[1]

Sažetak. U ovom radu opisuje se temperiranje glazbe na fizikalni, matematički i glazbeni način, a sve je popraćeno programima u C++ jeziku i C jeziku za mikrokontroler Arduino. Programi se nalaze na
`http://ss-tehnicka-pu.skole.hr/upload/ss-tehnicka-pu/multistatic/226/programi-01.htm` ili `http://programi-01.catwebcloud.com/`

I. Uvodna pitanja

Odgovoriti na slijedeća pitanja s po jednom rečenicom.

Što je proporcionalnost (linearnost)?
Što je ton?
Što je zvuk?
Što je frekvencija?
Što je oktava?
Što je Arduino?
Što je C++?
Što je for petlja?
Što je while petlja?
Što je if-else?
Što je suprotno dijeljenju?
Što je suprotno množenju?
Što je suprotno potenciranju?
Što je kromatika?

Odgovori na većinu ovih pitanja pojavit će se u tekstu koji slijedi.

II. Računalo i glazba

Na računalu je moguće stvoriti različite glazbene efekte:

// Program 1.

// Program 2.

// Program 3.

// Program 4.

Poznaješ li ti neke glazbene efekte na računalu?

III. Fizikalni uvod

Od svih svojstava zvuka najviše ćemo se koncentrirati na frekvencije, ostala svojstva bit će uglavnom zanemarena.

A. Zvuk

Zvuk je promjena tlaka u elastičnoj okolini.

Zbog elastičnosti u materijalima promjene tlaka prate istitravanja.

[1] Autori su profesori u Tehničkoj školi Pula, Pula.

U užem smislu zvuk su sve sinusoidalne promjene tlaka s frekvencijama između 16 Hz i 16 kHz (ili u nekim knjigama 20 Hz do 20 kHz), tj. ono što prosječno uho čuje.

Sinus je valovita funkcija koja izgleda slično kao valovi na moru. (Za većinu primjera koji slijede čut će se pravokutni oblik tona!)

/ / Program 5.

B. Od infrazvuka do zvuka, počevši od pljeskanja

Pljeskanjem se mogu proizvoditi zvukovi u ritmu npr. 1 Hz.

Budući da promjene pritiska nisu sinusoidalne, zato pljesak (pljeskove) čujemo.

Zbog relativno velike mase ruku i relativno male snage u njima teško možemo ritam podignuti iznad 5 Hz (pokušajte nogama), ali ako upotrijebimo 5 prstiju i lupkanje po stolu, onda se ritam jedva "podiže" na cca 10 Hz.

No, postoji organ pomoću kojeg je moguće postići npr. 440 Hz.

Koji je to organ? Zar je taj organ snažniji od ruku?

To su glasnice!

C. Online zvukovi

`https://www.szynalski.com/tone-generator/`

D. Online klavir

`https://www.onlinepianist.com/virtual-piano`

E. Online gitara

`https://www.apronus.com/music/onlineguitar.htm`

F. Standardne frekvencije u evropskoj glazbi

`https://www.seventhstring.com/resources/notefrequencies.html`

G. Žičani instrumenti i oktava

Zamislimo trzanje napete žice kao osnovni ton.

Svaku žicu žičanog instrumenta možemo prepoloviti i čuti duplo veću frekvenciju što zajedno zovemo oktava (tonovi ne moraju biti odsvirani istovremeno).

Zadatak. Izmjeri metrom polovičnu duljinu jedne žice gitare, violine ili bilo koje dobro razapete žice i odsviraj nakon osnovnog tona njegovu oktavu!

H. Kakva je oktava?

Oktava je u Europi podijeljena na 12 dijelova, na Srednjem istoku na 53 dijela, a u južnoj Indiji na 72 dijela. . .

IV. Matematički dio

A. Pitagora – sve što čujem strpat ću u jednu oktavu

O Pitagori postoje mnoge priče, neke su najvjerojatnije izmišljene.

Jedna kaže da je jednom prolazio pored kovačnice i bio impresioniran zvukovima koji su dolazili iz nje. Počeo je gnjaviti kovača tako što je tražio da udara različitim čekićima po raznim komadima različitih oblika i masa, ali ga je na kraju kovač potjerao iz kovačnice jer su druge ozbiljnije mušterije čekale.

Pitagora je zatim počeo s Pitagorejcima proučavati zvukove.

Odabrao je jedan osnovni ton (frekvenciju).

Nakon odabiranja današnje oktave kao primarnog odnosa između dvaju tonova $(2/1)$, odabrao je nešto slično današnjoj tzv. čistoj kvinti (u daljnjem tekstu kvinta) kao sekundarni odnos $(3/2)$. (Pitagora i Pitagorejci su smatrali cijele brojeve jako važnima.)

Nakon toga iznio je tvrdnju: Sve frekvencije izvan primarnog odnosa mogu se prepolavljanjem ili udvostručivanjem "dovesti" unutar osnovne oktave i tamo promatrati kao da su iste, poput originala, bez obzira jesu li "došle" iz nekog višestruko dvostruko većeg ili višestruko dvostruko manjeg okruženja(!!).

Kad je Pitagora na taj način posložio 12 kvinti u nizu, počevši od osnovnog tona, došao je približno točno opet do osnovnog tona (početne frekvencije) i tako postavio 12 uzastopnih frekvencija u tzv. kromatsku ljestvicu.

Odnos "puta 2" je nazvan oktava, po uzoru na tadašnju glazbu, da glazba nije bila tako bitna vjerojatno bi se odnos nazvao duada (prema broju 2).

Evo programa koji prikazuju kako je Pitagora pronašao 12 tonova unutar osnovne oktave (Pitagora je radio pomoću valnih duljina u prostoru. Kako bismo pokazali isto pomoću frekvencija, služit ćemo se recipročnim vrijednostima):

//Program 6.

//Program 7.

//Program 8.

//Program 9.

//Program 10.

B. Lissajousove krivulje

Pomoću ovih krivulja može se jako dobro vidjeti da je odnos $2:1$ kod frekvencija izuzetan u odnosu na ostale odnose.

Grafički program za Lissajousove krivulje:

//Program 11.

C. Glazba – Temperiranje zvuka

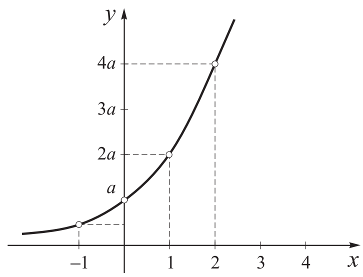
`https://en.wikipedia.org/wiki/Equal_temperament`

Pitagorin sustav zadržao se u evropskoj glazbi do cca 18. st.

Od tada je počeo prevladavati tzv. temperirani sustav u kojem je zadržana početna ideja o oktavi s odnosom od $1/2$ i poistovjećenost tonova unutar osnovne oktave s onima izvan nje, ali svi su tonovi u unutrašnjosti oktave po frekvenciji bili podređeni općem rubnom odnosu $1/2$, što je dovelo do relativno male, ali glazbenicima bitne promjene frekvencija u kromatici osnovne skale.

Zanimljivo je da su zapravo u povijesti uglavnom matematičari doprinijeli temperiranju glazbe što to je išlo postepeno. Spomenut ćemo samo neke: Aristoxenus (4. stoljeće prije nove ere), Vincenzo Galilei (sin mu je bio legendarni Galileo Galilei), Zhu Zaiyu (1584.), Simon Stevin (1585.).

D. Zasvirajmo oktave pomoću formule!



Ako kao osnovnu frekvenciju odaberemo $A_1 = 440$ Hz, onda neka početna višestruko duplo niža frekvencija može biti npr. 27.5 Hz, a završna višestruko udvostručena 14 080 Hz (okvir kojeg se pridržavamo je klasični opseg za one frekvencije koje prosječno ljudsko uho čuje: 20 Hz do 20 kHz).

Poznavanjem cijelih brojeva i potenciranja dolazimo do formule

$$y = 440 \cdot 2^x, \quad x \in \mathbb{Z}$$

gdje je x cijeli redni broj tona (od -4 do 6), a y pripadajuća frekvencija.

/ / Program 12.

Zadatak 1. Preprogramirati program 12 tako što naredbu "i+ + ;" preselimo odmah iza reda "while. . . ".

Zadatak 2. Koji su parovi vrijednosti (x, y) formule y [Hz] $= 440 \cdot 2^x$, za x od -4 do 6?

$f(-4) = 27.5$ [Hz]	$f(1) = 880$ [Hz]
$f(-3) = 55$ [Hz]	$f(2) = 1760$ [Hz]
$f(-2) = 110$ [Hz]	$f(3) = 3520$ [Hz]
$f(-1) = 220$ [Hz]	$f(4) = 7040$ [Hz]
$f(0) = 440$ [Hz]	$f(5) = 14\,080$ [Hz]

Svaku od dobivenih frekvencija nazivamo "ton a"; samo što svaki ton "pripada različitoj oktavi".

Zadatak 3. Koja je inverzna funkcija od $y = a^x$?

$$y = \log_a(x)$$

Zadatak 4. Je li sada jasno zašto su 16 Hz i 20 Hz u glazbi skoro iste frekvencije, slično kao što su 16 kHz i 20 kHz skoro iste frekvencije?

Da, zbog "logaritamske naravi uha" kod nižih frekvencija bolje razlikujemo promjene u frekvenciji.

Zadatak 5. Zašto 440 Hz kod glazbenika ima sličnu ulogu kao i 1 kHz kod tehničara?

Slično prethodnom zadatku; u glazbi se kao osnovna frekvencija definira 440 Hz (tzv. ton A_1), a u tehnici je često 1 kHz osnovna frekvencija za proučavanja i prikaze u akustici.

Zadatak 6. Može li se krivulja koja se nazire na slici $(y = a \cdot 2^x)$ prikazati i na pravcu?

Da! To se koristi u tehnici. Frekvenciju 1 kHz "smjestimo" u naizgledno ishodište, a zatim "desno" u jednakim razmacima unosimo oznake za 10 kHz, 100 kHz itd. "Lijevo" unosimo 100 Hz, zatim 10 Hz, 1 Hz itd.

E. Kromatska ljestvica – kako skladno podijeliti oktavu na 12 dijelova?

$$y = 440 \cdot 2^{\frac{x}{12}}, \quad x \in \mathbb{Z}$$

Inače, susjedne više frekvencije dobivaju se i množenjem s $2^{\frac{1}{12}}$.

/ / Program 13.

/ / Program 14.

V. Glazba

A. Tetrakord (niz od 4 tona)

/ / Program 15.

B. Pentatonska ljestvica (najlakše izvediva na crnim tipkama klavira)

/ / Program 16.

C. C-dur (najlakše izvediva na bijelim tipkama klavira, vesela ljestvica)

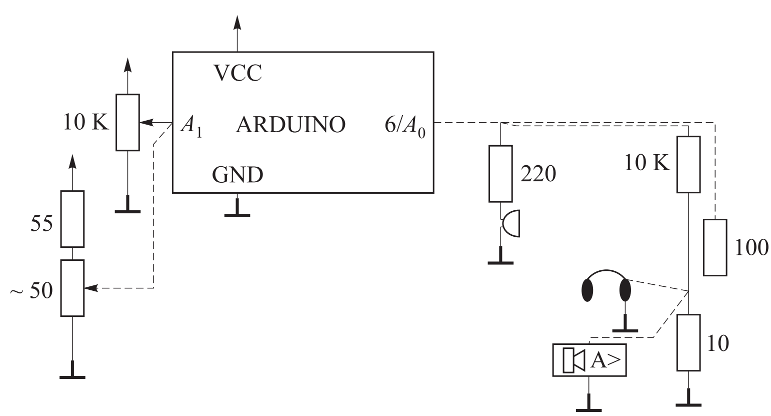
/ / Program 17.

/ / Program 18.

D. a-mol (tužna, ljestvica, bijele tipke)

/ / Program 19.

VI. Arduino



Opis sheme:

Na slici je hardware potreban za programe koji slijede.

Koristi se mikrokontroler ARDUINO MKR1000 (ali može i neki drugi; pritom treba malo promijeniti mjesta spajanja), potenciometar 10 kΩ, otpornici 55 Ω, 220 Ω, 10 kΩ, 100 Ω, 10 Ω, otpornička žica približne vrijednosti 50 Ω, buzzer, slušalice (ili zvučnik s pojačalom i/ ili pretpojačalom).

Otpornik 10 Ω je tzv. R_2 naponskog djelitelja pri čemu se otpornik 10 kΩ pojavljuje kao R_1 kada spajamo na pretpojačalo ili slušalice, a 100 Ω se pojavljuje kao R_1 ako spajamo na pojačalo (sve je optimizirano tako da se izlazni naponi 3.3 V ili 5 V iz standardnih mikrokontrolera dovedu u opseg do 100 mV za pretpojačalo ili do 1 V za pojačalo). Umjesto mikrofona ili zvučnika može se upotrijebiti buzzer s predotpornikom od 220 Ω.

Napomena. "Naponski djelitelj" je popularni naziv za posebnu vrstu naponskog izvora u kojem su dva elementa (otpornika najčešćih naziva R_1 i R_2) spojena u serijski spoj s nekim izvorom; a zatim da je na jedan od njih (tzv. R_2) spojeno nešto (tzv. trošilo) što ima dovoljno velik otpor da neće naročito poremetiti struje i napone početnog razmatranja.

Opis uporabe:

Nakon što se odabere i spoji jedan od sustava za slušanje (desni dio sheme), treba odabrati jedan od sustava za davanje podatka (mikrokontroler) o željenoj frekvenciji. Za probe je bolji potenciometar, ali za demonstracije posvećene većem broju ljudi može se uporabiti otpornička žica koja je rastegnuta (cca 1 m).

A. Kromatika

// Program 20.

B. C dur

// Program 21.

C. Ulazni napon proporcionalan frekvenciji

// Program 22.

D. Ulazni napon proporcionalan valnoj duljini (funkcionira poput violine)

// Program 23.

E. Ulazni napon proporcionalan valnoj duljini (funkcionira poput gitare)

// Program 24.

F. Ulazni napon proporcionalan rednom broju polutona

// Program 25.

VII. Zašto treba znati koliko traje poneka naredba?

Svi prethodni programi koji obrađuju periodu i frekvenciju za neiskusnog programera i/ili glazbenika zvuče relativno dobro.

Međutim, (glazbenim rječnikom rečeno) tonovi su "raštimani". Grešku, koja u ovom slučaju nije beznačajna, unosi trajanje naredbi `digitaWrite()` i trajanje drugih naredbi!

Program 26 pokazuje kako se (barem približno) može pronaći kolika je ta greška.

// Program 26.

VIII. Epilog

Proizvesti kvazisinusoidalni ton od 440 Hz (treba koristiti analogni izlaz), zvučat će poput klarineta.

/ / Program 27.

A. Zašto je glazbenicima kvarta (razmak od 4 tona) slično bitna kao i kvinta (razmak od 5 tonova)?

Zato što kada na završnom tonu kvinte započnemo kvartu, završit ćemo na istom tonu na kojem smo započeli kvintu.

B. Pitanje

Je li tablica frekvencija u programiranju bolja (brža) od formule $f = 440 \cdot 2^{\frac{z}{12}}$?

Da.

C. Neke dileme

1. a) Zašto je kod niskih frekvencije (za glazbenike) razlika od 4 Hz slična kao i za visoke frekvencije ona od 4 kHz (u nekim udžbenicima se spominje čujno područje kao raspon frekvencija 16 Hz do 16 kHz, a u nekim kao raspon od 20 Hz do 20 kHz)?

Zato što prosječno uho mnogo bolje razlikuje niske frekvencije od visokih.

b) Koja je neka srednja frekvencija zvuka, poput zelene boje kod boja, poput ekvatora na zemlji. . . ?

Za muzičare 440 Hz, a za tehničare 1 kHz.

c) Zar su 440 Hz i 1000 Hz zaista (barem donekle) na sredini između 20 Hz i 20 000 Hz?

Ako pravac frekvencija zamislimo kao neki plastični materijal (koji se može skupljati ili širiti po volji), onda se može zamisliti tzv. "logaritamski raspored po bazi 2" (ograničeno na sustav prirodnih brojeva poznatiji kao geometrijski niz) frekvencija na pravcu (niže frekvencije su relativno bliže, a visoke frekvencije su relativno razmaknute)!

Ako analiziramo samo oktave, počevši od osnovne glazbene frekvencije 440 Hz, (unutar čujnog područja za ljude), na "jednakim su razmacima" (u Hertzima):

$$22.5,\ 55,\ 110,\ 220,\ \mathbf{440},\ 880,\ 1760,\ 3520,\ 7040,\ 14\,080.$$

"Sredina" ovog geometrijskog(!) niza, razmatrajući položaj članova, je negdje između 440 Hz i 880 Hz; upravo se "tu negdje" nalaze osnovne frekvencije (440 Hz je osnovna fekvencija za glazbenike, a 1 kHz je osnovna frekvencija za elektrotehničare – test signal za radio i TV, prijemnike i odašiljače).

Na taj način su i frekvencije 16 Hz i 20 Hz slično bliske kao i frekvencije od 16 kHz i 20 kHz, iako je aritmetička razlika u prvom slučaju 4 Hz, a u drugom slučaju 4 kHz.

2. Zašto u C+ + "čujem" i frekvencije koje su veće od 20 kHz?

a) Registar u kojem računalo pamti zadanu frekvenciju ima određeni broj bitova. Ako u njega nastojimo upisati neki veći broj od onog koji može upamtiti, onda bitove koje smo nastojali upisati izvan njegova kapaciteta on "ne vidi" i praktično smo zapisali neku nižu frekvenciju (slični efekt nastaje kada nekom velikom cijelom broju, tipa int i slično, u računalu dodamo relativno veliki broj, tada je kao rješenje moguć neki negativan broj).

b) Računalo proizvodi relativno visoku frekvenciju pravokutnog oblika (koji ne čujemo), ali prva promjena se čuje!!!

3. Jesu li naredbe a) `t=int(1/f/2*1000000);` i b) `t=int(1/2/f*1000000)` iste?

Odgovor. Nisu! Kada se najprije dijeli 1 sa 2 (slučaj b)), onda je privremeno rješenje 0 i ukupni rezultat 0.