Osječki matematički list 20 (2020), 87–97

Neke manje poznate kružnice u geometriji trokuta

Ljiljana Primorac Gajčić*

Sažetak

U ovom radu razmatramo pet kružnica pridruženih trokutu. Svaka od promatranih kružnica je dobila ime po matematičaru koji ju je otkrio, a otkrivene su u drugoj polovici 19. stoljeća. Navest ćemo neka njihova geometrijska svojstva i proučiti veze među njima.

Ključne riječi: *trokut, kružnica, Fuhrmannova kružnica, Spiekerova kružnica, Tuckerova kružnica, Lemoineove kružnice, Droz-Farnyjeve kružnice*

Some less familiar circles in geometry of a triangle

Abstract

In this paper, we consider five circles associated with a triangle. They are named after their discoverers and they were discovered in the second half of the 19th century. Their interesting geometric properties and mutual relationships are also considered.

Keywords: *triangle, circle, Fuhrmann circle, Spieker circle, Tucker circle, Lemoine circles, Droz-Farny circles*

*Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email: lprimora@mathos.hr

1 Uvod

Trokutu opisana i upisana kružnica najpoznatije su kružnice pridružene trokutu, a učenici se s njima susreću u 6. razredu osnovne škole. Trokutu pripisane kružnice učenici upoznaju najčešće na dodatnoj nastavi iz matematike, odnosno prilikom priprema za natjecanja iz matematike. Poznata je i Eulerova kružnica, koja se još naziva i Feuerbachova, a često i kružnica devet točaka. Eulerova kružnica česta je tema radova iz područja geometrije.

Cilj ovoga rada je upoznati čitatelje s još nekim kružnicama pridruženim trokutu, kako bismo potvrdili činjenicu da, iako je trokut predmet izučavanja već više od dvije tisuće godina, još uvijek ima prostora za otkrivanjem njegovih svojstava.

Istaknimo da je do danas otkriveno 41 482 različitih točaka pridruženih trokutu [5], pa je prirodno da raste i broj kružnica pridruženih trokutu. U ovom radu bavit ćemo se kružnicama koje su otkrivene tek u drugoj polovici 19. stoljeća, odnosno početkom 20. stoljeća, a nazvane su po matematičarima koji su ih definirali. Promatrat ćemo Fuhrmannovu, Spiekerovu, Tuckerovu, prvu i drugu Lemoineovu kružnicu te Droz-Farnyjeve kružnice. Za otkrića ovih kružnica mogli bismo reći da su se dogodila relativno kasno, budući da za njihovo definiranje nije potrebno značajno proširenje znanja iz geometrije. Stoga vjerujemo da razumijevanje ovog rada neće predstavljati poteškoću onima koji posjeduju osnovno znanje iz geometrije trokuta.

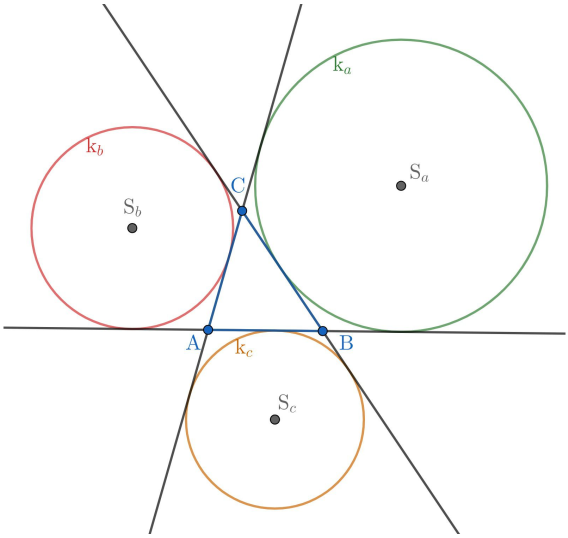
2 Kružnice u geometriji trokuta

Opisana i trokutu upisana kružnica su dobro poznati pojmovi i poznato je kako odrediti središta tih kružnica kao i duljine njihovih polumjera.

Navedimo sada definiciju trokutu pripisane kružnice, [6].

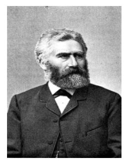
Definicija 2.1. Kružnicu koja dira stranicu $\overline{BC}$ trokuta ABC s vanjske strane i produženja ostalih dviju stranica $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ zovemo trokutu pripisanom kružnicom uz stranicu $\overline{BC}$ i označavamo k_a.

Analogno se definiraju i trokutu pripisane kružnice k_b i k_c, uz stranicu $\overline{AC}$, odnosno $\overline{AB}$, slika 1. Središte trokutu pripisane kružnice k_a nalazi se u sjecištu simetrala dvaju vanjskih kutova trokuta koji leže uz stranicu $\overline{BC}$. Analogno se dobiju središta trokutu pripisanih kružnica k_b i k_c.



Slika 1. Kružnice pripisane trokutu ABC

2.1 Fuhrmannova kružnica



Wilhelm Fuhrmann (1833.– 1904.) njemački matematičar, nastavnik matematike u srednjoj školi u Königsbergu

U ovom dijelu rada ćemo promatrati Fuhrmannov trokut i Fuhrmannovu kružnicu trokuta ABC, slika 2. Ova kružnica je ime dobila po njemačkom matematičaru W. Fuhrmannu, koji ju je prvi put opisao u [2].

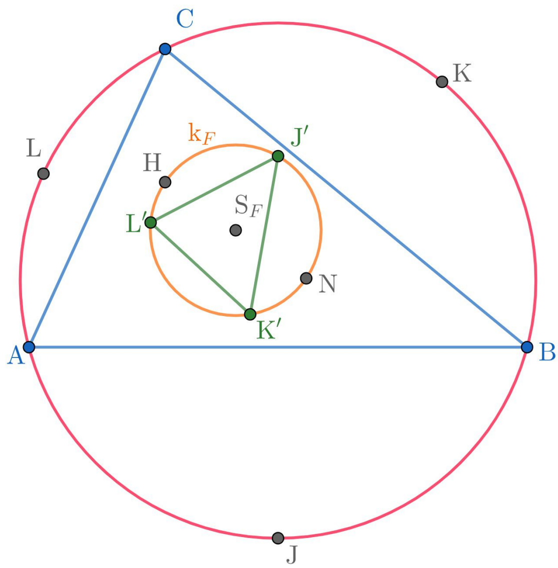
Definicija 2.2. Neka je trokutu ABC opisana kružnica te neka su J, K i L polovišta kružnih lukova određenih točkama A, B; B, C i C, A. Preslikamo li točke J, K, L osnom simetrijom s obzirom na pravce na kojima leže najbliže odgovarajuće stranice trokuta ABC određenoj točki u točke J', K' i L' redom, dobiveni trokut $J'K'L'$ nazivamo *Fuhrmannovim trokutom*, a njemu opisana kružnica se naziva *Fuhrmannova kružnica*.

Zanimljiva je veza između Fuhrmannova kružnice i kružnica pripisanih trokutu ABC. Kako bismo uočili tu vezu, potrebno je najprije definirati Nagelovu točku trokuta ABC.

Definicija 2.3. Označimo s X_a diralište pripisane kružnice k_a i stranice $\overline{BC}$, s Y_b diralište pripisane kružnice k_b i stranice $\overline{AC}$ i neka je Z_c diralište pripisane kružnice k_c i stranice $\overline{AB}$. Točka u kojoj se sijeku dužine $\overline{AX_a}$, $\overline{BY_b}$ i $\overline{CZ_c}$ naziva se *Nagelova točka* trokuta ABC.

Nagelova točka je ime dobila po njemačkom matematičaru C. H. von Nagelu (1803.–1882.).

Može se dokazati da se središte Fuhrmannove kružnice nalazi se u polovištu spojnice ortocentra H i Nagelove točke N trokuta ABC.

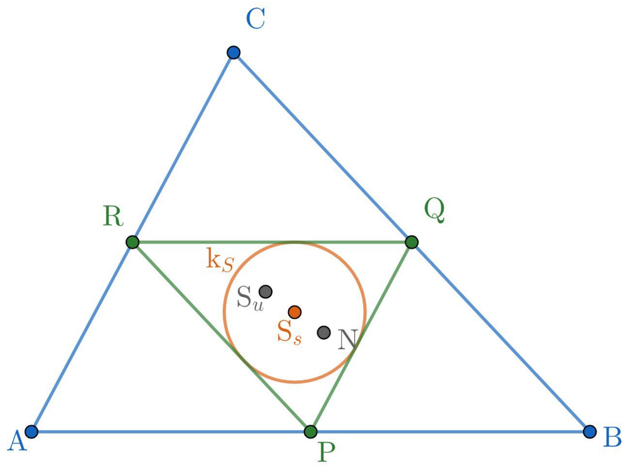


Slika 2. Fuhrmannov trokut $J'K'L'$ i Fuhrmannova kružnica k_F trokuta ABC.

2.2 Spiekerova kružnica

Nagelovu točku možemo povezati i sa Spiekerovom kružnicom, slika 4, nazvanom po njemačkom matematičaru Theodoru Spiekeru (1823.–1913.) koji ju je predstavio 1870. godine kao analogon Eulerove kružnice u svom radu [7].
Da bismo definirali ovu kružnicu najprije uvedimo polovišni trokut. *Polovišni trokut* trokuta ABC je trokut čiji su vrhovi polovišta stranica trokuta ABC.

Definicija 2.4. Kružnica upisana polovišnom trokutu trokuta ABC naziva se *Spiekerova kružnica*, a njezino središte se naziva *Spiekerov centar*.



Slika 3. Spiekerova kružnica k_S trokuta ABC.

Može se dokazati da se Spiekerov centar S_s nalazi u polovištu spojnice Nagelove točke N i središta S_u trokutu upisane kružnice.

2.3 Tuckerova kružnica

Robert Tucker (1833.– 1904.) engleski matematičar, nastavnik matematike u University College School, tajnik Londonskog matematičkog društva više od 35 godina

Tuckerova kružnica je ime dobila po engleskom matematičaru R. Tuckeru koji je pisao o njoj u [8]. Specijalan slučaj ove kružnice otkriven je 1873. godine od strane francuskog matematičara E. M. H. Lemoinea, ali je Tuckeru to otkriće bilo nepoznato, te se samostalno bavio proučavanjem i otkrio familiju takvih kružnica koje je predstavio u radu [9]. Prije nego što definiramo ovu kružnicu navest ćemo neke pojmove iz elementarne geometrije [6].

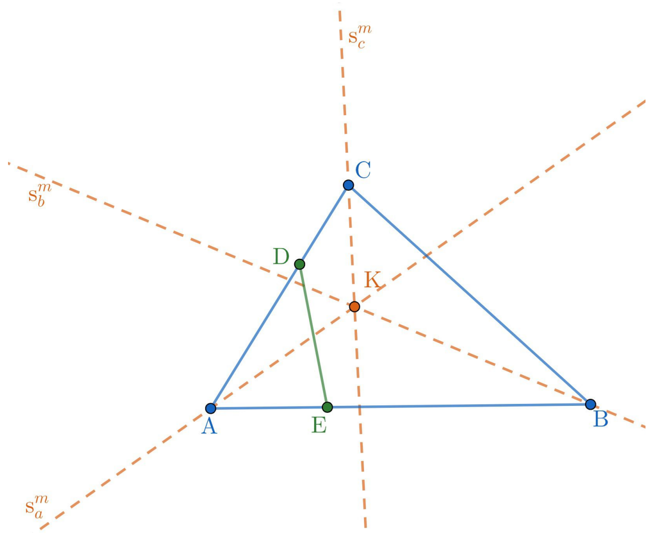
Definicija 2.5. Neka je dan trokut ABC, točka D na stranici $\overline{AC}$ i točka E na stranici $\overline{AB}$. Ako za točke D i E vrijedi $\angle ADE = \angle ABC$, tada dužinu $\overline{DE}$ zovemo *antiparalelom* stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC.

Emil M. H. Lemoine (1840.–1912.) francuski matematičar, profesor matematike na École Polytechnique

Analogno se definiraju i antiparalele stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Uočimo da su trokuti ABC i ADE, iz prethodne definicije, slični. Kako su trokuti slični i u slučaju kada je stranica $\overline{DE}$ paralelna sa stranicom $\overline{BC}$, postaje jasno od kuda potječe motivacija za uvođenje termina antiparalela, slika 4.

Definicija 2.6. Polovišta svih antiparalela neke stranice danog trokuta leže na jednom pravcu koji prolazi trećim vrhom trokuta. Takav se pravac naziva *simedijana trokuta*.

Definicija 2.7. Točka u kojoj se sijeku simedijane trokuta ABC naziva se *Lemoineovom točkom* trokuta ABC.



Slika 4. Antiparalela $\overline{DE}$. Simedijane s_a^m, s_b^m i s_c^m sijeku se u Lemoineovoj točki K trokuta ABC

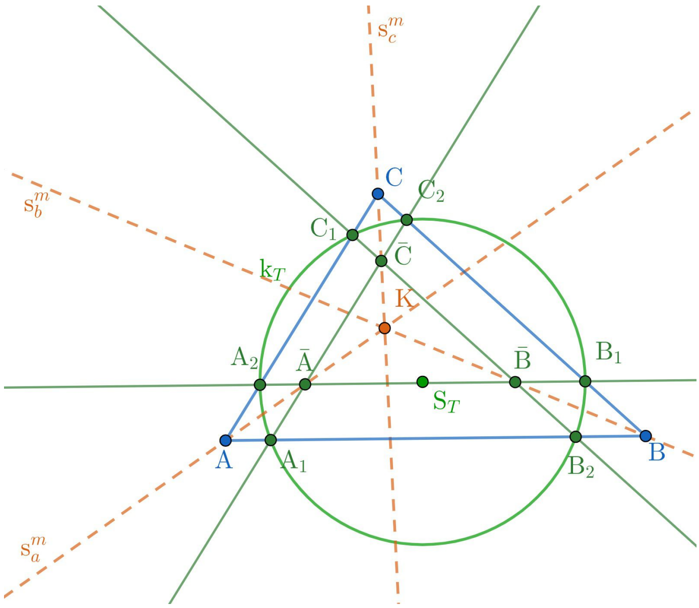
Sada možemo navesti definiciju Tuckerove kružnice, slika 5.

Neka je K Lemoineova točka trokuta ABC i neka su $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ točke na simedijanama za koje vrijedi

$$\frac{|K\bar{A}|}{|A\bar{A}|} = \frac{|K\bar{B}|}{|B\bar{B}|} = \frac{|K\bar{C}|}{|C\bar{C}|} = k, \ k > 0.$$

Ako pravac $\bar{B}\bar{C}$ siječe pravce AB i AC u točkama B_2, odnosno C_1, $\bar{C}\bar{A}$ siječe AB i BC u točkama A_1, odnosno C_2, $\bar{A}\bar{B}$ siječe AC i BC u točkama A_2, odnosno B_1, tada točke $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ leže na kružnici k_T čije središte O_T raspolavlja spojnicu središta O i $\bar{O}$ opisanih kružnica trokuta ABC i $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

Kružnicu k_T nazivamo *Tuckerova kružnica*.



Slika 5. Tuckerova kružnica k_T ($k = 1$).

Budući da za svaku vrijednost konstante $k > 0$ definiramo jednu kružnicu, s prethodnom definicijom je opisana cijela familija kružnica koje se nazivaju Tuckerove kružnice. Specijalan slučaj Tuckerove kružnice je kružnica opisana trokutu ABC.

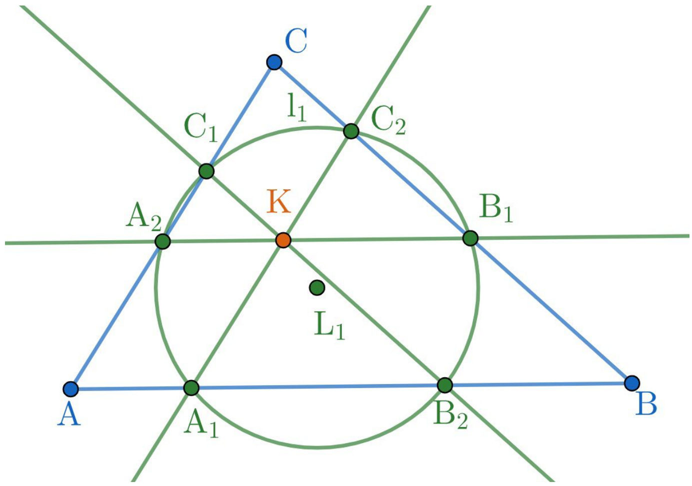
Kada se te dvije kružnice podudaraju, tada se i trokuti $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ podudaraju s danim trokutom ABC, te se i trokut $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ podudara s trokutom ABC.

2.4 Lemoineove kružnice

U ovom dijelu ćemo pomoću Lemoineove točke definirati još dvije posebne kružnice, koje se onda nazivaju prva, odnosno druga Lemoineova kružnica, slike 6 i 7.

Lemoineovom točkom K povučene paralele sa stranicama danog trokuta ABC sijeku stranice tog trokuta u šest koncikličnih točaka $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$. Kružnica l_1 na kojoj leži ovih šest točaka naziva se *prva Lemoineova kružnica*

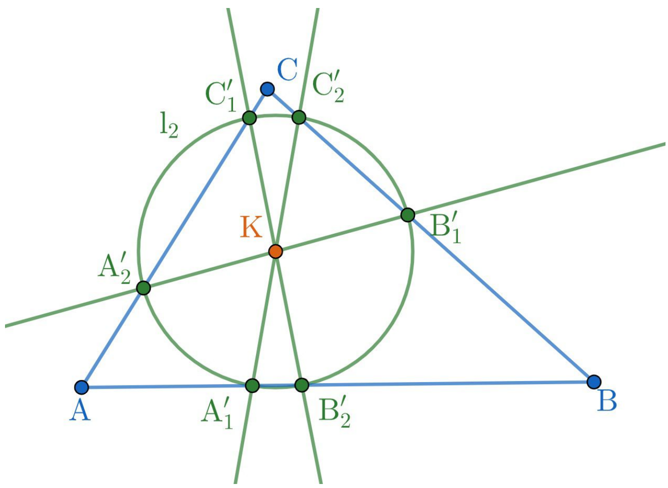
Središte L_1 prve Lemoineove kružnice se nalazi u polovištu spojnice $\overline{KO}$, gdje je K Lemoineova točka, a O središte trokutu ABC opisane kružnice.



Slika 6. Prva Lemoineova kružnica l_1

Lemoineovom točkom K povučene antiparalele sa stranicama danog trokuta ABC sijeku stranice tog trokuta u šest konckličnih točaka A_1', A_2', B_1', B_2', C_1', C_2'. Kružnicu l_2 na kojoj leži tih šest točaka zovemo *drugom Lemoineovom kružnicom*.

Središte druge Lemoineove kružnice je upravo Lemoineova točka K.



Slika 7. Druga Lemoineova kružnica l_2

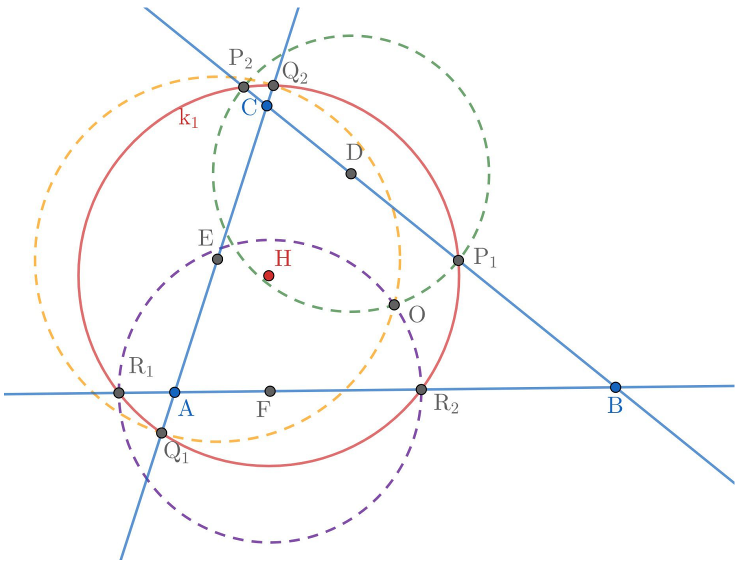
2.5 Droz-Farnyjeve kružnice

Na kraju definiramo Droz-Farnyjeve kružnice. Kružnice su ime dobile po švicarskom matematičaru A. Droz-Farnyju (1856.–1912.) On ih je uočio dokazujući teorem švicarskog matematičara J. Steinera, a predstavio ih je u [1].

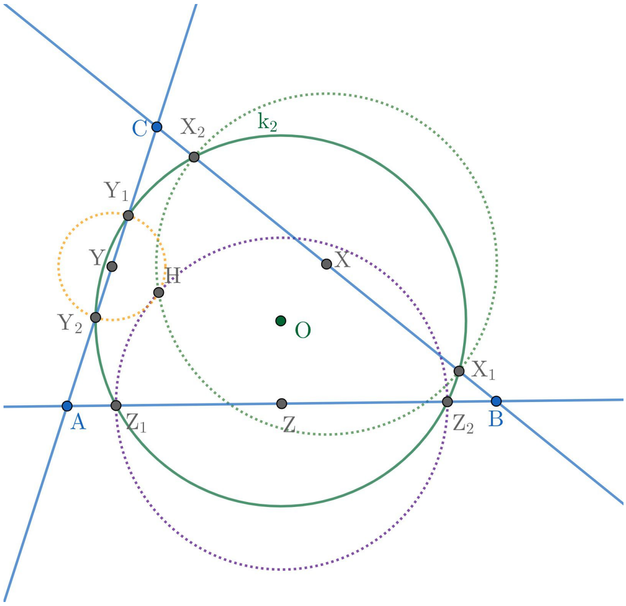
Neka je H ortocentar trokuta ABC i O središte trokutu ABC opisane kružnice te neka su D, E i F nožišta visina trokuta ABC. Kružnica sa središtem u D i polumjerom $\overline{DO}$ siječe pravac BC u točkama P_1 i P_2, kružnica sa središtem u E i polumjerom $\overline{EO}$ siječe pravac AC u točkama Q_1 i Q_2, kružnica sa središtem u F i polumjerom $\overline{FO}$ siječe pravac AB u točkama R_1 i R_2. Može se dokazati da točke P_1, P_2, Q_1, Q_2, R_1 i R_2 leže na kružnici sa središtem u H, označimo je k_1.

Označimo sada s X, Y i Z polovišta stranica trokuta ABC. Kružnica sa središtem u X i polumjerom $\overline{XH}$ siječe pravac BC u točkama X_1 i X_2, kružnica sa središtem u Y i polumjerom $\overline{YH}$ siječe pravac AC u točkama Y_1 i Y_2, kružnica sa središtem u Z i polumjerom $\overline{ZH}$ siječe pravac AB u točkama Z_1 i Z_2. Može se dokazati da točke X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1 i Z_2 leže na kružnici sa središtem u O, označimo je k_2.

Kružnice k_1 i k_2 se nazivaju *Droz-Farnyjeve kružnice* para točaka (H, O) i one su međusobno kongruentne.



Slika 8. Droz-Farnyjeva kružnica k_1



Slika 9. Droz-Farnyjeva kružnica k_2

Prirodno se nameću pitanja:"Zašto su za ortocentar H i središte opisane kružnice O trokuta BC kružnice k_1 i k_2 kongruentne? Po čemu je par (H, O) tako poseban?" Kako bismo odgovorili na ta pitanja, moramo najprije definirati izogonale kuta, odnosno izogonalno konjugirane točke, [6].

Definicija 2.8. Par pravaca koji prolaze vrhom kuta i sa simetralom tog kuta čine jednake kutove zovemo *izogonalama* tog kuta.

Ako se tri pravca položena vrhovima danog trokuta ABC sijeku u jednoj točki P, tada se i njihove izogonale također sijeku u jednoj točki, označimo je P'.

Točke P i P' zovemo *izogonalno konjugiranim točkama* trokuta ABC.

Sada možemo odgovoriti na dana pitanja, iako se odgovor možda već i naslućuje. Kružnice k_1 i k_2 su kongruentne jer su H i O izogonalno konjugirane točke. Može se dokazati da vrijedi sljedeća tvrdnja.

Teorem 2.1. *Neka su P i Q izogonalno konjugirane točke trokuta ABC i D, E, F nožišta okomica iz točke P na stranice trokuta ABC, te neka kružnice sa središtima u točkama D, E i F prolaze točkom Q. Tada sjecišta tih kružnica sa stranicama (ili njihovim produžecima) trokuta ABC uvijek leže na kružnici k_1 sa središtem u točki P. Definiramo li kružnicu k_2 na analogan način s obzirom na točku Q, tada su kružnice k_1 i k_2 kongruentne.*

Literatura

[1] A. Droz-Farny, *Notes sur un théorème de Steiner*, Mathesis **3**(1) (1901), 22–24.

[2] W. Fuhrmann, *Sur un nouveau cercle associé a un triangle*, Mathesis **10** (1890), 105–111.

[3] R. Honsberger, *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*, The Mathematical Association of America, Washington, 1995.

[4] R. A. Johnson, *Modern Geometry: An Elementary Treatise on the Geometry of the Triangle and the Circle*, MA: Houghton Mifflin, Boston, 1929.

[5] C. Kimberling, *Encyclopedia of Triangle Centers*, http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html, pristupljeno: 25.2.2021.

[6] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb, 1994.

[7] T. Spieker, *Ein merkwürdiger Kreis um den Schwerpunkt des Perimeters des geradlinigen Dreiecks als Analogon des Kreises der neun Punkte*, Arch. Math. Phys. **51** (1870), 10–14.

[8] R. Tucker, *The triplicate ratio circle*, Quart. J. Pure Appl. Math. **19** (1883), 342–348.

[9] R. Tucker, *A group of circles*, Quart. J. Pure Appl. Math. **20** (1885), 57–59.