ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 28. veljače 2021. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 4/284.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 144.

A) Zadatci iz matematike

3777. Dokaži da je broj

$$\frac{5^{125}-1}{5^{25}-1}$$

složen.

3778. Koliko ima trojki nenegativnih cijelih brojeva (x, y, z) koji zadovoljavaju jednadžbu

$$xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 2021?$$

3779. Nađi sva rješenja jednadžbe

$$x^2 + 4 \cdot \left(\frac{x}{x-2}\right)^2 = 45.$$

3780. Riješi jednadžbu

$$5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250.$$

3781. Nađi realne brojeve x_1, x_2, ..., x_n za koje vrijedi

$$\sqrt{x_1 - 1^2} + 2\sqrt{x_2 - 2^2} + \ldots + n\sqrt{x_n - n^2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

3782. Neka su a, b, c pozitivni brojevi takvi da je $a^2 + b^2 + c^2 = 5$. Dokaži nejednakost

$$\frac{a^3}{2b+3c} + \frac{b^3}{2c+3a} + \frac{c^3}{2a+3b} \geq 1.$$

3783. U pravokutnom trokutu ABC vrijedi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{h} = 1$, gdje su a i b duljine kateta i h duljina visine na hipotenuzu, prirodni brojevi. Kolike su duljine stranica tog trokuta?

3784. Dan je trokut ABC i dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ (D i E su na $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$) koje se sijeku u točki F. Površine trokuta BDF, AFE, ABF su redom jednake 2, 3, 4. Kolika je površina četverokuta $CEFD$?

3785. U pravokutnom trokutu ABC jedinične duljine hipotenuze $\overline{AB}$, kut uz vrh A je jednak 30°. Središte upisane mu kružnice je točka S. Simetrala kuta $\sphericalangle CSB$ dijeli stranicu $\overline{BC}$ na dva dijela. Izračunaj njihove duljine.

3786. Oko trokuta kojemu su duljine stranica $a = 15$ cm, $b = 20$ cm, $c = 7$ cm, opisana je kružnica. Izračunaj površinu odsječka kružnice kojemu je a tetiva.

3787. Pravac $3x + 4y = 12$ siječe elipsu $9x^2 + 16y^2 = 144$ u točkama A i B. Koliko na elipsi ima točaka P takvih da je površina trokuta PAB jednaka 3?

3788. Zadan je niz $a_0 = a_1 = 1$ i za $n \geq 1$

$$a_{n+1} = \frac{a_1^2}{a_0} + \frac{a_2^2}{a_1} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_{n-1}}.$$

Odredi opći član niza.

3789. Grupa turista je posjetila izložbu na kojoj je bilo 200 slika. Nijedan od posjetitelja nije vidio sve slike, ali je svaku od njih vidio barem jedan od njih. Dokaži da postoji par posjetitelja A, B i par slika α, β tako da je A vidio α ali ne i β, dok je B vidio β ali ne i α.

3790. Neka su α, β, γ kutovi trokuta. Dokaži jednakost

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = \sin^2\gamma.$$

B) Zadatci iz fizike

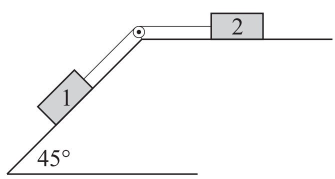
OŠ – 478. U menzuri kojoj je unutarnja površina dna 5 cm^2 je voda. Razina vode je udaljena 45 mm od gornjeg ruba menzure. Učenik ima staklene kuglice mase 5 g. Koliko takvih kuglica može staviti u menzuru prije nego se voda počne prelijevati? Gustoća stakla je 2500 kg/m^3.

OŠ – 479. Opruga je u neopterećenom stanju dugačka 15 cm. Kad se pomoću nje vuče drveni kvadar po suhom stolu njena je duljina 19 cm, a kad se taj isti kvadar vuče po mokrom stolu duljina je opruge 18 cm. Usporedite koeficijente trenja po mokrom i suhom stolu. Koliko je u postotcima voda smanjila koeficijent trenja?

OŠ – 480. Ploča električnog štednjaka ima dvije spirale. Kad je uključena samo prva, litra vode zakuha za 5 minuta, a kad je uključena samo druga spirala, litra vode zakuha za 7 minuta. Koliko će vremena trebati da ista količina vode zakuha kad se uključe obje spirale? Jesu li one spojene serijski ili paralelno? Zanemarite zagrijavanje posude. Specifični toplinski kapacitet vode je $4200\ \mathrm{J/kgK}$, njena je gustoća $1000\ \mathrm{kg/m^3}$, napon električne mreže je 230 V.

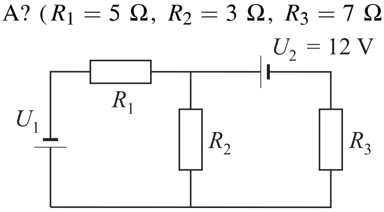
OŠ – 481. Lopta pri svakom udaru o tlo 40 posto svoje kinetičke energije pretvori u toplinu. Na koju će visinu odskočiti nakon drugog odskoka ako je ispuštena s visine 2 metra?

1742. Koliki najmanje mora biti koeficijent trenja μ, isti za oba tijela na slici, da se sistem tijela ne počne gibati? Masu niti i koloture zanemariti. ($m_1 = 3.2$ kg, $m_2 = 1$ kg)



1743. S koje smo visine pustili tijelo bez početne brzine, ako je u posljednjoj sekundi pada prevalilo 36 % ukupnog puta? ($g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$, otpor zraka zanemariti)

1744. Koliki je napon U_1 izvora na shemi ako kroz njega (i kroz otpornik R_1) teče struja 1.2 A? ($R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $R_3 = 7\ \Omega$)



1745. Element lantan u prirodi ima dva izotopa, ^{139}La i ^{138}La, od kojih je potonji radioaktivan s vremenom poluraspada 105 milijardi godina. Ako je aktivnost 100 grama čistog lantana 81.56 bekerela (Bq), koliki su udjeli dvaju izotopa u lantanu?

1746. Zvijezde *Castor* i *Pollux* u zviježđu blizanaca su redom 37 i 32 puta sjajnije od našeg Sunca. Na kojoj se udaljenosti od njih može očekivati planete jednako izložene toplini matične zvijezde kao Zemlja? Udaljenost Zemlje od Sunca je 149.6 milijuna km.

1747. Stožac visine h i radijusa osnovke r načinjen je od homogenog materijala i postavljen osnovkom na podlogu s kojom je koeficijent trenja μ. Podlogu polagano naginjemo tako da dobivamo kosinu kojoj se kut nagiba α polagano povećava. Uz koji će se uvjet stožac prevaliti prije nego proklizne na podlozi?

1748. Plemeniti plin ksenon (Xe) ima vrelište na $-108\,^\circ\mathrm{C}$. Koliku će najveću gustoću postići plinovita faza ksenona pri uobičajenom tlaku (101 325 Pa), na temperaturi neposredno iznad vrelišta? Atomska masa ksenona je $131.3\ \mathrm{g/mol}$.

C) Rješenja iz matematike

3749. *Dokaži da za pozitivne brojeve* a, b, c *vrijedi nejednakost*

$$\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3} \geq \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}.$$

Prvo rješenje. Primjenom A-G nejednakosti za tri broja $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{a}$ imamo:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}$$

$$\Longrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 3. \qquad (1)$$

Krenimo od očite nejednakosti:

$$\left(\sqrt{\frac{a^3}{b^3}} - \sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{b^3}{c^3}} - \sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{c^3}{a^3}} - \sqrt{\frac{c}{a}}\right)^2 + \frac{(a-b)^2}{b^2} + \frac{(b-c)^2}{c^2} + \frac{(c-a)^2}{a^2} \geqslant 0.$$

Odavde, zbog (1) imamo:

$$\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3} - \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{c^2} - \frac{c^2}{a^2} + 3 - \frac{a}{b} - \frac{b}{c} - \frac{c}{a} \geqslant 0$$

tj. $$\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{c^3} + \frac{c^3}{a^3} \geqslant \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}.$$

Oliver Kukas (4),
Gimnazija A. G. Matoša, Zabok

Drugo rješenje. Iz A-G nejednakosti imamo:

$$\frac{a^3}{b^3}+\frac{a^3}{b^3}+1\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3}\cdot\frac{a^3}{b^3}\cdot 1}=3\cdot\frac{a^2}{b^2}$$

$$\frac{b^3}{c^3}+\frac{b^3}{c^3}+1\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{c^3}\cdot\frac{b^3}{c^3}\cdot 1}=3\cdot\frac{b^2}{c^2}$$

$$\frac{c^3}{a^3}+\frac{c^3}{a^3}+1\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{a^3}\cdot\frac{c^3}{a^3}\cdot 1}=3\cdot\frac{c^2}{a^2}$$

$$\begin{aligned}&\Longrightarrow\ 2\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3}\right)+3\\&\geqslant 2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)+\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)\\&\geqslant 2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)+3\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{b^2}{c^2}\cdot\frac{c^2}{a^2}}\\&=2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)+3\\&\Longrightarrow\ \frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3}\geqslant\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}.\end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a=b=c$.

Ur.

3750. *Nađi sva cjelobrojna rješenja x, y jednadžbe $(x^2+y)(x+y^2)=(x-y)^3$ različita od nule.*

Rješenje. Sređivanjem jednadžbe dobivamo:

$$2y^2+(x^2-3x)y+3x^2+x=0.$$

Dobili smo kvadratnu jednadžbu po nepoznanici y, čija su rješenja:

$$y_{1,2}=\frac{3x-x^2\pm(x+1)\sqrt{x(x-8)}}{4}. \qquad (1)$$

Broj $x(x-8)$ mora biti potpun kvadrat, tj.

$$\begin{aligned}&x(x-8)=k^2\\&\Longrightarrow\ x^2-8x=k^2\\&\Longrightarrow\ x^2-8x+16-k^2=16\\&\Longrightarrow\ (x-4)^2-k^2=16\\&\Longrightarrow\ (x-4-k)(x-4+k)=16.\end{aligned}$$

Razlikujemo slučajeve:

$$\left.\begin{aligned}x-4-k&=16\\x-4+k&=1\end{aligned}\right\}\ x\notin\mathbb{Z}$$

$$\left.\begin{aligned}x-4-k&=1\\x-4+k&=16\end{aligned}\right\}\ x\notin\mathbb{Z}$$

$$\left.\begin{aligned}x-4-k&=8\\x-4+k&=2\end{aligned}\right\}\ x=9$$

$$\left.\begin{aligned}x-4-k&=2\\x-4+k&=8\end{aligned}\right\}\ x=9$$

$$\left.\begin{aligned}x-4-k&=-16\\x-4+k&=-1\end{aligned}\right\}\ x\notin\mathbb{Z}$$

$$\left.\begin{aligned}x-4-k&=-1\\x-4+k&=-16\end{aligned}\right\}\ x\notin\mathbb{Z}$$

$$\left.\begin{aligned}x-4-k&=-8\\x-4+k&=-2\end{aligned}\right\}\ x=-1$$

$$\left.\begin{aligned}x-4-k&=-2\\x-4+k&=-8\end{aligned}\right\}\ x=-1$$

$$\left.\begin{aligned}x-4-k&=4\\x-4+k&=4\end{aligned}\right\}\ x=8$$

$$\left.\begin{aligned}x-4-k&=-4\\x-4+k&=-4\end{aligned}\right\}\ x=0$$

Dakle, $x\in\{-1,0,8,9\}$ pa iz (1) slijede rješenja: $(x,y)\in\{(0,0),(-1,-1),(8,-10),(9,-6),(9,-21)\}$.

Oliver Kukas (4), Zabok

3751. *Ako su a, b, x, y pozitivni brojevi, dokaži nejednakost*

$$\frac{a^4}{x}+\frac{b^4}{y}\geq\frac{(a+b)^4}{4(x+y)}.$$

Rješenje. Množeći danu nejednakost s $4xy(x+y)$ (>0) imamo niz ekvivalentnih nejednakosti:

$$\begin{aligned}&4a^4y(x+y)+4b^4x(x+y)\geqslant xy(a+b)^4\\\Longleftrightarrow\ &4a^4xy+4a^4y^2+4b^4x^2+4b^4xy\\&\geqslant a^4xy+4a^3bxy+6a^2b^2xy\\&\quad+4ab^3xy+b^4xy\\\Longleftrightarrow\ &3a^4xy+4a^4y^2+4b^4x^2+3b^4xy\\&-4a^3bxy-6a^2b^2xy-4ab^3xy\geqslant 0\\\Longleftrightarrow\ &3xy(a^4-2a^2b^2+b^4)\\&+4(a^4y^2+b^4x^2-a^3bxy-ab^3xy)\geqslant 0\\\Longleftrightarrow\ &3xy(a^2-b^2)^2+4(a^4y^2-2a^2b^2xy\\&+b^4x^2-a^3bxy-ab^3xy+2a^2b^2xy)\geqslant 0\end{aligned}$$

$$\iff 4(a^2y-b^2x)^2+3xy(a-b)^2(a+b)^2$$
$$-4abxy(a-b)^2 \geqslant 0$$
$$\iff 4(a^2y-b^2x)^2+xy(a-b)^2$$
$$\cdot[3(a+b)^2-4ab] \geqslant 0$$
$$\iff 4(a^2y-b^2x)^2+xy(a-b)^2$$
$$\cdot[(a+b)^2+2(a^2+b^2)] \geqslant 0,$$

a za pozitivne brojeve ova nejednakost je očito točna. Time je i zadana nejednakost dokazana.

Oliver Kukas (4), Zabok

3752. *Odredi sva rješenja jednadžbe*

$$\log_x 10+2\log_{10x}10+3\log_{100x}10=0,$$
$$x>0,\ x\neq 1.$$

Rješenje. Jednadžbu transformiramo:

$$\frac{1}{\log x}+2\cdot\frac{1}{\log 10x}+3\cdot\frac{1}{\log 100x}=0$$
$$\frac{1}{\log x}+\frac{2}{1+\log x}+\frac{3}{2+\log x}=0.$$

Uvedemo supstituciju $t=\log x$:

$$\frac{1}{t}+\frac{2}{1+t}+\frac{3}{2+t}=0\ /\ \cdot t(t+1)(t+2)$$
$$t\neq 0,\ t\neq -1,\ t\neq -2$$
$$3t^2+5t+1=0$$
$$t_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{6}\quad \text{tj.}\quad x_{1,2}=10^{\frac{-5\pm\sqrt{13}}{6}}.$$

Oliver Kukas (4), Zabok

3753. *Neka je ABCD konveksan četverokut takav da je $\sphericalangle DAC=\sphericalangle DBC$, M i N su polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, tim redom, te $O=AC\cap BD$, a P i Q su ortogonalne projekcije od O na AD i BC. Dokaži $MN\perp PQ$.*

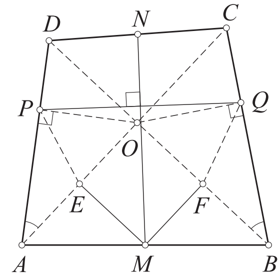
Rješenje. Neka je $ABCD$ dani četverokut kao na slici. Osim oznaka koje stoje u uvjetu zadatka, još označimo s E i F polovišta dužina $\overline{AO}$ i $\overline{BO}$, tim redom.

Kako je $\overline{MF}$ srednjica $\triangle ABO$ vrijedi $MF\|EO$, te isto tako $ME\|OF$ tj. četverokut $MFOE$ je paralelogram. Još je

$$|MF|=\frac{1}{2}|AO|=|PE| \tag{1}$$

$$|ME|=\frac{1}{2}|OB|=|QF|. \tag{2}$$

U obje jednakosti lijevi dio slijedi prema poučku o srednjici trokuta, a desni iz činjenice da je težišnica pravog kuta u pravokutnom trokutu jednaka polovici hipotenuze (neposredno iz Talesovog poučka).



Nadalje je

$$\begin{aligned}\sphericalangle MEP&=\sphericalangle MEO+\sphericalangle OEP\\&=\sphericalangle MEO+2\sphericalangle DAC\\&=\sphericalangle MFO+2\sphericalangle DBC\\&=\sphericalangle MFO+\sphericalangle OFQ=\sphericalangle MFQ.\end{aligned} \tag{3}$$

Iz (1), (2) i (3) slijedi $\triangle PEM\cong\triangle MFQ$, a odavde $|MP|=|MQ|$. Sve ovo je bio slučaj ako se točke E i F nalaze van kuta PMQ. Slučaj ako se one nalaze u njegovoj nutrini analiziramo analogno. Na potpuno isti način, gledano iz točke N dobivamo da je $|NP|=|NQ|$. Dakle, točke M i N leže na simetrali dužine $\overline{PQ}$ pa je $MN\perp PQ$.

Oliver Kukas (4), Zabok

3754. *Nad hipotenuzom $\overline{AB}$ i katetom $\overline{BC}$ pravokutnog trokuta ABC, s vanjske strane su konstruirani kvadrati ABDE i CBFG. Dokaži da se pravci CE i AF sijeku na stranici kvadrata CPQR upisanog u trokut ABC.*

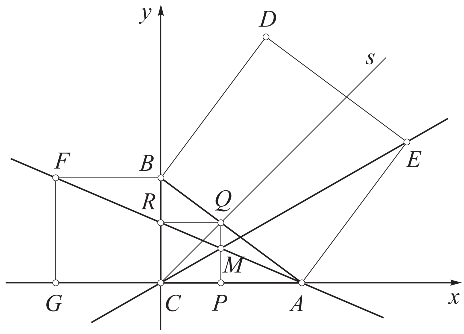
Prvo rješenje. Postavimo pravokutni trokut ABC u koordinatni sustav tako da točke A, B i C imaju koordinate $A(b,0)$, $B(0,a)$, $C(0,0)$. Prema uvjetima zadatka koordinate točaka D, E, F i G su: $D(a,a+b)$, $E(a+b,b)$, $F(-a,a)$ i $G(-a,0)$.

Pravac AF prolazi kroz točke $A(b,0)$ i $F(-a,a)$, pa je njegova jednadžba:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),$$
$$y-0=\frac{a-0}{-a-b}(x-b),$$

$$y=-\frac{a}{a+b}(x-b)$$

$$AF\ldots\ y=-\frac{a}{a+b}x+\frac{ab}{a+b}.$$



Jednadžba pravca koji prolazi točkama $C(0,0)$ i $E(a+b,b)$ glasi:

$$CE\ldots\ y=\frac{b}{a+b}x.$$

Iz jednakosti $-\frac{a}{a+b}x+\frac{ab}{a+b}=\frac{b}{a+b}x$ slijedi $x=\frac{ab}{a+b}$. Zamjenom x u jednadžbi $y=\frac{a}{a+b}x$ s $x=\frac{ab}{a+b}$ dobivamo

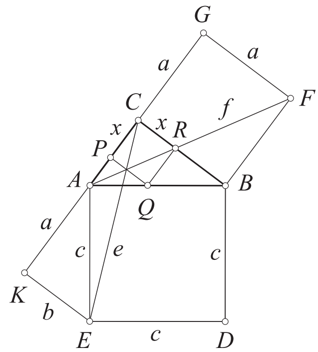
$$y=\frac{ab^2}{(a+b)^2}.$$

Sjecište pravaca AF i CE ima koordinate: $M\left(\frac{ab}{a+b},\frac{ab^2}{(a+b)^2}\right)$. Vrh kvadrata Q je presjek simetrale kuta ACB i pravca $AB\ldots y=-\frac{a}{b}x+a$. Iz vrha Q spustimo okomice na koordinatne osi i dobivamo dva ostala vrha kvadrata P i R. Koordinate vrhova P i Q kvadrata su: $P\left(\frac{ab}{a+b},0\right)$, $Q\left(\frac{ab}{a+b},\frac{ab}{a+b}\right)$.

Točka M leži na pravcu PR. Kako je $0<\frac{ab^2}{(a+b)^2}<\frac{ab}{a+b}$ točka M leži na stranici $\overline{PQ}$ kvadrata $CPQR$.

Borna Cesarec (2),
Srednja škola Krapina, Krapina

Drugo rješenje. Neka su a, b, c duljine stranica trokuta, a C, P, Q, R vrhovi upisanog kvadrata.



Pravac $e=CE$ siječe $\overline{PQ}$ u točki T_1. Iz sličnosti trokuta CPT_1 i CKE imamo

$$\frac{|CP|}{|CK|}=\frac{|PT_1|}{|KE|}\quad\text{tj.}$$

$$\frac{x}{a+b}=\frac{|PT_1|}{b}\implies|PT_1|=\frac{bx}{a+b}.$$

Pravac $f=AF$ siječe stranicu $\overline{PQ}$ kvadrata u točki T_2. Tada iz sličnosti trokuta PAT_2 i GAF imamo

$$\frac{|PT_2|}{|GF|}=\frac{|AP|}{|AG|}\implies\frac{|PT_2|}{a}=\frac{b-x}{a+b}$$

$$\implies|PT_2|=\frac{a(b-x)}{a+b}$$

$$|PT_2|=|PT_1|\iff x=\frac{ab}{a+b}.$$

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}ab$$

$$\begin{aligned}P_{ABC}&=P_{PQRC}+P_{AQP}+P_{QBR}\\&=x^2+\frac{1}{2}x(b-x)+\frac{1}{2}x(a-x)\\&=\frac{1}{2}x(a+b)\implies x=\frac{ab}{a+b}.\end{aligned}$$

Ur.

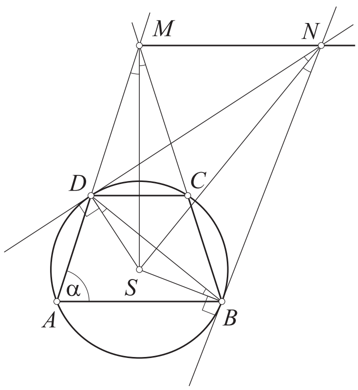
3755. *Trapez $ABCD$ upisan je u kružnicu. Produžeci stranica $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ sijeku se u točki M. Tangente na tu kružnicu u točkama B i D sijeku se u točki N. Dokaži $MN\parallel AB$.*

Rješenje. Trapez $ABCD$ je jednakokračan. Neka je $\alpha=\sphericalangle DAB=\sphericalangle ABC$, $|AB|>|CD|$. Tada je

$$\sphericalangle SMA=\sphericalangle BMS=\frac{\pi}{2}-\alpha,\quad\sphericalangle BMA=\pi-2\alpha.$$

Četverokut $SBND$ je tetivan, pa je

$$\sphericalangle SBD=\sphericalangle BDS=\sphericalangle BNS=\sphericalangle SND.$$



Kut $\sphericalangle DSB$ je središnji, a $\sphericalangle DAB$ je obodni pa je $\sphericalangle DSB = 2\alpha$, $\sphericalangle BND = \pi - \sphericalangle DSB = \pi - 2\alpha$.
Odavde je $\sphericalangle BMD = \sphericalangle BND$, tj.

$$\sphericalangle SMD = \sphericalangle SND = \sphericalangle SBD.$$

Nadalje, četverokut $DBNM$ je tetivan (zbog $\sphericalangle BND = \sphericalangle BMD$). Slijedi

$$\begin{aligned}\sphericalangle NMD &= \pi - \sphericalangle DBN \\ &= \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \sphericalangle SBD\right) = \frac{\pi}{2} + \sphericalangle SBD \\ &= \frac{\pi}{2} + \sphericalangle SMA = \sphericalangle CDA.\end{aligned}$$

Sada je $MD \| DA$, $\sphericalangle NMD = \sphericalangle CDA$, odakle slijedi $MN \| DC$ i konačno $MN \| AB$.

Oliver Kukas (4), Zabok

3756. *Nađi jednadžbu kružnice devet točaka trokuta ABC čiji su vrhovi* $A(2,4)$, $B(4,6)$ *i* $C(6,6)$.

Rješenje. Feuerbachova kružnica, kružnica devet točaka ili Eulerova kružnica prolazi kroz ovih devet kružnica:

– tri polovišta stranica
– tri nožišta visina trokuta
– tri polovišta dužina koje spajaju vrhove s ortocentrom.

Njeno središte je polovište dužine koja spaja ortocentar trokuta sa središtem tom trokutu opisane kružnice.

Dakle, dovoljno je naći polovišta stranica i naći jednadžbu kružnice kroz te tri točke. Izračunamo $P_1(3,5)$, $P_2(4,5)$ i $P_3(5,6)$. Opća jednadžba kružnice: $(x-p)^2+(y-q)^2 = r^2$. Dobivamo:

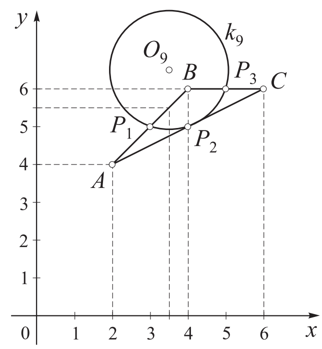
$$\begin{aligned} I. \quad & (3-p)^2 + (5-q)^2 = r^2 \\ II. \quad & (4-p)^2 + (5-q)^2 = r^2 \\ III. \quad & (5-p)^2 + (6-q)^2 = r^2 \end{aligned}$$

$II. - I. \implies 7 - 2p = 0$ tj. $p = \dfrac{7}{2}$

$III. - II. \implies 10 - p - q = 0$ tj. $q = \dfrac{13}{2}$

odakle je $O_9\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{13}{2}\right)$ i

$$k_9 \ldots \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$



Radi provjere, lako nađemo koordinate nožišta visina: $N_1(5,7)$, $N_2(2,6)$ i $N_3\left(\dfrac{22}{5}, \dfrac{26}{5}\right)$ i provjerimo da sva tri zadovoljavaju jednadžbu kružnice.

Ortocentar je $H(2,10)$ i polovišta dužina $\overline{AH}$, $\overline{BH}$ i $\overline{CH}$ su redom $Q_1(2,7)$, $Q_2(3,8)$ i $Q_3(4,8)$. Ponovno lako provjerimo da i njihove koordinate zadovoljavaju jednadžbu kružnice k_9.

Oliver Kukas (4), Zabok

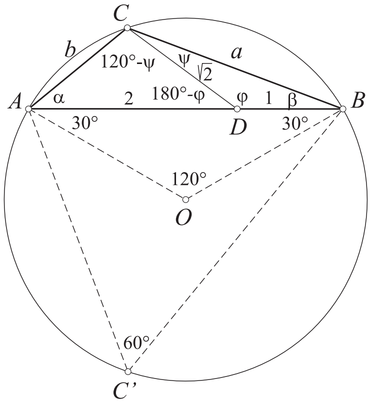
3757. *Tetivi* $\overline{AB}$ *pripada trećina cijele kružnice. Točka C je na pripadnom luku, a D je na tetivi* $\overline{AB}$. *Odredi površinu trokuta ABC ako je* $|AD| = 2$ *cm*, $|BD| = 1$ *cm i* $|CD| = \sqrt{2}$ *cm*.

Prvo rješenje. Kako tetivi $\overline{AB}$ pripada trećina cijele kružnice, to je $\sphericalangle AOB = 120^\circ$. Tada je obodni kut nad istom tetivom $\sphericalangle AC'B = 60^\circ$ i kut s druge strane te tetive $\sphericalangle ACB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Kosinusov poučak za $\triangle ABC$ daje:

$$3^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120^\circ$$

$$\Longrightarrow a^2 + b^2 = 9 - ab. \qquad (1)$$



Iz $\triangle ACD$ i $\triangle BCD$ je po kosinusovom poučku:

$$b^2 = 2^2 + \sqrt{2}^2 - 2\cdot 2\sqrt{2}\cos(180^\circ - \varphi)$$

$$\underline{a^2 = \sqrt{2}^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot\sqrt{2}\cos\varphi}$$

$$b^2 = 6 + 4\sqrt{2}\cos\varphi$$

$$\underline{a^2 = 3 - 2\sqrt{2}\cos\varphi}$$

$$\Longrightarrow 2a^2 + b^2 = 12. \qquad (2)$$

Iz četverokuta $OACB$ lako vidimo $\alpha + \beta = 60^\circ$. Sada koristimo sinusov poučak za $\triangle ABC$ pa je:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{3}{\sin 120^\circ} \Longrightarrow a = \sqrt{3}\sin\alpha \qquad (3)$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{3}{\sin 120^\circ} \Longrightarrow$$

$$b = \frac{6}{\sqrt{3}}\sin(60^\circ - \alpha)$$

$$= 3\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha. \qquad (4)$$

Sada (3) i (4) uvrstimo u (2) pa slijedi:

$$24\sin^2\alpha + 9\cos^2\alpha$$

$$- 6\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha + 3\sin^2\alpha = 12$$

$$27\sin^2\alpha + 9\cos^2\alpha$$

$$- 6\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha = 12$$

$$27(1 - \cos^2\alpha) + 9\cos^2\alpha$$

$$- 6\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha = 12$$

$$-18\cos^2\alpha - 6\sqrt{3}\sqrt{1 - \cos^2\alpha}\cos\alpha + 15 = 0$$

$$5 - 6\cos^2\alpha = 2\sqrt{3}\cos\alpha\sqrt{1 - \cos^2\alpha}\ /\ ^2$$

$$(5 - 6\cos^2\alpha \geqslant 0) \qquad (*)$$

$$\Longrightarrow 48\cos^4\alpha - 72\cos^2\alpha + 25 = 0$$

$$(\cos^2\alpha)_{1,2} = \frac{72 \pm 8\sqrt{6}}{96}$$

$$\overset{\text{zbog } (*)}{\Longrightarrow} \cos^2\alpha = \frac{9 - \sqrt{6}}{12} \quad \text{tj.}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{9 - \sqrt{6}}}{2\sqrt{3}} \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3 + \sqrt{6}}}{2\sqrt{3}}.$$

Sada je:

$$a \overset{(3)}{=} 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3 + \sqrt{6}}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3 + \sqrt{6}}$$

$$b \overset{(4)}{=} 3\cdot\frac{\sqrt{9 - \sqrt{6}}}{2\sqrt{3}} - \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3 + \sqrt{6}}}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{9 - \sqrt{6}} - \sqrt{3 + \sqrt{6}}}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{7 + 2\sqrt{6}} - 3 - \sqrt{6}}{2\sqrt{3 + \sqrt{6}}}$$

$$= \frac{3\sqrt{(\sqrt{6} + 1)^2} - 3 - \sqrt{6}}{2\sqrt{3 + \sqrt{6}}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3 + \sqrt{6}}}.$$

Na kraju koristimo formulu $P = \dfrac{abc}{4r}$, a znamo da je $c = 3$ i prema kosinusovu poučku za $\triangle ABO$ je

$$3^2 = r^2 + r^2 - 2r\cdot r\cos 120^\circ \Longrightarrow r = \sqrt{3}\text{ cm.}$$

$$P = \frac{1}{4\sqrt{3}}\sqrt{3 + \sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3 + \sqrt{6}}}\cdot 3 = \frac{3\sqrt{2}}{4}\text{ cm}^2.$$

Oliver Kukas (4), Zabok

Drugo rješenje. $\sphericalangle ACB = 120^\circ$. Primjenom kosinusova poučka za trokute ABC, ACD i BCD dobivamo:

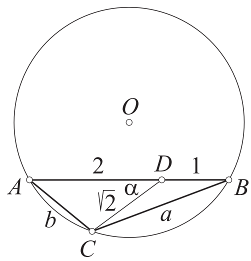
$$9 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120^\circ$$

$$b^2 = 4 + 2 - 2\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cos\alpha$$

$$\underline{a^2 = 1 + 2 - 2\cdot 1\cdot\sqrt{2}\cos(\pi - \alpha)}$$

$$9 = a^2 + b^2 + ab$$

$$b^2 = 6 - 4\sqrt{2}\cos\alpha$$
$$a^2 = 3 + 2\sqrt{2}\cos\alpha$$
$$\Longrightarrow\ a^2 + b^2 = 9 - ab$$
$$2a^2 + b^2 = 12$$
$$\Longrightarrow\ a = \sqrt{3 + ab}, \quad b = \sqrt{2(3 - ab)}.$$

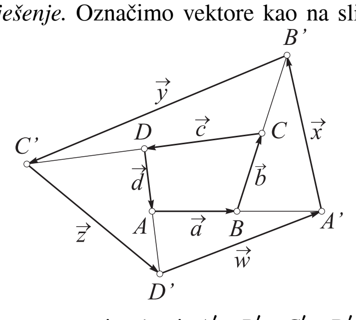


$$P_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}ab$$
$$ab = \sqrt{2(3+ab)(3-ab)} = \sqrt{2(9 - a^2b^2)}$$
$$a^2b^2 = 18 - 2a^2b^2 \ \Longrightarrow\ ab = \sqrt{6}$$
$$\Longrightarrow\ P_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{6} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Ur.

3758. *Dan je četverokut $ABCD$. Točke A', B', C', D' su na polupravcima AB, BC, CD, DA tako da je $\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC'} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{DA}$. Ako su poznati vrhovi četverokuta $A'B'C'D'$, samo pomoću ravnala i šestara rekonstruiraj četverokut $ABCD$.*

Rješenje. Označimo vektore kao na slici.



Kako su poznati vrhovi A', B', C', D' time su zadani vektori $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ i $\vec{w}$. Vidimo:

$$\vec{x} = 2\vec{b} - \vec{a}, \qquad \vec{y} = 2\vec{c} - \vec{b},$$
$$\underline{\vec{z} = 2\vec{d} - \vec{c}, \qquad \vec{w} = 2\vec{a} - \vec{d}}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= 2\vec{b} - \vec{x} = 2(2\vec{c} - \vec{y}) - \vec{x}\\
&= 4\vec{c} - 2\vec{y} - \vec{x} = 4(2\vec{d} - \vec{z}) - 2\vec{y} - \vec{x}\\
&= 8\vec{d} - 4\vec{z} - 2\vec{y} - \vec{x}\\
&= 8(2\vec{a} - \vec{w}) - 4\vec{z} - 2\vec{y} - \vec{x}\\
&= 16\vec{a} - 8\vec{w} - 4\vec{z} - 2\vec{y} - \vec{x}
\end{aligned}$$
$$\Longrightarrow\ \vec{a} = \frac{1}{15}\vec{x} + \frac{2}{15}\vec{y} + \frac{4}{15}\vec{z} + \frac{8}{15}\vec{w}.$$

Još je:

$$\vec{b} = \frac{8}{15}\vec{x} + \frac{1}{15}\vec{y} + \frac{2}{15}\vec{z} + \frac{4}{15}\vec{w}$$
$$\vec{c} = \frac{4}{15}\vec{x} + \frac{8}{15}\vec{y} + \frac{1}{15}\vec{z} + \frac{2}{15}\vec{w}$$
$$\vec{d} = \frac{2}{15}\vec{x} + \frac{4}{15}\vec{y} + \frac{8}{15}\vec{z} + \frac{1}{15}\vec{w}.$$

Kako su zadani vektori $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ i $\vec{w}$ uz pomoć ravnala i šestara znamo konstruirati i vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i $\vec{d}$ primjenjujući Talesov poučak (dijeljenje dužine na jednake dijelove). Potom u zadanim točkama A', B', C' i D', kao početcima vektora, redom nanesemo vektore $-\vec{a}$, $-\vec{b}$, $-\vec{c}$ i $-\vec{d}$. Završne točke tih vektora su vrhovi četverokuta $ABCD$ kojega je i trebalo rekonstruirati.

Oliver Kukas (4), Zabok

3759. *Ako su α, β, γ kutovi trokuta, dokaži jednakost*

$$\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{a} + \frac{\cos^2\frac{\beta}{2}}{b} + \frac{\cos^2\frac{\gamma}{2}}{c} = \frac{s}{4Rr},$$

gdje su R i r polumjeri opisane i upisane kružnice trokuta, a s poluopseg trokuta.

Rješenje. Krenimo od kosinusova poučka:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$\Longrightarrow\ b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos\alpha$$
$$\Longrightarrow\ (b+c)^2 - a^2 = 2bc(1 + \cos\alpha)$$
$$\Longrightarrow\ (b+c-a)(b+c+a)$$
$$= 4bc\cdot\frac{1+\cos\alpha}{2}$$
$$= 4bc\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$$
$$\Longrightarrow\ s(s-a) = bc\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\Longrightarrow \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{a}=\frac{s(s-a)}{abc}.$$

Sada je:

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{a}+\frac{\cos^2\frac{\beta}{2}}{b}+\frac{\cos^2\frac{\gamma}{2}}{c}\\
&=\frac{s(s-a)}{abc}+\frac{s(s-b)}{abc}+\frac{s(s-c)}{abc}\\
&=\frac{1}{abc}(3s^2-s(a+b+c))\\
&=\frac{s^2}{abc}\quad\left\{P=\frac{abc}{4R}\ \text{i}\ P=sr\right\}\\
&=\frac{s^2}{4Rsr}=\frac{s}{4Rr}.
\end{aligned}$$

Oliver Kukas (4), Zabok

3760. *Odredi zbroj*

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}.$$

Rješenje. Neka je

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}. \qquad (1)$$

Tada je

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\ldots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}. \qquad (2)$$

Oduzimanjem (2) od (1), dobiva se:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}S_n&=\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{2^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{3}{2^3}-\frac{2}{2^3}\right)\\
&\quad+\ldots+\left(\frac{n}{2^n}-\frac{n-1}{2^n}\right)-\frac{n}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}.$$

Neka je

$$S'_{n-1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}. \qquad (3)$$

Tada je

$$S_n=S'_{n-1}-\frac{n}{2^n}. \qquad (4)$$

Množenjem (3) s $\frac{1}{2}$, dobiva se

$$\frac{1}{2}S'_{n-1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}. \qquad (5)$$

Oduzimanjem (5) od (3), dobiva se

$$\frac{1}{2}S'_{n-1}=1-\frac{1}{2^n}\quad \text{tj.}$$

$$S'_{n-1}=2-\frac{1}{2^{n-1}}. \qquad (6)$$

Supstitucijom (6) u (4), dobiva se:

$$S_n=2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}.$$

Filip Vučić (2),
I. gimnazija, Zagreb

3761. *Bez korištenja računala izračunaj umnožak*

$$\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{3\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}.$$

Rješenje. Kako je $\cos\frac{3\pi}{9}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ imamo

$$\begin{aligned}
&\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{3\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}\\
&=\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}\\
&=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}\\
&=\frac{1}{8}\cdot\frac{\sin\frac{4\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}\\
&=\frac{1}{16}\cdot\frac{\sin\frac{8\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{1}{16}\cdot\frac{\sin\left(\pi-\frac{8\pi}{9}\right)}{\sin\frac{\pi}{9}}\\
&=\frac{1}{16}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{9}}{\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

Borna Cesarec (3), Krapina

3762. *Neka je a realan broj. Dokaži da vrijedi*

$$5(\sin^3 a+\cos^3 a)+3\sin a\cos a=0.04$$

ako i samo ako je

$$5(\sin a+\cos a)+2\sin a\cos a=0.04.$$

Rješenje. Krenimo od općenite formule

$$\begin{aligned}(x+y+z)^3 &= x^3+y^3+z^3+3x^2y\\ &\quad + 3xy^2+3x^2z+3y^2z\\ &\quad + 3xz^2+3yz^2+6xyz.\end{aligned}$$

Imamo:

$$\begin{aligned}&x^3+y^3+z^3-3xyz\\ &=(x+y+z)^3-3x^2y-3xy^2-3x^2z\\ &\quad -3y^2z-3xz^2-3yz^2-9xyz\\ &=(x+y+z)^3-3x^2y-3xy^2-3xyz\\ &\quad -3x^2z-3xz^2-3xyz\\ &\quad -3y^2z-3yz^2-3xyz\\ &=(x+y+z)^3-3xy(x+y+z)\\ &\quad -3xz(x+y+z)-3yz(x+y+z)\\ &=(x+y+z)[(x+y+z)^2-3xy-3xz-3yz]\\ &=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)\\ &=\frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2].\end{aligned} \tag{1}$$

$\boxed{\Longrightarrow}$

$$\begin{aligned}&5(\sin^3 a+\cos^3 a)+3\sin a\cos a=0.04\\ &5(\sin^3 a+\cos^3 a)-\frac{1}{25}+3\sin a\cos a=0\\ &\sin^3 a+\cos^3 a+\left(-\frac{1}{5}\right)^3\\ &\quad -3\sin a\cos a\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=0.\end{aligned}$$

Uočimo da je izraz zapravo lijeva strana jednakosti (1) specijalno za $x=\sin a$, $y=\cos a$ i $z=-\frac{1}{5}$. Stoga je prema (1):

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(\sin a+\cos a-\frac{1}{5}\right)\\ &\quad\cdot\left[(\sin a-\cos a)^2+\left(\sin a-\frac{1}{5}\right)^2\right.\\ &\quad\left.+\left(\cos a-\frac{1}{5}\right)^2\right]=0.\end{aligned}$$

Odavde slijedi da je $\sin a+\cos a-\frac{1}{5}=0$ ili $\sin a=\cos a=\frac{1}{5}$. Zbog uvjeta $\sin^2 a+\cos^2 a=1$ druga mogućnost nije moguća pa mora biti

$$\sin a+\cos a=\frac{1}{5}. \tag{2}$$

Kvadriranjem ove jednakosti slijedi:

$$\begin{aligned}&1+2\sin a\cos a=\frac{1}{25}\\ &\Longrightarrow\ 2\sin a\cos a=-0.96.\end{aligned}$$

Sada je:

$$\begin{aligned}&5(\sin a+\cos a)+2\sin a\cos a\\ &=5\cdot\frac{1}{5}-0.96=0.04.\end{aligned}$$

$\boxed{\Longleftarrow}$

$$\begin{aligned}&5(\sin a+\cos a)+2\sin a\cos a=0.04\\ &5(\sin a+\cos a)+1+2\sin a\cos a=1.04\\ &5(\sin a+\cos a)+(\sin a+\cos a)^2=1.04.\end{aligned}$$

Uvedemo supstituciju $t=\sin a+\cos a$

$$\begin{aligned}&t^2+5t-1.04=0\\ &\Longrightarrow\ t_1=0.2 \text{ i } t_2=-5.2.\end{aligned}$$

1° $\sin a+\cos a=0.2$

Kvadriranjem je:

$$\begin{aligned}&1+2\sin a\cos a=0.04\\ &\Longrightarrow\ \sin a\cos a=-0.48.\end{aligned}$$

2° $\sin a+\cos a=-5.2$

Ovaj slučaj je nemoguć jer je

$$-1\leqslant\sin a\leqslant 1,\quad -1\leqslant\cos a\leqslant 1.$$

Sada je:

$$\begin{aligned}&5(\sin^3 a+\cos^3 a)+3\sin a\cos a\\ &=5(\sin a+\cos a)(1-\sin a\cos a)\\ &\quad +3\sin a\cos a\\ &=5\cdot 0.2\cdot(1+0.48)+3\cdot(-0.48)=0.04.\end{aligned}$$

Oliver Kukas (4), Zabok

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 470. *Nedavni potres oštetio je strujne instalacije u garaži. Vlasnik je to utvrdio tek navečer kad mu je trebalo nešto iz garaže pa je uzeo dugački produžni kabel s grlom za žarulju i osvijetlio si garažu. Učinilo mu se da žarulja slabije gori pa je izmjerio napon na njenim krajevima i utvrdio da iznosi 210 volta. Snaga žarulje je 100 vata, a napon gradske mreže 230 volta. Koliki je otpor kabela?*

Rješenje.

$U_ž = 210\ \text{V}$

$P = 100\ \text{W}$

$\underline{U = 230\ \text{V}}$

$R_k = ?$

$$I_ž = \frac{P}{U} = \frac{100\ \text{W}}{210\ \text{V}} = 0.476\ \text{A}$$

$$U_k = U - U_ž = 20\ \text{V}$$

$$R_k = \frac{U_k}{I} = \frac{20\ \text{V}}{0.476\ \text{A}} = 42\ \Omega.$$

Luka Krašnjak (8), OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 471. *Automobil vozi brzinom 72 km/h pored pruge koja ide paralelno sa cestom. Pored njega, u istom smjeru, vozi vlak koji ima 14 vagona i lokomotivu. Duljina vagona i lokomotive je približno jednaka i iznosi 14 metara. Vozač je izmjerio da mu je trebalo 46 sekundi da pretekne vlak. Kolika je brzina vlaka? Duljina automobila je 6 metara, a razmaci između vagona iznose 1 metar.*

Rješenje.

$v_a = 72\ \text{km/h} = 20\ \text{m/s}$

$l_{1v} = 14\ \text{m}$

$l_a = 6\ \text{m}$

$l_{\text{razmak}} = 1\ \text{m}$

$\underline{t = 46\ \text{s}}$

$v_v = ?$

$$l_v = 15 \cdot l_1 + 14 \cdot l_{\text{razmak}} = 15 \cdot 14\ \text{m} + 14 \cdot 1\ \text{m} = 224\ \text{m}.$$

Put koji automobil prijeđe tijekom pretjecanja jednak je zbroju duljine vlaka i duljine automobila.

$$s = l_v + l_a = 230\ \text{m}$$

$$v_{\text{pretjecanja}} = \frac{s}{t} = \frac{230\ \text{m}}{46\ \text{s}} = 5\ \text{m/s}$$

$$v_v = v_a - v_{\text{pretjecanja}} = 20\ \text{m/s} - 5\ \text{m/s} = 15\ \text{m/s}.$$

Ur.

OŠ – 472. *Nova baterija od 4.5 volta u džepnoj lampi može raditi 1 sat. Kroz žaruljicu će za to vrijeme teći struja od 250 miliampera. Koliko će elektrona za to vrijeme proći kroz žaruljicu? Naboj jednog elektrona iznosi* $1.6 \cdot 10^{-19}$ *C.*

Rješenje.

$U = 4.5\ \text{V}$

$t = 1\ \text{h} = 3600\ \text{s}$

$I = 250\ \text{mA} = 0.25\ \text{A}$

$\underline{e = 1.6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}}$

$N = ?$

$$Q = It = 0.25\ \text{A} \cdot 3600\ \text{s} = 900\ \text{C}$$

$$N = \frac{Q}{e} = \frac{900\ \text{C}}{1.6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} = 5.625 \cdot 10^{21}.$$

Vito Martinović (8), OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 473. *Pumpa snage 2 kilovata puni bazen vodom iz bunara koji je dubok 10 metara. Bazen je dugačak 6, širok 5 i dubok 1.5 metara. Pumpi treba 2500 sekundi da ga napuni. Kolika je korisnost pumpe? Gustoća vode je* $1000\ kg/m^3$.

Rješenje.

$P = 2\ \text{kW}$

$h = 10\ \text{m}$

$a = 6\ \text{m}, \quad b = 5\ \text{m}, \quad c = 1.5\ \text{m}$

$t = 2500\ \text{s}$

$\underline{\rho = 1000\ \text{kg/m}^3}$

$\eta = ?$

$$V = abc = 6\ \text{m} \cdot 5\ \text{m} \cdot 1.\ \text{m} = 45\ \text{m}^3$$

$$m = \rho \cdot V = 1000\ \text{kg/m}^3 \cdot 45\ \text{m}^3 = 45\,000\ \text{kg}$$

$$W_{\text{korisni}} = E_{gp} = mgh = 45\,000\ \text{kg} \cdot 10\ \frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 10\ \text{m} = 4\,500\,000\ \text{J}$$

$$W_{\text{ukupni}} = Pt = 2000\ \text{W} \cdot 2500\ \text{s} = 5\,000\,000\ \text{J}$$

$$\eta = \frac{W_{\text{korisni}}}{W_{\text{ukupni}}} = \frac{4\,500\,000\ \text{J}}{5\,000\,000\ \text{J}} = 0.9.$$

Marin Lakoš (8), OŠ Horvati, Zagreb

1728. *Žarulja sa žarnom niti ima snagu 100 W. Odredi površinu žarne niti, ako pretpostavimo da je ona crno tijelo temperature 2000 K.*

Rješenje. Iz Stefan-Boltzmannovog zakona za zračenje crnog tijela vrijedi

$$P = \sigma S T^4,$$

gdje je $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ J/(m^{2}K^4) Stefan-Boltzmannova konstanta, a S površina tijela. Površinu izračunamo izrazivši S iz formule

$$S = \frac{P}{\sigma T^4} = \frac{100}{5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 2000^4}$$
$$= 0.00011 \text{ m}^2 = 1.1 \text{ cm}^2.$$

Borna Cesarec (2), Krapina
Filip Vučić (2), Zagreb

1729. *Koristeći izraz za moment tromosti homogenog diska mase m i radijusa r, $I = mr^2/2$, izvedi izraz za moment tromosti homogenog kružnog vijenca mase m, unutarnjeg radijusa r_1 i vanjskog r_2. Rotacija se odvija oko osi simetrije, za disk i za vijenac.*

Rješenje. Izrazimo moment tromosti diska preko površinske gustoće $\sigma = m/S$:

$$I = \frac{1}{2}mr^2 = \sigma r^2 \pi \frac{r^2}{2} = \frac{\sigma\pi}{2} r^4.$$

Kako je moment tromosti aditivna veličina, a kružni vijenac možemo dobiti tako da iz diska radijusa r_2 koncentrično izrežemo disk radijusa r_1 slijedi

$$I_v = \frac{\sigma\pi}{2}(r_2^4 - r_1^4)$$

masu diska izrazimo preko površinske gustoće kao

$$m_v = \sigma\pi(r_2^2 - r_1^2),$$

pa uvrštavanjem faktora $\sigma\pi$ u izraz za I_v dobijemo

$$I_v = \frac{m_v}{2}\frac{r_2^4 - r_1^4}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{m_v}{2}(r_2^2 + r_1^2).$$

Uočimo da u specijalnom slučaju $r_1 = 0$ dobivamo opet moment tromosti diska, a za $r_1 \to r_2$ moment tankog prstena, $I = mr^2$.

Ur.

1730. *Proton kinetičke energije $E_k = 2$ MeV elastično se sudara s jezgrom ^4He. Odredi kinetičku energiju protona i jezgre helija poslije sudara, ako se proton giba suprotno od početnog smjera (centralni sudar).*

Rješenje. Za centralni elastični sudar vrijedi očuvanje impulsa i energije. Ako izlaznu energiju protona označimo s E_1, a jezgre helija s E_2, iz očuvanja energije dobivamo

$$E_k = E_1 + E_2,$$

a očuvanje impulsa ($p = \sqrt{2mE}$) daje

$$\sqrt{2m_1E_k} + \sqrt{2m_1E_1} = 2\sqrt{2m_2E_2},$$

gdje smo uzeli u obzir da je izlazni smjer protona suprotan ulaznom. Kako je jezgra ^{4}He približno 4 puta teža od protona, uvrstimo $m_2 = 4m_1$ i skratimo

$$\sqrt{E_k} + \sqrt{E_1} = 2\sqrt{E_2}.$$

Ako uvrstimo $E_k = 2$ i E_2 sa desne strane zadnje dobivene jednadžbe u prvu, imat ćemo

$$2 = E_1 + \frac{2 + 2\sqrt{2}\sqrt{E_1} + E_1}{4}.$$

pomnožimo li ovo s 4 i supstituiramo $x = \sqrt{E_1}$ dobit ćemo kvadratnu jednadžbu

$$8 = 4x^2 + 2 + 2\sqrt{2}x + x^2,$$

čije je pozitivno rješenje nakon sređivanja

$$x = \sqrt{E_1} = 0.6\sqrt{2},$$

što daje

$$E_1 = 0.72 \text{ MeV}$$
$$E_2 = E_k - E_1 = 1.28 \text{ MeV}.$$

Provjerom očuvanja impulsa dobijemo

$$\sqrt{2} + \sqrt{0.72} = 2\sqrt{1.28}.$$

Ur.

1731. *Uzorak napravljen pred 50 godina sadrži 5 grama lutecija. Lutecij ima dva prirodna izotopa, ^{175}Lu koji je stabilan i ^{176}Lu koji se raspada u ^{176}Hf s vremenom poluraspada 38 milijardi godina. Udio ^{176}Lu je 2.6 % ukupnog broja atoma lutecija. Odredi koliko je sada atoma hafnija u uzorku, ako ga u trenutku izrade uzorka uopće nije bilo.*

Rješenje. U 5 grama lutecija ima

$$N = \frac{m}{M} N_A = \frac{5}{174.97} \cdot 6.022 \cdot 10^{23}$$
$$= 1.721 \cdot 10^{22}$$

atoma. Od njih 2.6 % otpada na radioaktivni izotop, to jest

$$N' = N \cdot 0.026 = 4.474 \cdot 10^{20}.$$

Njihovu aktivnost izračunamo iz omjera broja atoma i vremena poluraspada:

$$A = \frac{N'}{T} \cdot \ln 2 = 8.16 \cdot 10^9 \text{ raspada na godinu.}$$

Množeći navedenu (godišnju) aktivnost s 50 godina dobivamo da atoma hafnija sada ima $4.08 \cdot 10^{11}$.

Ur.

1732. *Putanja rakete sa Zemlje na Mars uz najmanji utrošak goriva je polovica elipse oko Sunca s perihelom 1 a.j. (blizu Zemlje) i afelom 1.4 a.j. (blizu Marsa kad je najbliže Suncu) i zove se Hohmannova orbita. Odredi vrijeme puta sa Zemlje na Mars (polovina ophodnog vremena po Hohmannovoj orbiti) i brzinu u odnosu na Sunce, na početku i na kraju puta.*

Rješenje. Duljina velike poluosi orbite je

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{1 + 1.4}{2} \text{ a.j.} = 1.2 \text{ a.j.}$$

Po 3. Keplerovom zakonu period putanje po cijeloj Hohmannovoj orbiti je

$$T = \sqrt{1.2^3} \text{ god} = 1.314534 \text{ god} = 480 \text{ dana.}$$

Vrijeme puta sa Zemlje na Mars tada je polovica tog perioda,

$$\tau = \frac{T}{2} = 240 \text{ dana.}$$

Brzine dobivamo iz *vis-viva* jednadžbe koja glasi

$$v(r) = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)},$$

A iz 3. Keplerovog zakona proizlazi (za Zemlju)

$$\sqrt{GM} = 2\pi \frac{\text{a.j.}}{\text{god}} \sqrt{1 \text{ a.j.}},$$

gdje je

$$v = 2\pi \frac{\text{a.j.}}{\text{god}} = 29\,786 \text{ m/s}$$

srednja brzina gibanja Zemlje oko Sunca. Uvrštavanje u *vis-viva* jednadžbu daje

$$v(r) = 2\pi \frac{\text{a.j.}}{\text{god}} \sqrt{1 \text{ a.j.}} \cdot \sqrt{2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)}.$$

Brzina na početku puta (blizu Zemlje) iznosi

$$v(1 \text{ a.j.}) = 2\pi \sqrt{2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{1.4}\right)}$$
$$= 6.7866 \frac{\text{a.j.}}{\text{god}} = 32\,172 \text{ m/s},$$

a na kraju (blizu Marsa)

$$v(1.4 \text{ a.j.}) = 2\pi \sqrt{2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{1.4}\right)}$$
$$= 4.8476 \frac{\text{a.j.}}{\text{god}} = 22\ 980 \text{ m/s.}$$

To su brzine u odnosu na Sunce.

Filip Vučić (2), Zagreb

1733. *Nerastezljiva nit zanemarive mase i kuglica mase $m = 100$ g postavljeni su tako da čine matematičko njihalo. U početnom trenutku njihalo je otklonjeno za kut 60°. Nit puca ako sila napetosti dosegne $T_0 = 25$ N. Zanemariti otpor zraka i međudjelovanja sustava s okolinom. Uzeti $g = 10$ ms^{-2}.*

a) Kolika je napetost niti kad je otklon njihala 30°?

b) Hoće li nit puknuti?

Rješenje. a) Ako s l označimo duljinu njihala, s v trenutnu brzinu kuglice, a s θ kut otklona iz ravnotežnog položaja tada silu napetosti niti T možemo izraziti pomoću sile teže i centrifugalne sile

$$T(\theta) = mg\cos\theta + \frac{mv^2}{l}.$$

Visina kuglice h u odnosu na ravnotežni položaj iznosi $h = l(1 - \cos\theta)$.

Iz očuvanja energije proizlazi

$$\frac{l}{2} mg = l(1 - \cos\theta) mg + \frac{mv^2}{2}.$$

Uvrštavanjem $\theta = 30^\circ$ dobit ćemo

$$\frac{l}{2}mg = \frac{l(2-\sqrt{3})}{2}mg + \frac{mv^2}{2},$$
$$mgl = mgl(2-\sqrt{3}) + mv^2,$$
$$gl(\sqrt{3}-1) = v^2.$$

Uvrštavanjem u izraz za T dobijemo

$$T(30^\circ) = mg\frac{3\sqrt{3}-2}{2} = 15.98 \text{ N}.$$

b) Napetost niti je najveća kad njihalo prolazi kroz ravnotežni položaj, tj. za $\theta = 0^\circ$. Očuvanje energije tada nakon sređivanja poprima oblik:

$$v^2 = gl.$$

Ponovo uvrstimo u izraz za T i dobijemo

$$T(0^\circ) - mg = mg$$
$$T(0^\circ) = 2mg = 20 \text{ N},$$

što je manje od T_0, pa slijedi da nit neće puknuti.

Ur.

1734. *Konvergentna leća žarišne daljine $f = 4$ cm može se postaviti između nepomičnog predmeta i zastora, međusobno udaljenih $d = 25$ cm. Kad je leća postavljena na udaljenost a od predmeta, daje na zastoru oštru sliku udaljenu b od leće. Kad je leća postavljena na udaljenost b od predmeta, također daje oštru sliku na istom zastoru. Odredi udaljenost L između tih dvaju položaja leće i visinu i prirodu slike na zastoru u oba slučaja ako je početna visina predmeta $h = 5$ cm.*

Rješenje. Iz jednadžbe leće

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$$

slijedi

$$ab = f(a+b) = fd = 4 \cdot 25 = 100 \text{ cm}^2.$$

Uvrstimo li b iz ove jednadžbe u $a + b = 25$ dobit ćemo

$$a + \frac{100}{a} = 25$$
$$a^2 - 25a + 100 = 0$$
$$a = \frac{25 \pm \sqrt{625-400}}{2} = \frac{25 \pm 15}{2}.$$

Rješenja su dakle

$$a_1 = 5 \text{ cm}, \quad b_1 = 20 \text{ cm}$$
$$a_2 = 20 \text{ cm}, \quad b_2 = 5 \text{ cm}.$$

Tražena udaljenost L je, dakle,

$$L = a_2 - a_1 = 15 \text{ cm},$$

a veličina slike je

$$h_1 = h\frac{b_1}{a_1} = 20 \text{ cm},$$
$$h_2 = h\frac{b_2}{a_2} = 1.25 \text{ cm}.$$

Slika je realna, obrnuta i uvećana u prvom slučaju i realna, obrnuta i umanjena u drugom.

Ur.