61. Međunarodna matematička olimpijada, Sankt Peterburg, Rusija, 2020. g.

Ove godine zbog pandemije COVID-19 Međunarodna matematička olimpijada nije održana u Rusiji u Sankt Peterburgu u srpnju, kako je bilo predviđeno, već u matičnim zemalja u rujnu, preciznije od 18. do 28. rujna. Našu ekipu su ove godine sačinjavali: *Bernard Inkret* (2. r.), *Ivan Vojvodić* i *Krešimir Nežmah* (3. r.) iz XV. gimnazije u Zagrebu, *Noel Lakić* (4. r.) iz Gimnazije Franje Petrića u Zadru, *Luka Bulić Bračulj* (4. r.) iz III. gimnazije u Splitu, *Jakov Ljubičić* (3. r.) iz Gimnazije Lucijana Vranjanina u Zagrebu, uz voditelje *Matiju Bašića*, *Matka Ljulja*, *Meu Bombardelli* i *Ivana Krijana*.

Hrvatska ekipa je rješavala zadatke u sigurnim uvjetima na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu, a predstavnik organizatora je bio *Ilko Brnetić*. Prva tri dana Olimpijade smo se upoznali s našim ruskim vodičima *Arinom* i *Kirilom* te s nekoliko natjecatelja iz Slovenije i Grčke preko Zooma. Iako se činilo da izostaje ozbiljnost ovog velikog svjetskog natjecanja, na kojem je bilo 105 država, ipak smo svi bili koncentrirani na dva dana natjecanja koji su održani 21. i 22. rujna. Naši prvi dojmovi nakon završetka rješavanja su bili da ćemo svi imati približno jednake brojeve bodova i da smo kao cijela ekipa bili jako dobri.

Nakon samog natjecanja družili smo se s drugim ekipama igrajući šah, pričajući šale i komentirajući samo natjecanje, dok su naši voditelji bili zaokupljeni oko koordinacije bodovanja naših rješenja. Imali smo i virtualni razgled Sankt Peterburga koji smo, inače, tako žarko željeli vidjeti uživo. Zadnji dan ovogodišnje Olimpijade objavljeni su rezultati i podijeljene nagrade. Hrvatska je 2020. g. na MMO zauzela 32. mjesto, a osvojili smo dva srebra (*Ivan Vojvodić* i *Bernard Inkret*), tri bronce (*Krešimir Nežmah*, *Luka Bulić Bračulj* i *Noel Lakić*) te jednu pohvalu (*Jakov Ljubičić*). Na kraju bih spomenuo da bi vjerojatno svaka ekipa radije otišla u Rusiju i tamo rješavala olimpijske zadatke, ali i u ovim uvjetima se moglo normalno natjecati i dobro zabaviti.

Bodovi hrvatskih učenika na 61. IMO.

natjecatelj	P1	P2	P3	P4	P5	P6	ukupno	osvojeno
B. Inkret	7	2	0	7	7	1	24	srebrna
I. Vojvodić	7	7	3	0	7	0	24	srebrna
L. Bulić Bračulj	7	2	0	7	7	0	23	brončana
K. Nežmah	7	2	0	7	7	0	23	brončana
N. Lakić	7	7	0	7	1	0	22	brončana
J. Ljubičić	7	0	0	7	0	0	14	pohvala
ekipni rezultat	42	20	3	35	29	1	130	S,S,B,B,B,P

Noel Lakić

Zadatci

Prvi dan, ponedjeljak, 21. rujna 2020.

Zadatak 1. Dan je konveksan četverokut $ABCD$. Točka P nalazi se u unutrašnjosti četverokuta $ABCD$. Vrijede sljedeći razmjeri:

$$\sphericalangle PAD : \sphericalangle PBA : \sphericalangle DPA = 1 : 2 : 3 = \sphericalangle CBP : \sphericalangle BAP : \sphericalangle BPC.$$

Dokaži da se sljedeća tri pravca sijeku u jednoj točki: simetrale unutrašnjih kutova $\sphericalangle ADP$ i $\sphericalangle PCB$ i simetrala dužine $\overline{AB}$.

Zadatak 2. Dani su realni brojevi a, b, c, d takvi da vrijedi $a \geq b \geq c \geq d > 0$ i $a + bc + d = 1$. Dokaži da vrijedi

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1.$$

Zadatak 3. Dano je $4n$ kamenčića težina $1, 2, 3, \dots, 4n$. Svaki kamenčić je obojen jednom od n boja i svakom bojom su obojena točno četiri kamenčića. Dokaži da se kamenčiće može podijeliti u dvije hrpe tako da vrijede oba sljedeća uvjeta:

- Ukupne težine obje hrpe su jednake.
- Svaka hrpa sadrži po dva kamenčića svake boje.

Drugi dan, utorak, 22. rujna 2020.

Zadatak 4. Dan je prirodni broj $n > 1$. Na planini postoji n^2 postaja koje su sve na međusobno različitih visina. Svaka od dvije kompanije koje upravljaju žičarama, A i B, posjeduje k žičara; svaka žičara omogućuje prijevoz od jedne postaje do druge koja je na većoj visini (bez međupostaja). Svih k žičara kompanije A imaju k različitih početnih postaja i k različitih završnih postaja, pri čemu žičara koja počinje na većoj visini i završava na većoj visini. Isti uvjet vrijedi za kompaniju B. Kažemo da kompanija *povezuje* dvije postaje ako je moguće iz niže doseći višu koristeći jednu ili više žičara te kompanije (druga kretanja između postaja nisu dozvoljena).

Odredi najmanji prirodni broj k za koji sigurno postoje dvije postaje koje povezuju obje kompanije.

Zadatak 5. Dan je skup od $n > 1$ karata. Na svakoj karti je napisan jedan prirodni broj. Snop ima svojstvo da je aritmetička sredina brojeva napisanih na proizvoljnom paru karata jednaka geometrijskoj sredini brojeva napisanih na nekom skupu koji se sastoji od jedne ili više karata iz snopa.

Za koje n nužno slijedi da su brojevi napisani na svim kartama iz snopa jednaki?

Zadatak 6. Dokaži da postoji pozitivna konstanta c takva da vrijedi sljedeća tvrdnja:

Neka je $n > 1$ prirodni broj i S skup od n točaka u ravnini takvih da je udaljenost između svake dvije različite točke skupa S barem 1. Tada slijedi da postoji pravac l koji razdvaja skup S takav da je udaljenost bilo koje točke skupa S od pravca l barem $cn^{-1/3}$.

Napomena. Za slabiji rezultat pri čemu je $cn^{-1/3}$ zamijenjeno s $cn^{-\alpha}$ mogu se dobiti bodovi ovisno o vrijednosti konstante $\alpha > 1/3$.

Vrijeme rješavanja svakog dana: 4 sata i 30 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Rang-lista

	nagrade				broj
	I	II	III	poh.	bod.
Kina	5	1			215
Rusija	2	4			185
SAD	3	3			183
Južna Koreja	2	3	1		175
Tajland	2	3	1		174
Italija	2	3	1		171
Poljska	2	3	1		171
Australija	2	3	1		168
Velika Britanija	1	4	1		167
Brazil	1	5			165
Ukrajina		6			164
Kanada	3	1	2		161
Mađarska	3		3		160
Francuska	1	3	1	1	154
Rumunjska	1	2	3		152
Singapur		4	2		151
Vijetnam	2	1	2	1	150
Gruzija	1	2	2	1	149
Iran	1	3	2		149
Japan		5	1		149
Izrael	1	2	3		146
Kazahstan		3	2	1	146
Češka	1	2	3		145
Tajvan		3	3		145
Srbija	1	2	2	1	144
Njemačka		3	3		140
Turska		2	4		140
Hong Kong		3	3		139
Mongolija	1	2	1	2	135
Nizozemska	2	1	3		135
Španjolska		2	4		133
Hrvatska		2	3	1	130
Indonezija	2		2	2	130
Malezija	1	2	2	1	130
Kolumbija		2	3	1	129
Peru		3	2		127
Armenija		2	3	1	126
Bangladeš		1	5		118
Bugarska		1	3	2	118
Slovačka		2	4		117
Slovenija	1	1	1	3	117
Švedska		1	4	1	117
Filipini	1		2	3	113
Portugal		1	3	2	112
Bjelorusija			6		111
Meksiko	1		4	1	111
Novi Zeland	1		2	3	102
Sirija		2	1	3	102
Švicarska			4	1	100
Argentina	1		2	2	99
Belgija		1	3	1	99
Moldavija		2	2	1	97
Danska			3	3	95
Litva			3	3	94
Grčka			4	2	86
Bosna i Hercegovina			5	1	85
Estonija		1	2	3	84
Norveša	1		1	3	83
Saudijska Arabija			2	4	82
Finska		1	1	3	81
Južnoafrička Rebublika			3	3	77
Šri Lanka			3	3	77
Makau			2	3	76
Ekavador			1	5	71
Austrija		1	1	3	66
Azerbajdžan			1	5	66
Latvija				6	64
Salvador (5)			1	3	61
Uzbekistan				6	60
Irska				5	53
Tunis		1		3	52
Sjeverna Makedonija				5	51
Crna Gora		1		3	50
Tađikistan				5	47
Paragvaj			1	3	44
Kirgistan			1	2	42
Albanija			1	2	40
Kosovo				5	38
Portoriko			1	3	38
Cipar				3	36
Urugvaj				4	36
Pakistan				3	34
Venecuela (4)				4	33
Panama			1	1	32
Turkmenistan				4	31
Nigerija (5)				2	30
Uganda				3	29
Kostarika				2	28
Honduras (5)				3	28
Maroko				2	26
Mianmar				3	23
Island				1	22
Bolivija				2	21
Gana (5)			1		21
Čile				1	19
Nikaragva				2	19
Irak				1	15
Tanzanija (4)				1	14
Trinidad i Tobago					13
Alžir (5)					5
Bocvana					5
Nepal					4
Luksemburg (2)					3
Kenija (5)					2
Oman					2

Broj u zagradi je broj natjecatelja kada je on manji od 6.