Osječki matematički list 20 (2020), 73–85

Dva Steinerova teorema o potpunom četverostranu

Vladimir Volenec*

Sažetak

U radu proučavamo potpuni četverostran u euklidskoj ravnini. Četverostran ima niz zanimljivih svojstava. U radu dokazujemo dvije tvrdnje, koje je veliki geometar Jakob Steiner objavio 1827. godine, i to bez dokaza. U potpunom četverostranu se simetrale kutova sijeku u 16 točaka, koje su središta upisanih i pripisanih kružnica četiri trokuta. Steiner je ustvrdio da ovih 16 sjecišta leži četiri po četiri na ukupno osam kružnica i to svako od njih na po dvije od tih kružnica. Steiner je dalje utvrdio da tih osam kružnica tvore dvije četvorke kružnica, tako da je svaka kružnica iz jedne četvorke ortogonalna na svaku kružnicu iz druge četvorke.

Tvrdnje su nakon objave mnogo puta dokazivane, a ovdje ćemo dati jedan njihov dokaz.

Ključne riječi: *potpuni četverostran, tetivni četverokut, kružnica*

Two Steiner theorems about complete quadrilaterals

Abstract

In this paper, we study a complete quadrilateral in the Euclidean plane. The quadrilateral has a lot of interesting properties. Here we prove two claims, which were published by the great geometer Jakob

*Matematički odsjek PMF-a, Sveučilište u Zagrebu, email: volenec@math.hr

Steiner in 1827, without proof. In a complete quadrilateral, the bisectors of angles are concurrent at 16 points, which are the incenters and excenters of the four triangles. Steiner asserted that these 16 intersections lie four by four on a total of eight circles, each of them on two of these circles. Steiner also found out that these eight circles form two quadruplets, so that each circle from one quadruplet is orthogonal to each circle from the other quadruplet. The claims have been proven many times since then, and here we give one of their proofs.

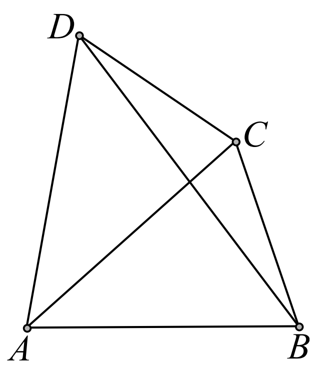
The claims have since been proven many times, and here we will give one of their proofs.

Keywords: *complete quadrilateral, cyclic quadrilateral, circle*

U "školskoj" geometriji se proučavaju četverokuti. Četverokut je ravninski lik, kojeg tvore četiri točke A, B, C i D, od kojih nikoje tri nisu na istom pravcu i koje su upravo tako poredane, tj. dolaze u ciklusu, pa nakon točke D dolazi opet točka A, i četiri dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$, koje spajaju po dvije susjedne točke u onom ciklusu. Četverokut može biti konveksan, konkavan ili prekrižen. Točke A, B, C i D su vrhovi, a dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$ su stranice četverokuta $ABCD$. Po dva vrha, koji nisu spojeni stranicom, su tzv. suprotni vrhovi, a njihova spojnica je dijagonala četverokuta, pa naš četverokut $ABCD$ ima dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$.

U "višoj" geometriji, a to je zapravo projektivna geometrija, proučavaju se malo drukčija dva lika, tzv. potpuni četverovrh i potpuni četverostran.

Potpuni četverovrh je skup od četiri različite točke, od kojih nikoje tri nisu na istom pravcu, i šest pravaca, koji prolaze kroz po dvije od tih četiriju točaka. Te četiri točke su vrhovi, a ovih šest pravaca su stranice potpunog četverovrha (slika 1).

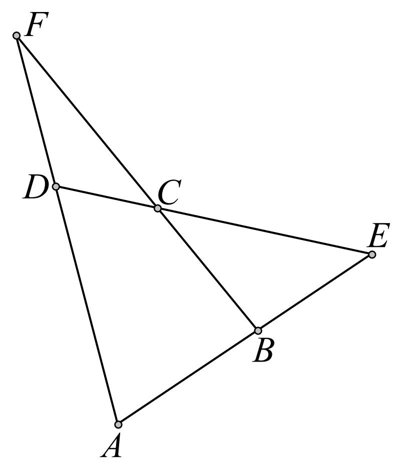


Slika 1.

Dakle, za razliku od četverokuta, koji ima četiri stranice, potpuni četverovrh ih ima šest, tj. dijagonale četverokuta su postale još dvije dodatne stranice potpunog četverovrha. Iz tog razloga se i koristi pridjev "potpuni". Budući da smo krenuli od četiri vrha, a tek nakon toga dolazi šest stranica, to se koristi naziv četverovrh, a ne četverokut.

Sliku 1 možemo gledati na dva načina. Jedanput vidimo četverokut $ABCD$ sa stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ i dijagonalama $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, pri čemu obično promatramo samo dužine, a drugi puta vidimo potpuni četverovrh $ABCD$ sa šest stranica AB, AC, AD, BC, BD, CD, pri čemu se sada radi o pravcima, jer projektivna geometrija ne barata pojmom dužine. Međutim, na slici su zbog jednostavnosti prikazane samo dužine.

Potpuni četverostran je skup od četiri pravca, od kojih nikoja tri ne prolaze kroz istu točku, i šest točaka, u kojima se sijeku po dva od tih četiriju pravaca. Ta četiri pravca su stranice, a ovih šest točaka su vrhovi potpunog četverostrana (slika 2).



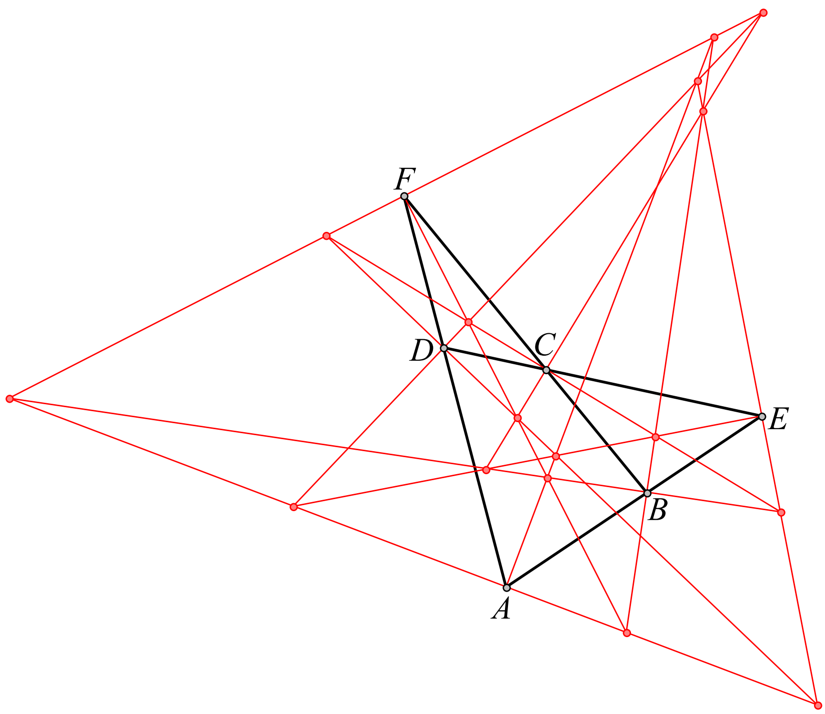
Slika 2.

Ako se dogovorimo da svi međusobno paralelni pravci euklidske ravnine imaju jednu jedinu zajedničku "beskonačno daleku" točku, da neparalelni pravci imaju različite beskonačno daleke točke i da sve beskonačno daleke točke leže na jednom "beskonačno dalekom" pravcu, pa te beskonačno daleke točke i taj beskonačno daleki pravac dodamo euklidskoj ravnini, tada dobivamo tzv. *projektivnu ravninu*. U njoj se sada svaka dva različita pravca sijeku u točno jednoj točki, a svake dvije različite točke (konačne ili beskonačne) imaju točno jednu spojnicu.

Ovdje ćemo ipak proučavati potpuni četverostran u euklidskoj ravnini, pa ćemo zato pretpostaviti da nikoje dvije njegove stranice nisu paralelne, tj. da su mu svi vrhovi "u konačnosti". Osim toga ćemo ga zbog kratkoće zvati naprosto četverostranom.

Dakle, četverostran ima četiri stranice i šest vrhova, koji neka su označeni kao na slici 2. Po dva vrha, koji nisu na istoj stranici, zovemo suprotnim vrhovima. Na slici 2 imamo parove suprotnih vrhova A, C; B, D i E, F. U promatranom četverostranu možemo uočiti tri četverokuta: četverokut $ABCD$ je konveksan, četverokut $AECF$ je konkavan, a četverokut $BEDF$ je prekrižen. Svake tri stranice četverostrana tvore jedan trokut. Tako dobivamo četiri trokuta, a na slici 2 su to trokuti ABF, AED, BEC i DCF.

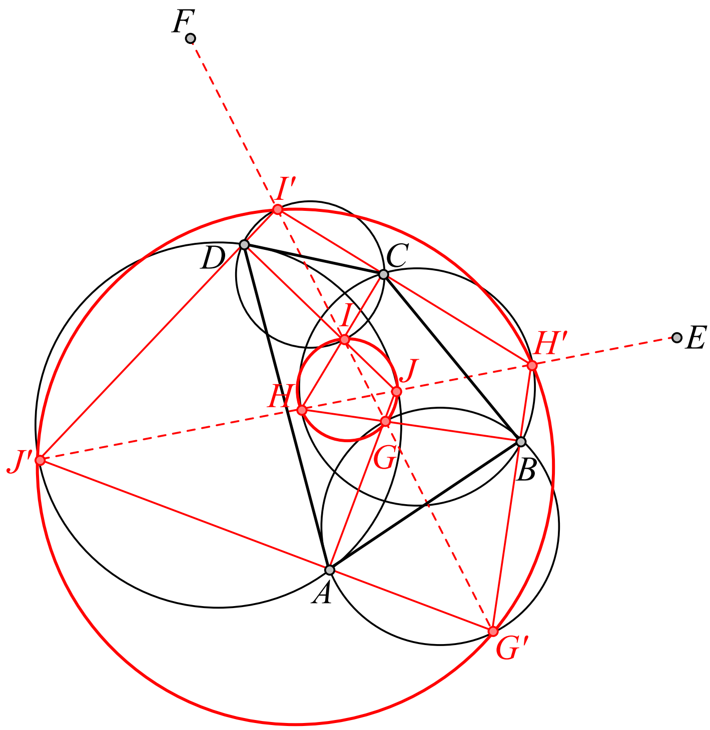
Četverostran ima jako mnogo zanimljivih svojstava, ali ćemo ovdje dokazati samo dvije tvrdnje, koje je veliki geometar Jakob Steiner objavio 1827. godine, i to bez dokaza. Tvrdnje su nakon toga mnogo puta dokazivane, a ovdje ćemo dati jedan njihov dokaz.



Slika 3.

Svake dvije stranice četverostrana imaju dvije simetrale, pa imamo ukupno 12 takvih simetrala. Ako pak pogledamo bilo koji od četiri trokuta ABF, AED, BEC i DCF, tada u svakom od njih imamo po tri simetrale kutova i tri simetrale vanjskih kutova. Tri simetrale kutova sijeku se u središtu upisane kružnice promatranog trokuta, a po dvije simetrale vanjskih kutova i "unutrašnja" simetrala preostalog kuta sijeku se u središtima triju pripisanih kružnica tog trokuta. Tako dobivamo ukupno 16 sjecišta od po tri od onih 12 simetrala četverostrana. Na slici 3 istaknuto je tih 16 sjecišta. Steiner je ustvrdio da ovih 16 sjecišta leži četiri po četiri na ukupno osam kružnica i to svako od njih na po dvije od tih kružnica.

Pogledajmo najprije konveksni četverokut $ABCD$. Neka se simetrale kutova A i B sijeku u točki G, simetrale kutova B i C u točki H, simetrale kutova C i D u točki I i simetrale kutova D i A u točki J. Neka su G', H', I' i J' sjecišta odgovarajućih vanjskih simetrala kutova u po dva susjedna vrha četverokuta $ABCD$ (slika 4).

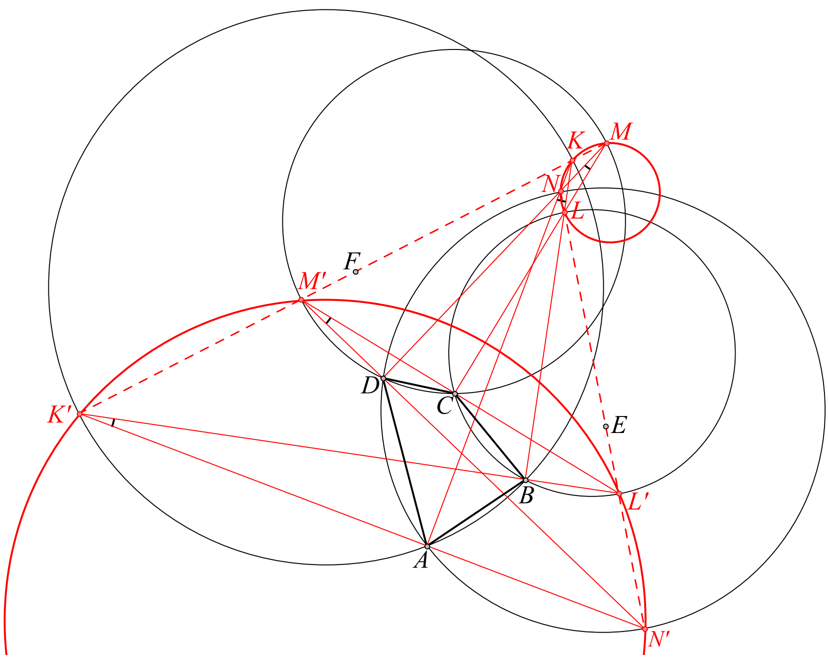


Slika 4.

Dokazat ćemo da su po četiri točke G, H, I, J i G', H', I', J' na po jednoj kružnici. Osim toga uočimo da točke G, G', I i I' leže na jednoj simetrali stranica kroz vrh F, a točke H, H', J i J' na jednoj simetrali stranica kroz vrh E četverostrana.

Neka su $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ i 2δ kutevi četverokuta $ABCD$ kod vrhova A, B, C i D. Tada je $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$. U četverokutu $AGBG'$ kod vrhova A i B imamo prave kutove, pa je taj četverokut tetivan, a još preciznija tvrdnja je da točke A i B leže na kružnici s promjerom $\overline{GG'}$. Slično tome, parovi točaka B, C; C, D i D, A leže na kružnicama s promjerima $\overline{HH'}$, $\overline{II'}$ i $\overline{JJ'}$. U trokutu ABG uz vrh G je kut $\pi-\alpha-\beta=\gamma+\delta$, pa je u tetivnom četverokutu $AGBG'$ kod vrha G' kut $\alpha+\beta$. Na isti način zaključujemo da su u četverokutu $CIDI'$ kod vrhova I i I' kutovi $\alpha+\beta$ i $\gamma+\delta$. To znači da su i četverokuti $GHIJ$ i $G'H'I'J'$ tetivni.

Sada ćemo simetrale parova stranica u vrhovima četverokuta $ABCD$ kombinirati na drukčiji način, uzet ćemo simetralu kuta A, vanjsku simetralu kuta B, simetralu kuta C i vanjsku simetralu kuta D i u tom ciklusu ćemo promatrati sjecišta susjednih simetrala, pa tako dobivamo točke K, L, M i N na slici 5, za koje ćemo pokazati da leže na jednoj kružnici.



Slika 5.

Nakon toga ćemo uzeti vanjsku simetralu kuta A, simetralu kuta B, vanjsku simetralu kuta C i simetralu kuta D, pa sječenjem susjednih simetrala u tom ciklusu dobivamo točke K', L', M' i N', za koje ćemo također pokazati da leže na jednoj kružnici. Sada točke K, K', M i M' odnosno točke L, L', N i N' leže na drugim simetralama parova stranica kroz vrhove F i E četverostrana.

Kružnice s promjerima $\overline{KK'}$, $\overline{LL'}$, $\overline{MM'}$ i $\overline{NN'}$ prolaze kroz po dvije točke A, B; B, C; C, D i D, A. U trokutu ABK kod vrha K imamo kut $\pi - \alpha - \left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta$, a u trokutu CDM kod vrha M imamo kut $\pi - (\pi - \gamma) - \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \gamma + \delta - \frac{\pi}{2}$, a ta su dva kuta jednaka zbog jednakosti $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$, pa su zato točke K, L, M i N na jednoj kružnici. Dobiveni kut s vrhom K jednak je označenom kutu kod točke K', jer su to obodni kutovi nad tetivom $\overline{AB}$ u kružnici s promjerom $\overline{KK'}$, a dobiveni kut s vrhom M jednak je označenom kutu s vrhom M', jer su to obodni kutove nad tetivom $\overline{CD}$ u kružnici s promjerom $\overline{MM'}$. Jednakost posljednja dva kuta znači da su točke K', L', M' i N' na jednoj kružnici.

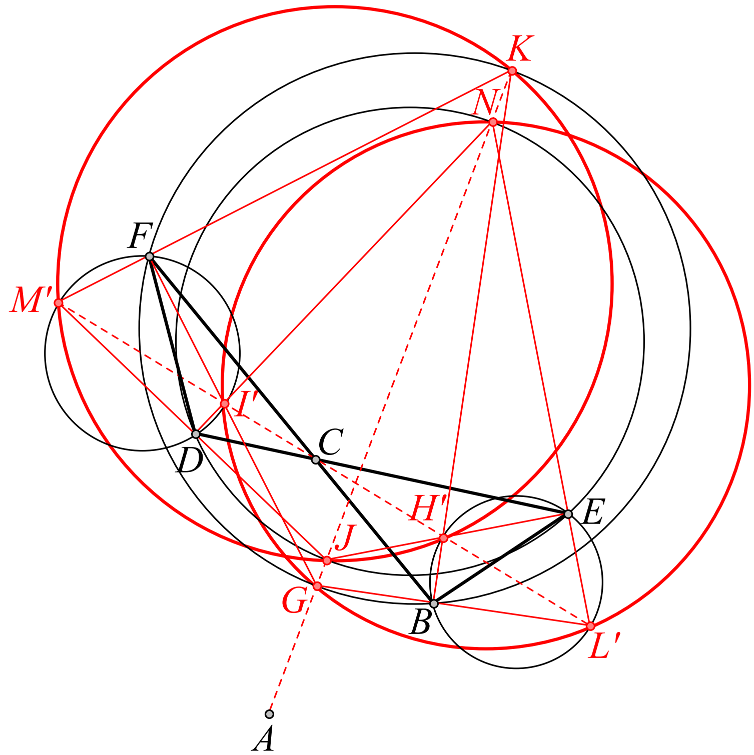
Promotrimo sada prekriženi četverokut $BEDF$. Za sjecišta simetrala kutova tog četverokuta, istaknuta na slici 6, od kojih su neka već promatrana na slikama 4 i 5, a neka su nova, možemo lako uočiti da točke G, J, K i N odnosno H', I', L' i M' leže na po jednoj simetrali parova stranica kroz ispuštene vrhove A i C četverostrana, a da parovi vrhova B, E; E, D; D, F i F, B leže redom na kružnicama s promjerima $\overline{H'L'}$, $\overline{JN}$, $\overline{I'M'}$ i $\overline{GK}$. U trokutu BCE pri vrhovima B, C i E imamo kutove $2\beta'$, $2\gamma'$ i 2ϵ, a u trokutu CDF uz vrhove C, D i F imamo kutove $2\gamma'$, $2\delta'$ i 2φ, gdje su β', γ' i δ' kutovi komplementarni kutovima β, γ i δ. Zato je $\beta' + \epsilon = \delta' + \varphi$, tj. $\frac{\pi}{2} - \beta + \epsilon = \frac{\pi}{2} - \delta + \varphi$ ili $\beta + \varphi = \delta + \epsilon$. Neka su ϵ' i φ' kutovi komplementarni kutovima ϵ i φ. Sada dobivamo redom jednakosti

$$\sphericalangle I'GL' = \sphericalangle FGB = \pi - \beta - \varphi, \quad \sphericalangle I'NL' = \sphericalangle DNE = \pi - \delta' - \epsilon' = \delta + \epsilon,$$

pa kako su ova dva kuta suplementarna, to točke G, I', L' i N leže na jednoj kružnici. Slično tome, slijedi

$$\sphericalangle M'JH' = \sphericalangle DJE = \pi - \delta - \epsilon, \quad \sphericalangle M'KH' = \pi - \varphi' - \beta' = \beta + \varphi.$$

Opet smo dobili dva suplementarna kuta, pa su i točke H', J, K i M' na jednoj kružnici.



Slika 6.

Na slici 7 i dalje pratimo prekriženi četverokut $BEDF$ i označena sjecišta simetrala. Točke H, I, L i M odnosno G', J', K' i N' leže na preostale dvije simetrale stranica pri vrhovima C i A četverostrana, a pokazat ćemo da su četvorke točaka H, J', K', M i G', I, L, N' na po jednoj kružnici. Imamo sada jednakosti

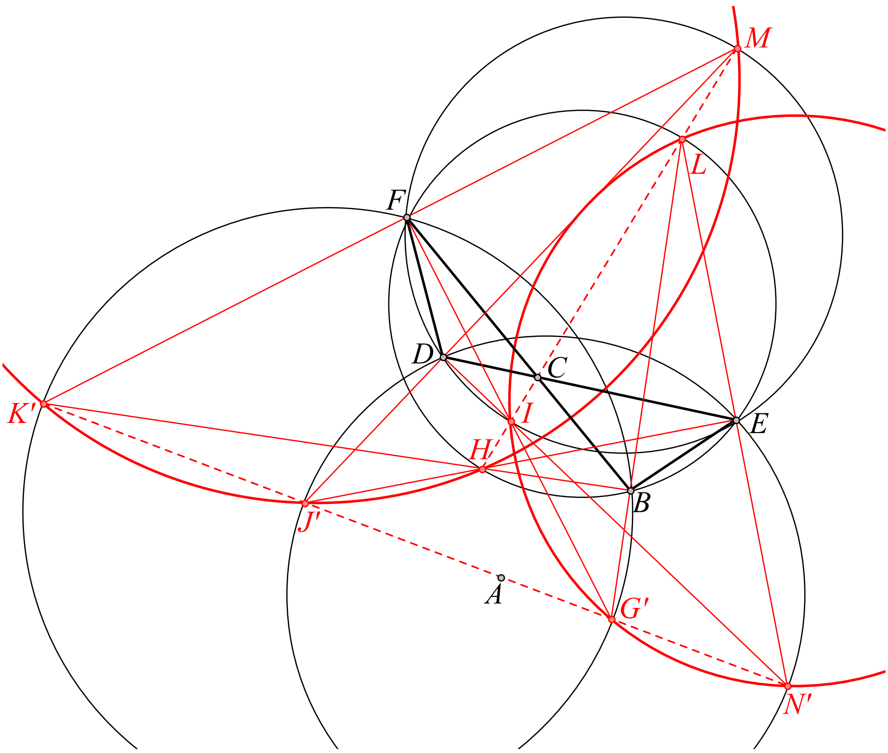
$$\sphericalangle K'MJ' = \sphericalangle FMD = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) - \delta' = \frac{\pi}{2} - \delta' - \varphi = \delta - \varphi,$$

$$\sphericalangle KHJ' = \sphericalangle BHE = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \beta'\right) - \epsilon = \beta - \epsilon$$

i dobiveni kutovi su jednaki jer je $\beta + \varphi = \delta + \epsilon$, pa točke H, J', K' i M leže na jednoj kružnici. Kako kružnice s promjerima $\overline{HL}$ i $\overline{IM}$ prolaze kroz točke B i E odnosno D i F, to imamo i ove jednakosti

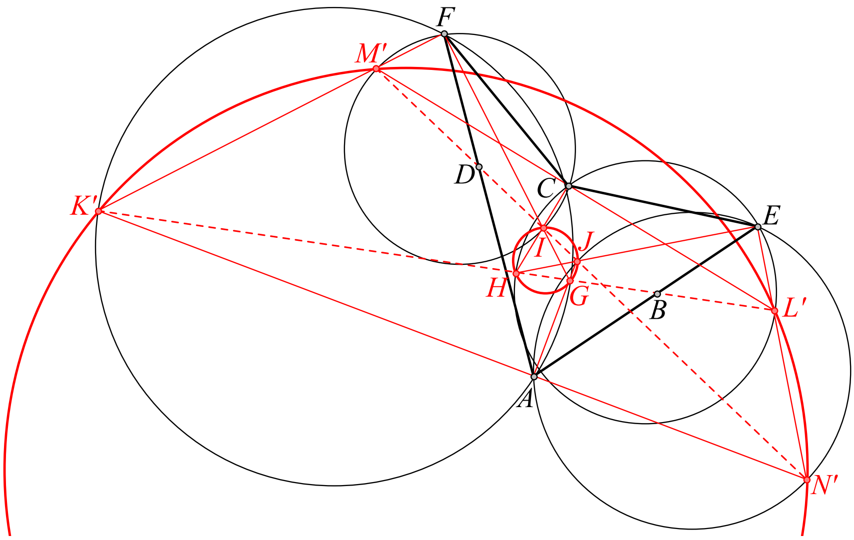
$$\sphericalangle G'LN' = \sphericalangle BLE = \sphericalangle BHE = \beta - \epsilon, \quad \sphericalangle G'IN' = \sphericalangle FID = \sphericalangle FMD = \delta - \varphi.$$

Opet imamo dva jednaka kuta, pa su i točke G', I, L i N' na jednoj kružnici.

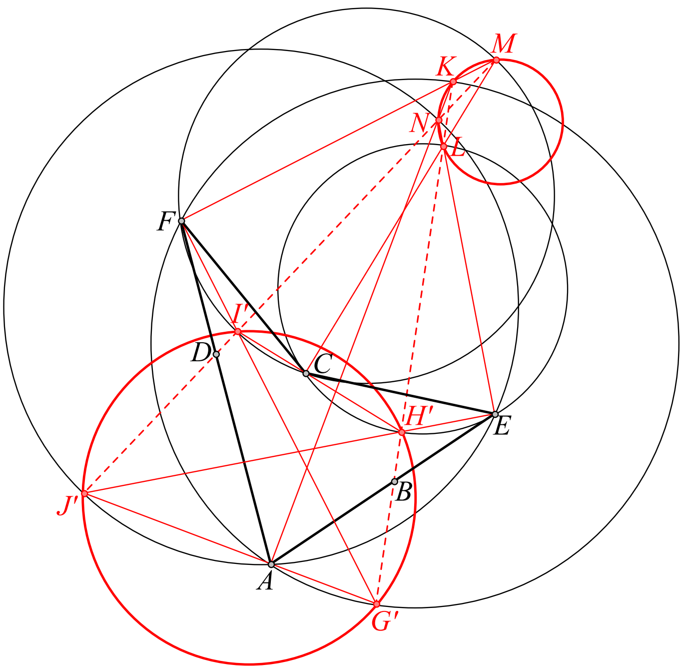


Slika 7.

Da li bi promatranje konkavnog četverokuta $AECF$ dalo nešto novo? Slike 8 i 9 pokazuju, da bismo dobili iste rezultate kao i na slikama 4 i 5 uz konveksni četverokut $ABCD$, samo što bi se iste četiri dobivene kružnice pojavile u malo drukčijem rasporedu.

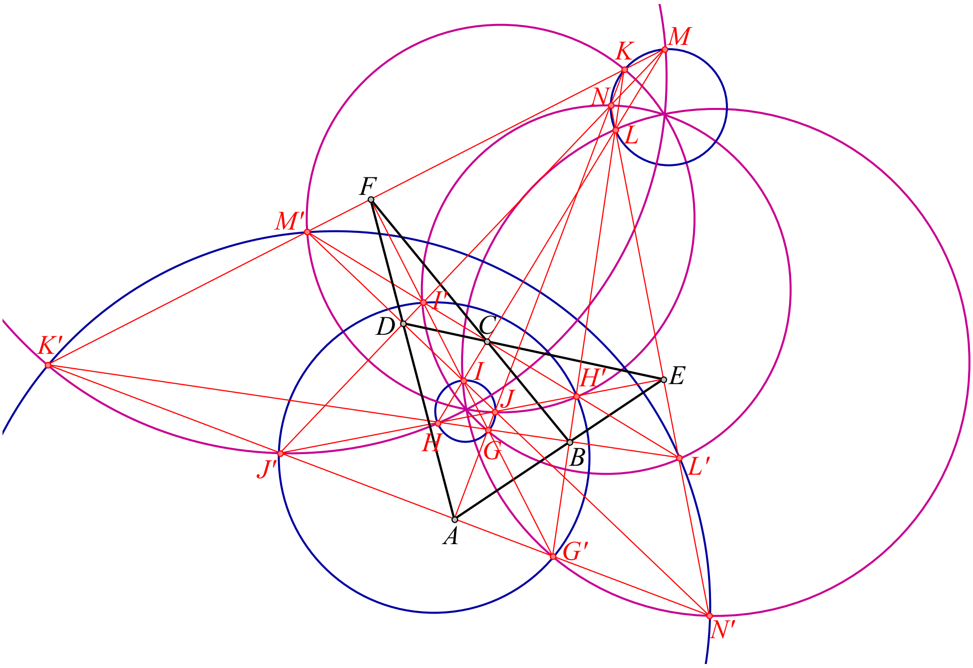


Slika 8.



Slika 9.

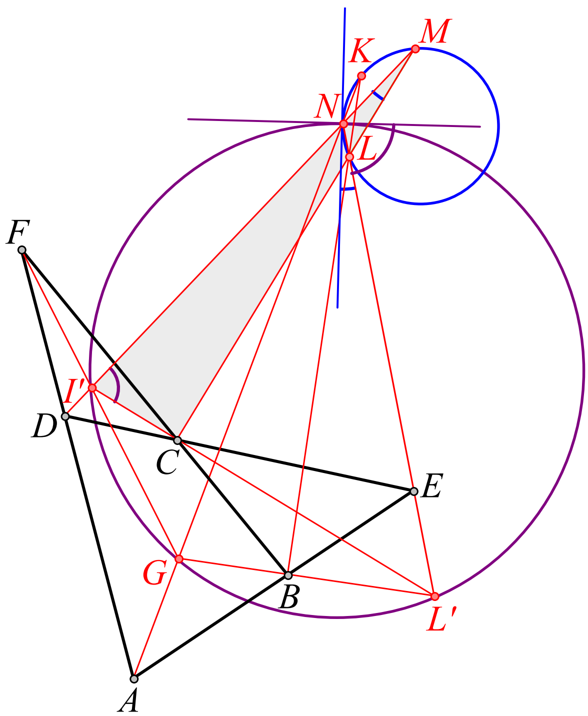
Sve dosadašnje rezultate možemo objediniti na jednoj slici. To je slika 10, na kojoj vidimo svih 16 sjecišta od po tri simetrale, te svih osam dobivenih kružnica.



Slika 10.

Steiner je dalje tvrdio da tih osam kružnica tvore dvije četvorke kružnica, tako da je svaka kružnica iz jedne četvorke ortogonalna na svaku kružnicu iz druge četvorke. Na našoj slici jednu četvorku tvore one četiri kružnice dobivene na slikama 4 i 5, a drugu četvorku one kružnice dobivene na slikama 6 i 7. Ovu drugu Steinerovu tvrdnju o ortogonalnosti dviju kružnica dokazat ćemo u jednom od šesnaest slučajeva.

Promotrimo kružnice $KLMN$ i $GI'L'N$, slika 11. One imaju jedno sjecište N. U prvoj kružnici kut tetive $\overline{NL}$ s tangentom te kružnice u točki N jednak je obodnom kutu $\sphericalangle NML$ nad tom tetivom, a u drugoj kružnici kut tetive $\overline{NL'}$ s tangentom te kružnice u točki N jednak je obodnom kutu $\sphericalangle NI'L'$ nad tom tetivom. Međutim tetive $\overline{NL}$ i $\overline{NL'}$ se nalaze na istom pravcu, a dobivena dva obodna kuta se nalaze uz hipotenuzu u pravokutnom trokutu $MI'C$. To znači da pravac NL tvori komplementarne kutove s tangentama promatranih dviju kružnica u točki N, tj. da su te dvije kružnice ortogonalne. Slično se može postupiti i u svakom od 15 preostalih slučajeva.



Slika 11.

Uz malo poznavanja geometrije kružnica moglo bi se iz ove druge Steinerove tvrdnje izvesti da četiri kružnice iz svake od dviju promatranih četvorki kružnica pripadaju jednom pramenu kružnica, tj. imaju zajedničku radikalnu os, a središta im leže na po jednom pravcu. Pritom su to dva konjugirana pramena kružnica, tj. na radikalnoj osi jednog pramena kružnica leže središta kružnica iz drugog pramena kružnica, i obrnuto. Na slici 10 prvi pramen kružnica je hiperbolički, a drugi je eliptički i vide se dvije točke, zajedničke za sve kružnice tog drugog pramena. U ovo razmatranje se nećemo upuštati, a vrlo korisna literatura za to je knjiga [2] i to posebno stranice 20–23.

Literatura

[1] J. Steiner, *Théorème sur le quadrilatère complet*, Ann. de Math. **18** (1827–28), 302–304; Ges. Werke, I, 223–224.

[2] D. Palman, Trokut i kružnica, Element, Zagreb 1994.