

## UTJECAJ UČENJA RJEŠAVANJEM PROBLEMSKIH ZADATAKA NA OBRAZOVNI UČINAK U ELEMENTARNOJ NASTAVI MATEMATIKE

Vladimir Kadum

Visoka učiteljska škola u Puli

Primljeno, 8. prosinca 2005.

*Autor u radu iznosi rezultate do kojih je došao ispitujući utjecaj učenja rješavanjem problemskih zadataka na obrazovni učinak u elementarnoj nastavi matematike.*

*Eksperiment je proveden na uzorku od 155 ispitanika. Uzorak pripada kategoriji namjernih uzoraka, srednje je veličine, a radilo se o eksperimentu intenzivnoga tipa, gdje nije bitan broj ispitanika koliko rezultati samoga istraživanja.*

*Dobiveni rezultati pokazuju da je učenje rješavanjem problemskih zadataka: (1) učinkovitije od tradicionalnoga, uobičajenoga načina ( $t = 8,25$ ;  $P < 0,05$ ); (2) znatno pridonosi razumijevanju bitnih matematičkih sadržaja (E – grupa je u odnosu prema početnom mjerenju podigla razinu za 8,01 bodova po učeniku, dok je u K – grupi ta razina smanjena za 0,28 bodova po učeniku); (3) pridonosi aktivnijemu odnosu učenika prema rješavanju zadataka: E – grupa je imala znatno manje nerješavanih zadataka (11,9%) od K – grupe (23,8%); (4) pridonosi boljem uspjehu, višoj razini usvojenosti činjenica i informacija ( $t = 8,51$ ;  $P < 0,05$ ); (5) pridonosi većoj aplikativnosti stečenih znanja (26,7 postotnih bodova više nego u tradicionalnome načinu učenja); (6) znatno produžuje trajanje stečenih znanja ( $t = 8,02$ ;  $P < 0,05$ ); (7) utjecaj modela sustava vježbi za poticanje problemsko-stvaralačkih sposobnosti učenika na rješavanje problemskih zadataka u nastavi je značajan ( $t = 5,58$ ;  $P < 0,05$ ).*

*Ključne riječi: matematika, nastava, obrazovni učinak, rješavanje problema, učenje, problemski zadatak*

### 1. Problem

Problem koji je predmet ovoga istraživanja u pedagoško-psihološkoj i didaktičko-metodičkoj literaturi nije sasvim nov. S ovim se problemom, s različitim aspektima i različitim metodološkim pristupima, već devedesetak godina bave predstavnici i pristaše suvremenih psiholoških škola s ci-

ljem utvrđivanja osnovne zakonitosti učenja i struktura mišljenja i intelekta.

Nastava je danas još tradicionalna. U njoj prevladavaju kognitivni ciljevi učenja: stjecanje znanja i misaonih sposobnosti u središtu je metodičkih i organizacijskih opredjeljenja. Učitelj planira učenje koje se odvija u obliku poučavanja, snosi odgovornost za uspjeh svojih učenika. Učenici pasivno primaju informacije, daju odgovore na učiteljeva pitanja, izvršavaju postavljene zadatke i naredbe (Špoljar, 1989). U takvoj nastavi učenik nije subjekt odgojno-obrazovnog procesa.

Nastavom u kojoj nema učeničke samostalnosti i inventivnosti, u kojoj nema mogućnosti da učenici slobodno iznose svoje stavove i uvjerenja i da ih brane, u kojoj se ne suočavaju različita mišljenja, ne razvija kritičnost i kreativnost, već se ističe i hvali discipliniranost, točnost i spremnost da se prihvati mišljenje autoriteta, u kojoj se učenik kloni svakoga rizika i nepoznatih stvari, u kojoj nema eksperimenta i stvaralaštva, vrlo se često formira »poslušnik«, jedinka kojom će se uvijek moći manipulirati, koja će izbjegavati angažiranje, koja će bježati od vlastitih stavova i odgovornosti. Zato se sve više i sve glasnije ističe zahtjev za temeljitim promjenama u ciljevima i zadaćama obrazovanja, nastavnim planovima i programima, procjenjivanju mentalnoga razvoja i uspjeha u obrazovanju. Ističe se zahtjev za nastavom kao stvaralačkim procesom spoznavanja, što stimulira razvoj svih mentalnih funkcija i mišljenja, mašte, osjetilnih sposobnosti, motivacije, volje, karakteristika (Duraković, 1985).

Budući da se broj znanstvenih informacija, prema podacima UNESCO-a, udvostručuje svakih pet-šest godina, te će informacije moći iskoristiti samo onaj subjekt koji bude osposobljen za *samostalno učenje* i *cjeloživotno obrazovanje*. Zato treba osigurati *nove načine učenja*, a *učenje rješavanjem problemskih zadataka* upravo je jedan od njih. Obrazovanje dobiva nove smjerove i prestaje biti stvar prenošenja informacija i izgrađivanja određenih preciznosti, ono postaje stvar razvoja učenika u području spoznajnih procesa, stvar njegova intelektualnog razvoja (Suhodolski, 1974).

## 2. Predmet istraživanja

Danas se od suvremene škole sve više zahtijeva učinkovit i racionalan rad. Kako je težište suvremene škole na *procesu* stjecanja znanja, a ne na usvajanju gotovih činjenica, to ona u sadašnjim uvjetima mora osposobiti učenike za ovladavanje metodama i tehnikama učinkovitijega samostalnoga učenja i stjecanja znanja. Jedan je od putova rješenja i *učenje rješavanjem problemskih zadataka u nastavi*. Taj oblik učenja osobito povoljno

djeluje na razvijanje samostalnosti učenja, snažno pokrećući interes i stvaralačko mišljenje. Učenici samostalnim istraživanjem i radom na problemskom zadatku relativno brzo mogu doći do poželjnih rezultata, što ih snažno motivira za nova i daljnja traganja, istraživanja i rješavanja.

Učenje rješavanjem problemskih zadataka osigurava i omogućava veću učenikovu misaonu i stvaralačku aktivnost. Učenik tako postaje aktivan sudionik i istraživač u nastavnome procesu. Problemska nastava nastupa sa zahtjevom da afirmira učenika kao aktivnoga sudionika odgojno-obrazovnoga procesa, kao istraživača koji razvija svoju intenciju, svoje stvaralačko mišljenje, svoj rad, koji na osnovi određenih metoda i tehnika samostalno otkriva ljepotu i zadovoljstvo učenja, budeći u sebi puninu zadovoljstva postignutim rješenjem problema.

Rješavanje problemskih zadataka najviši je oblik učenja, a sastoji se u otkrivanju odnosa i veza između danih podataka i rješenja zadatke. Pritom je aktivnost učenika maksimalna, a u traženju puta do rješenja on se susreće s manjim ili većim teškoćama. Da bi došao do cilja (rješenja), učenik se koristi prethodno usvojenim znanjima i stečenim iskustvima.

*Utjecaj učenja rješavanjem problemskih zadataka na obrazovni učinak u elementarnoj nastavi matematike* može dovesti do šire problemske dimenzije, determinirane istraživačkim područjem što ga naznačujemo kao intenzifikaciju nastave s ciljem povećanja učinkovitosti učenja, koje bi u ovome istraživanju bile manje ili više obuhvaćene, ali koje bi mogle biti predmetom nekih drugih posebnih istraživanja.

Prema tome, **predmet** ovoga **istraživanja** jest *eksperimentalna provjera utjecaja učenja rješavanjem problemskih zadataka na obrazovni učinak u elementarnoj nastavi matematike*.

### 3. Cilj i zadaci istraživanja

#### 3.1. Cilj istraživanja

U skladu s formulacijom problema istraživanja, **osnovni cilj** ovoga **istraživanja** bit će *verifikacija utjecaja učenja rješavanjem problemskih zadataka na obrazovni učinak u elementarnoj nastavi matematike u optimalno kontroliranim eksperimentalnim uvjetima koji su veoma bliski prirodnoj situaciji učenja u razredu*. Istraživanje se temelji na pedagoškim (didaktičkim) osnovama i načinima osposobljavanja učenika za samostalni rad na matematičkim sadržajima.

*Krajnji je cilj osposobljavanje učenika za rješavanje problemskih zadataka u elementarnoj nastavi matematike*. To znači da je osnovni cilj istraži-

vanja utvrditi postoje li pedagoško-didaktički preduvjeti za primjenu učenja rješavanjem problemskih zadataka, čime bi se povećao obrazovni učinak i učenici osposobili za samostalno rješavanje problemskih zadataka.

Utjecaj nezavisne varijable (*učenje rješavanjem problemskih zadataka*) na zavisnu varijablu (*obrazovni učinak*) pokazat će rezultati koje učenici postižu u rješavanju zadataka, a koji se odnose, u prvome redu, na osposobljenost za samostalno rješavanje problema u elementarnoj nastavi matematike, a zatim na:

- stvaralačke sposobnosti učenika,
- kritički odnos prema matematičkome tekstu, odnosno matematičkim sadržajima, i
- kakvoću i količinu, kao i trajnost učenikovih znanja.

### 3.2. Zadaci istraživanja

Iz predmeta istraživanja i postavljenog cilja proizlaze sljedeći **zadaci istraživanja**:

1. Utvrditi razlike u *učincima učenja* s obzirom na rezultat učenika na testu osposobljenosti za samostalno rješavanje problemskih zadataka u elementarnoj nastavi matematike.
2. Utvrditi razlike u pogledu *kakvoće učenikova znanja* između načina rada organiziranoga na klasičan, tj. tradicionalan način i znanja stečenih rješavanjem problemskih zadataka.
3. Utvrditi razlike u pogledu *trajnosti znanja*, onih znanja stečenih na tradicionalan način i onih znanja koja su stečena rješavanjem problemskih zadataka na sadržajima osnovnoškolske matematike.
4. Utvrditi je li u eksperimentalnoj grupi nezavisna varijabla imala utjecaja na povećanje *interesa učenika* za novi način rada.
5. Utvrditi je li u eksperimentalnoj grupi nezavisna varijabla imala utjecaj na *obrazovni učinak*.
6. Utvrditi postoje li i kakve su razlike između eksperimentalne i kontrolne grupe u pogledu *motivacije učenika*.
7. Utvrditi razlike u pogledu *stvaralaštva učenika*, onoga stvaralaštva stečenog rješavanjem problemskih zadataka i onoga zasnovanog na tradicionalnome, uobičajenome načinu rada na sadržajima osnovnoškolske matematike.
8. Utvrditi kako učenici i učitelji reagiraju u novoj didaktičko-metodičkoj situaciji, tj. u situaciji učenja rješavanjem problemskih zadataka.

Postavljeni cilj i zadaci istraživanja bili su pretpostavka za valjano **zaključivanje**:

- a) o *moogućnostima primjene* učenja rješavanjem problemskih zadataka u elementarnoj nastavi matematike i
- b) o *obrazovnome učinku* učenja rješavanjem problemskih zadataka na sadržajima osnovnoškolske matematike.

#### 4. Hipoteze istraživanja

Iz naznačenog cilja i zadataka istraživanja proizlazi da je najprikladnije postaviti nul-hipotezu:

*Eventualno bolji uspjeh učenika u uvjetima učenja rješavanjem problemskih zadataka u elementarnoj nastavi matematike (operacije s razlomcima) ispod određene razine značajnosti (0,05) mogu se pripisati stjecaju slučajnih okolnosti, a ne utjecaju rješavanja problemskih zadataka kao eksperimentalnoga činitelja. Zadovoljenje ili premašivanje ove razine značajnosti značit će odbacivanje nul-hipoteze.*

U kauzalnome obliku hipoteza, koja se istraživanjem provjerava, glasi:

*S obzirom na to da je rješavanje problemskih zadataka prema dosadašnjim spoznajama potvrđeno kao učinkovit i produktivan oblik učenja, realno je pretpostaviti da će ono utjecati na značajno povećanje ukupnoga obrazovnoga učinka učenja u elementarnoj nastavi matematike.*

Pod *ukupnim obrazovnim učinkom* podrazumijevamo uspjeh u znanju, odnosno ukupan rezultat na testu znanja iz nastavnoga područja (operacije s razlomcima), koje je osnova i sadržajni okvir utjecaja eksperimentalnoga činitelja.

Primijenjen eksperimentalni postupak omogućuje provjeru *još jedne hipoteze* koja se odnosi na *trajnost stečenih znanja*, kao jedne od komponenta ukupnoga obrazovnoga učinka i kvalitete odgojno-obrazovnoga procesa. Provjera ove hipoteze obavlja se ponovljenim mjerenjem obrazovnoga učinka istim testom nakon stanovitog vremena. Rezultati ponovljenog mjerenja mogli bi utvrditi:

- *retenciju prije učenih nastavnih (matematičkih) sadržaja,*
- *stabilnost stečenih znanja* koja se odnose na razumijevanje matematičkih svojstava i zakonitosti te primjenu algoritama, činjenica i informacija.

Tu hipotezu možemo formulirati na sljedeći način:

*Znanja stečena primjenom rješavanja problemskih zadataka u nastavi pokazuju veću stabilnost i trajnost od onih koja su stečena klasičnim načinom u okviru tradicionalne nastave. Pritom mora biti zadovoljen uvjet da između završnoga i ponovljenoga mjerenja mora proći dovoljno dugo razdoblje.*

Pod *trajnošću znanja* shvaćamo fiksiranje, retenciju i reprodukciju stečenih znanja, ali i raspoloživost stečenih znanja koja će se u novim nastavnim i životnim situacijama uključiti kao element u novim spoznajnim i praktičnim situacijama.

Uz problem aplikativnosti (primjenljivosti) stečenih znanja i njegova uzajamnog odnosa s rješavanjem problemskih zadataka kao nezavisne varijable moguće je, također, postaviti hipotezu. Ovu hipotezu možemo iskazati ovako:

*Učenje će rješavanjem problemskih zadataka, podižući ukupni obrazovni učinak na višu razinu, utjecati na značajno veću aplikativnost stečenih znanja i pridonijeti stjecanju novih znanja.*

*Aplikativnost stečenih znanja* shvaćamo kao kakvoću znanja koja se očituje u mogućnosti relativno lake i brze primjene u novim situacijama, a *doprinos stjecanju znanja* bitna je pretpostavka učenja koja osigurava lakše, jednostavnije i racionalnije učenje – učenje učenja.

Primijenjen model sustava vježbi za poticanje problemsko-stvaralačkih sposobnosti učenika omogućuje provjeru i ove hipoteze:

*Model sustava vježbi za poticanje problemsko-stvaralačkih sposobnosti učenika utjecat će pozitivno, i to značajno, na rješavanje problemskih zadataka u nastavi.*

Provjera postavljenih hipoteza istraživanja ima za cilj sveobuhvatniji tretman zavisne varijable, a sveobuhvatnost se odnosi, kako na količinu, kvantum znanja, tako i na stanovište njezinih bitnih komponenata i odlika.

## 5. Uzorak istraživanja

U uzorak smo uzeli učenike šestoga razreda. U eksperimentalnoj grupi (E-grupa) bilo je 78 ispitanika, dok je u kontrolnoj grupi (K-grupa) bilo 77 ispitanika. U *uzorku smo*, dakle, *imali 155 ispitanika*.

Uzorak pripada kategoriji *namjernih uzoraka* s približno reprezentativnim karakterom u odnosu prema dijelu školske populacije.

Što se tiče veličine uzorka, odlučili smo se za *uzorak srednje veličine*. Veličina uzorka udovoljava kriterijima što se odnose na *eksperiment inten-*

*živnoga tipa*, kojima nije cilj obuhvaćanje velikoga broja ispitanika, već dublji zahvat u ispitane činitelje i učinke istraživanja. Dakle, u eksperimentu ovoga tipa *nije bitan broj ispitanika koliko rezultati samoga istraživanja*.

## 6. Mjerni instrumenti

U realizaciji ovoga istraživanja primijenili smo određene mjerne instrumente. Osnovna je njihova namjena bila da, u skladu s postavljenim ciljem i zadacima te karakterom istraživanja, pruže potrebne objektivne i pouzdane podatke o promjenama koje nastaju pod utjecajem rješavanja problemskih zadataka u nastavi i o prethodnome stanju u pogledu opće sposobnosti i znanja iz matematike.

Da bi se ova funkcija mogla ostvariti, procijenili smo da su najpogodniji bili ovi mjerni instrumenti:

- a) *za opću sposobnost* – test »Nešto za razmišljanje« i »Problemsko-stvaralački test«, posebno konstruiran za ovu svrhu; i
- b) *za snimanje znanja* – specijalno za ovu svrhu konstruirani testovi znanja (test »Prehodna znanja iz matematike«, test »Operacije s razlomcima – prehodna znanja«, test »Operacije s razlomcima«).

Radi upotpunjavanja podataka dobivenih primjenom mjernih instrumenata, tj. testova, rabili smo i ove tehnike i postupke: (1) upitnik (anketni list) za učenike, (2) vođenje protokola, (3) snimanje nastavnih sati i (4) procjenjivanje (skaliranje) učitelja o problemsko-stvaralačkoj sposobnosti učenika.

## 7. Obrada podataka

Dobiveni podaci obrađeni su u dvije faze. U prvoj su fazi ručno sređeni i obrađeni podaci koji su dobiveni testiranjem, anketnim upitnikom za učenike, protokolom učitelja o tijeku eksperimenta, snimanjem nastavnih sati i procjenjivanjem učitelja o problemsko-stvaralačkim sposobnostima učenika. Na taj su način dobiveni kvantitativni pokazatelji parametara za koje se pretpostavlja da su povezani ili mogu biti povezani s fenomenom odabranim za ovo istraživanje.

U drugoj su fazi podaci obrađeni na računalu, primjenom SPSS statističkoga paketa i STATISTICA 5.0 (StatSoft Inc., 1995).

Pri statističkoj obradi i interpretaciji rezultata ispitivanja korišteni su: aritmetička sredina, standardna devijacija, postotak, koeficijent varijaa-

bilnosti, standardna pogreška aritmetičke sredine na osnovi standardne devijacije osnovnoga skupa, standardna pogreška razlika aritmetičkih sredina,  $t$ -vrijednost (omjer), hi-kvadrat ( $\chi^2$ ) test i biserijski koeficijent korelacije.

## 8. Obilježja uzorka

Od obilježja koja karakteriziraju naš uzorak uzeli smo u razmatranje samo ona koja direktno ili indirektno mogu utjecati na eksperimentalne rezultate. To su: spol, školska sprema roditelja, opći uspjeh na kraju V. razreda, uspjeh u matematici na kraju V. razreda, izrađivanje domaćih zadaća iz matematike, te zanimanje učenika za enigmatske probleme. Po svim navedenim obilježjima kontrolna i eksperimentalna grupa bile su uravnotežene, pa su navedena obilježja na jednak način djelovala u objema grupama.

## 9. Polazna mjerenja

Polazna mjerenja opće sposobnosti i predznanja iz matematike do obrade sadržaja nastavne cjeline *Operacije s razlomcima* obavljena su primjenom testa »Nešto za razmišljanje«, testa »Prethodna znanja iz matematike«, »Problemsko-stvaralačkoga testa« i testa »Operacije s razlomcima – prethodna znanja«.

**9.1.** Opća sposobnost učenika ispitivana je primjenom testa »Nešto za razmišljanje«. Dobiveni su rezultati pokazali da su razlike u aritmetičkim sredinama i u ostalih pokazatelja u objema raspodjelama rezultata minimalne, što znači da su obje grupe, prema općoj sposobnosti kao značajnome činitelju u procesu usvajanja znanja, gotovo u cijelosti ujednačene. Kontrolna grupa ima neznatno veći prosjek bodova po učeniku ( $d_x = 0,64$ ), ali statistička značajnost razlika aritmetičkih sredina ne postoji, s obzirom na to da je  $t = 0,190$  ( $P_{0,05} = 2,60$ ,  $P_{0,01} = 1,97$ ). Time je isključena mogućnost da ovaj faktor s različitim intenzitetom utjecaja djeluje na svaku grupu uključenu u eksperiment posebno.

**9.2.** Sljedeći kriterij ujednačavanja grupa bila su prethodna znanja iz matematike koja su učenici učili do (uključivo) V. razreda osnovne škole. Ta su znanja mjerena testom »Prethodna znanja iz matematike«.

Dobiveni podaci upućuju na to da su obje grupe postigle ujednačene rezultate iz poznavanja gradiva iz razreda koji prethode VI. razredu. Posebno se to odnosi na broj prosječno riješenih zadataka po učeniku ( $\bar{X}_E = 24,40$ ;  $\bar{X}_K = 24,47$ ). To znači da razlika između aritmetičkih sredina



nije statistički značajna ni na razini 0,05 niti na razini 0,01 jer veličina  $t$ -vrijednosti iznosi 0,049.

Na osnovi ovih podataka može se sa sigurnošću zaključiti da su obje grupe, kontrolna i eksperimentalna, ujednačene po kriteriju znanja (prethodnih razreda).

**9.3.** U cilju utvrđivanja problemsko-stvaralačkih sposobnosti učenika primijenjen je »Problemsko-stvaralački test«. On je poslužio i kao korektiv utvrđivanja ujednačenosti eksperimentalne i kontrolne grupe.

Na osnovi dobivenih podataka zaključuje se da su grupe u eksperiment ušle gotovo u cijelosti ujednačene. Pritom je eksperimentalna grupa imala neznatno bolji prosjek riješenih zadataka po učeniku ( $\bar{X}_E = 36,19$ ;  $(d_{\bar{x}} = 0,75)$ ). Međutim, kako je vrijednost  $t$ -omjera 0,347, to statistička značajnost razlike aritmetičkih sredina ne postoji.

**9.4.** Kakva su i kolika prethodna znanja iz matematike na kojima se direktno temelji obrada sadržaja nastavne cjeline *Operacije s razlomcima*, utvrđeno je primjenom testa »Operacije s razlomcima – prethodna znanja«. Osim toga, ovaj je test poslužio i kao korektiv utvrđivanja ujednačenosti eksperimentalne i kontrolne grupe.

Uspoređujući aritmetičke sredine i pripadajuće standardne devijacije može se uočiti da je kontrolna grupa postigla nešto bolji rezultat ( $\bar{X}_K = 16,08$ ,  $\sigma = 4,91$ ;  $\bar{X}_E = 15,69$ ,  $\sigma = 5,04$ ). No, kako je vrijednost  $t$ -omjera 0,485, slijedi zaključak da razlika između aritmetičkih sredina nije statistički značajna ni na razini 0,01 niti na razini 0,05. Zato se, na osnovi ovih podataka, s velikom sigurnošću može reći da su, s obzirom na znanja na kojima se temelji usvajanje gradiva nastavne cjeline *Operacije s razlomcima*, obje grupe u eksperiment ušle ujednačene.

\* \* \*

Na osnovi izloženih rezultata polaznoga mjerenja može se zaključiti da su grupe – eksperimentalna i kontrolna – u eksperiment ušle približno ujednačene i da su stvoreni uvjeti za organizaciju eksperimenta primjenom paralelnih ujednačenih grupa.

Ujednačenost grupa lijepo se uočava iz reljefnoga pregleda rezultata dobivenih primjenom testa »Nešto za razmišljanje« (Test NZR), testa »Prethodna znanja iz matematike« (Test PZM), »Problemsko-stvaralačkoga testa« (PS testa) i testa »Operacije s razlomcima – prethodna znanja« (Test OR-PZ), (slika 1). Na usporednim *centilnim dijagramima* vide se minimalne razlike između eksperimentalne i kontrolne grupe. Kod

svih primijenjenih testova u polaznome su mjerenju u objema grupama medijan i aritmetička sredina gotovo iste vrijednosti. Središnjih 50% slučajeva, tj. onih koji se nalaze između  $Q_1$  (prvoga kvartila) i  $Q_3$  (trećega kvartila), uglavnom se poklapaju – na slici su predstavljeni kao izduženi parovi pravokutnika (stupci). Odstupanja od aritmetičke sredine također su malena. U rasponu varijacije nema značajnijih razlika.

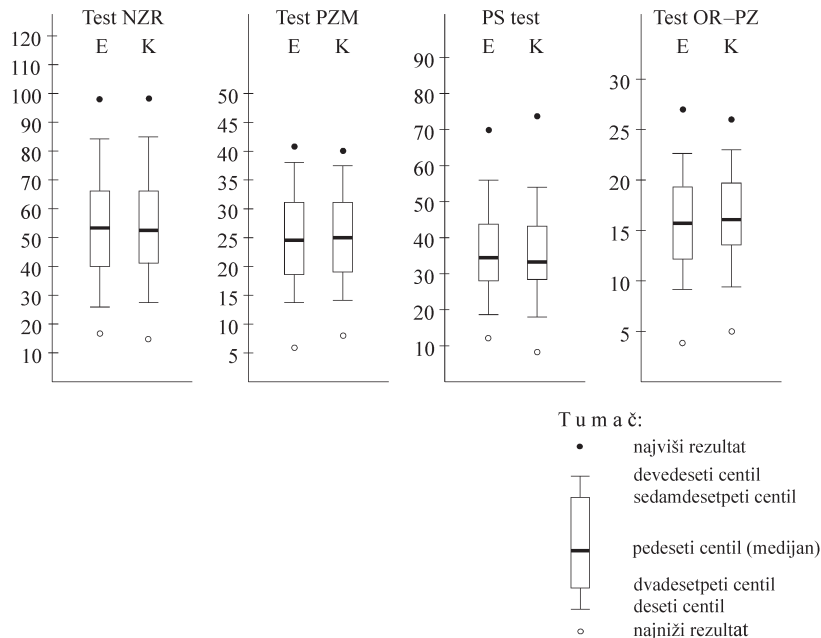
Iz izloženih je rezultata polaznoga mjerenja potrebno istaknuti i sljedeće:

(a) obje grupe ulaze u eksperiment s relativno niskim postignućem u testu »Nešto za razmišljanje« (nešto više od 46%) koji odgovara uspjehu utvrđenom u uzorku standardizacije, što znači da se ne radi o uzorku divergentnome u odnosu prema populaciji kojoj pripada;

(b) grupe pokazuju prosječan uspjeh u prethodnim znanjima iz matematike koja u nekoj mjeri određuju i razinu uspjeha u eksperimentu.

**Grupe su ujednačene u razini znanja i homogenosti.**

Početno mjerenje testom »Operacije s razlomcima – prethodna znanja« pokazuje da se razina učeničkih znanja iz područja koja su osnova za rad na sadržajima cjeline *Operacije s razlomcima* kreće oko 59%, što je re-



Slika 1.

lativno visoko postignuće. Ono je posljedica prethodnoga iskustva učenika o razlomcima s kojim su se susretali tijekom dosadašnjega školovanja u sklopu nastave matematike (u ranijim razredima), ali i čestog susretanja s razlomcima u praktičnome svakodnevnome životu. Ta su prethodna znanja, didaktičko-metodički promatrano, dobra osnova na kojoj se gradi proces daljnijega stjecanja znanja i produbljenog shvaćanja onoga što se uči.

## 10. Završna mjerenja

### 10.1. *Opći obrazovni učinak učenja rješavanjem problemskih zadataka u nastavi*

U skladu s našim operativnim zadatkom valjalo je utvrditi *razlike* u pogledu kvantitete znanja učenika koje nastaju kao rezultat rada na *tradicionalni, uobičajen način* i na osnovi *učenja rješavanjem problemskih zadataka*.

Rezultati dobiveni primjenom testa »Operacije s razlomcima« (35 zadataka s maksimalno 35 bodova) prikazani su u tablici 1. Bez obzira na to što se u oba mjerenja – polaznome i završnome – radilo o dvoma različitim testovima po sadržaju, ali istovrsnim po konstrukciji i strukturi zadataka i srodnim po namjeni, eksperimentalna je grupa pokazala u završnome mjerenju ne samo uspješnije rezultate, već i njihovu pravilniju distribuciju (slika 2).

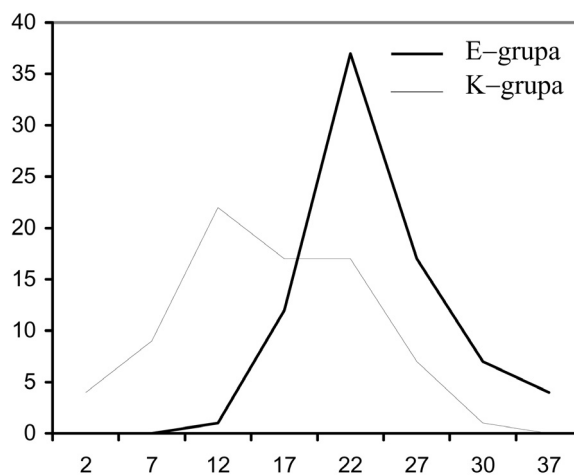
Detaljniji podaci o kvantitativnim pokazateljima distribucije rezultata u primijenjenom testu po grupama, prikazani su usporednim poligonima frekvencija (slika 2).

Usporedni pregled osnovnih rezultata postignutih u testu »Operacije s razlomcima« u završnome mjerenju, pokazuje da eksperimentalna grupa ima bolji rezultat za 7,9 bodova. Uspjeh kontrolne grupe znatno je niži i na razini je koja se obično postiže u ovakvim testovima znanja u uobičajenoj nastavi. Eksperimentalna je grupa superiornija, ne samo po broju osvojenih bodova po jednome učeniku, već i u pogledu ukupno riješenog testa ( $p_E = 67,5\%$ ,  $p_K = 44,3\%$ ). Uspjeh eksperimentalne grupe pokazuje tendenciju prema višim učincima nastave i jedna je od pretpostavki za *efikasnost primijenjenih metoda i oblika rada*.

Uspjeh eksperimentalne grupe nastao je kao rezultat učinkovitosti primjene učenja rješavanjem problemskih zadataka u području stjecanja znanja, što omogućuje bolji obrazovni učinak (uspjeh) u elementarnoj nastavi matematike.

**Tablica 1.** Rezultati u testu »Operacije s razlomcima«

	Oznaka	Grupa	
	ka	E	K
Broj ispitanika u uzorku	$N$	78	77
Aritmetička sredina	$\bar{X}$	23,7	15,8
Postotak uspješnosti	$p$	67,5%	44,3%
Standardna devijacija	$\sigma$	5,00	6,77
Koeficijent varijabilnosti	$V$	21,10	42,85
Standardna pogreška aritmetičke sredine na osnovi standardne devijacije osnovnoga skupa	$\sigma_{\bar{x}}$	0,5698	0,7700
Razlika između aritmetičkih sredina	$d_{\bar{x}}$	7,9	
Standardna pogreška razlika aritmetičkih sredina	$\sigma_{d_{\bar{x}}}$	0,9579	
$t$ – vrijednost	$t$	8,25	

**Slika 2.**

Razlika u aritmetičkim sredinama između obje grupe statistički je značajna jer  $t$ -vrijednost (8,25) znatno premašuje granicu značajnosti na razini 0,01, pa i onu na razini 0,05.

S obzirom na to da su znanja i drugi relevantni činitelji u startu ujednačeni i kontrolirani, smatramo da je razlika nastala pod utjecajem eksperimentalnoga činitelja, tj. primjenom rješavanja problemskih zadataka u obradi nastavnih sadržaja vezanih uz operacije s razlomcima. Zato se nulta hipoteza može odbaciti.

Prema tome, u našem eksperimentu učenje rješavanjem problemskih zadataka pokazuje znatnu prednost, tj. premoć nad uobičajenim načinom rada na općoj razini znanja.

*Time je naša osnovna hipoteza potvrđena.*

Osam zadataka (28, 29, 30, 31, 32, 33, 34 i 35) imaju problemski karakter i njihovim se usporednim pregledom dobiva jasnija slika postignutih rezultata u eksperimentalnoj i kontrolnoj grupi, i to po bodovima (tablica 2).

Podaci dani u tablici 2 prikazani su i grafički (slika 3), na osnovi čega se može steći potpunija slika o postignutim rezultatima.

**Tablica 2.** Usporedni pregled ostvarenih bodova

Redni broj zadatka	Broj ostvarenih bodova	
	E-grupa	K-grupa
28.	29	15
29.	25	8
30.	28	4
31.	30	7
32.	42	19
33.	26	5
34.	24	5
35.	47	40

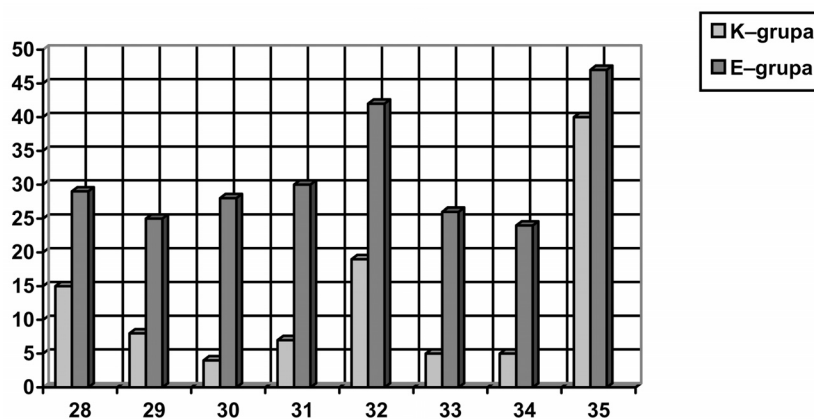
Iako postignuti rezultati u rješavanju problemskih zadataka u eksperimentalnoj grupi nisu izrazito visoki, oni su ipak znatno viši od postignutih u kontrolnoj grupi.

Viši su rezultati u eksperimentalnoj grupi nastali kao posljedica primjene učenja rješavanjem problemskih zadataka u nastavi. Učenici su matematičkim problemskim zadacima prilazili djelotvornije i razmatrali

ih s različitim pozicija, imajući pritom u vidu sve relevantne činjenice, veze i odnose.

Toga u kontrolnoj grupi nije bilo, pa su stoga i rezultati niži od onih u eksperimentalnoj.

O obrazovnome učinku i učinkovitosti primijenjenih didaktičko-metodičkih postupaka valja suditi, ne samo na osnovi broja ili postotka rješenja, već i po broju ili postotku nerješivih zadataka. Ako usporedba učinkovitosti dvaju metodičkih postupaka pokaže manji postotak nerješivih zadataka u sklopu jednoga nastavnoga postupka, to može biti pokazatelj veće uspješnosti toga postupka, ali i znak aktivnijega odnosa i više razine motiviranosti za rješavanje zadataka.



Slika 3.

Cjelovito gledano, eksperimentalna je grupa imala znatno manje nerješivih zadataka od kontrolne grupe: 325 nerješivih zadataka ili 11,9% prema 641 ili 23,8 %.

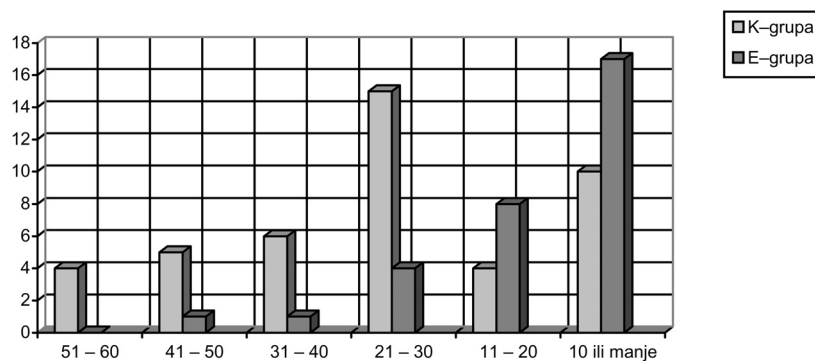
U tablici 3 usporedni je pregled raspodjele »nultih« bodova u zadacima. Uočavamo da je pomicanje frekvencija prema nižemu postotku »nultih« bodova, tj. nerješivih zadataka, izrazitije u eksperimentalnoj grupi.

**Tablica 3.** Raspodjela »nultih« bodova u zadacima testa »Operacije s razlomcima«

Postotak	Grupa	
	eksperimentalna ( $f_E$ )	kontrolna ( $f_K$ )
51–60	0	4
41–50	1	5
31–40	1	6
21–30	4	15
11–20	8	4
10 ili manje	17	10
<b>Ukupno:</b>	<b>31</b>	<b>44</b>

Iz tablice 3 vidljivo je da u eksperimentalnoj grupi 31 učenik ( $\approx 40\%$ ) nije rješavao jedan ili više zadataka, dok je u kontrolnoj grupi takvih učenika bilo 44 ( $\approx 57\%$ ). Na temelju ovoga može se utvrditi da su učenici eksperimentalne grupe iskazali aktivniji odnos prema rješavanju zadataka. Potkrepa ove tvrdnje nalazi se i u činjenici da su eksperimentalna i kontrolna grupa u eksperimentu i u pogledu nerješivanih zadataka bile ujednačene: odnos je u početnom mjerenju prije eksperimenta testom »Operacije s razlomcima – prethodna znanja« bio 155 (7,4 %) neostvarenih bodova u eksperimentalnoj grupi, prema 131 (6,3%) u kontrolnoj grupi, od ukupno mogućih 1224 (eksperimentalna grupa), odnosno 1240 (kontrolna grupa).

Podaci dani u tablici 3 grafički su prikazani na slici 4.

**Slika 4.**

Možemo tvrditi da je rješavanje problemskih zadataka povoljnije od uobičajenoga, tradicionalnoga načina rada utjecalo na aktivniji odnos učenika prema rješavanju zadataka u završnome mjerenju. Ovu tvrdnju temeljimo, između ostaloga, i na većoj raspoloživosti znanja učenika eksperimentalne grupe koja su stečena tijekom obrade nastavnih sadržaja.

Iz izloženoga se vidi da su eksperimentalna i kontrolna grupa različito napredovale u znanju u procesu nastave. Da bismo utvrdili koliko je napredovala pojedina grupa, uspoređujemo njihove rezultate s početnoga i završnoga mjerenja. To se napredovanje lijepo uočava iz podataka izloženih u tablici 4.

Uspoređivanjem dobivenih podataka jasno je uočljiv napredak eksperimentalne grupe u odnosu prema kontrolnoj u završnome ispitivanju. Isto tako, uočljivo je znatnije napredovanje eksperimentalne grupe u završnome ispitivanju u odnosu prema početnom, kada se uspoređuje s kontrolnom grupom.

**Tablica 4.** Usporedni podaci eksperimentalne i kontrolne grupe u početnome i završnome mjerenju

	Eksperimentalna grupa			Kontrolna grupa		
	početno	završno	razlika	početno	završno	razlika
Aritmetička sredina ( $\bar{X}$ )	15,69	23,7	8,01	16,08	15,8	<b>-0,28</b>
Postotak ( $p$ )	58,1	67,5	9,4	59,6	44,3	<b>-15,3</b>
Standardna devijacija ( $\sigma$ )	5,04	5,00	<b>-0,04</b>	4,91	6,77	1,86
Koeficijent varijabilnosti ( $V$ )	32,12	21,10	<b>-11,02</b>	30,53	42,85	12,32

U završnome je mjerenju eksperimentalna grupa ostvarila značajan porast u aritmetičkoj sredini i postotku uspjeha na testu. U početnome je mjerenju aritmetička sredina iznosila 15,69, dok je u završnome mjerenju ona bila 23,7, što je povećanje za 8,01 bodova po učeniku; kontrolna grupa bilježi podbačaj i on iznosi -0,28. Postotak uspjeha u testu eksperimentalne grupe povećan je sa 58,1 u početnome mjerenju na 67,5 u završnome, što je povećanje od 9,4 ili izraženo u postocima 16,2%; u kontrolnoj se grupi bilježi podbačaj (-15,3) koji iskazan u postocima iznosi 34,5%.

Važan je i podatak da su obje grupe u eksperiment ušle umjereno i na jednak način homogene ( $V_E = 32,15$ ;  $V_K = 30,53$ ). Međutim, nakon



završetka eksperimenta ta je homogenost poremećena: eksperimentalna je grupa poboljšala homogenost učenika u nastavi ( $V_E = 21,10$ ), dok je u kontrolnoj grupi uočeno smanjenje polazne homogenosti ( $V_K = 42,85$ ). Ova se činjenica, također, može smatrati povoljnim popratnim učinkom eksperimentalnoga načina rada.

Dakle, praćenje napredovanja grupa nedvojbeno upućuje na zaključak da je napredak u ukupnim rezultatima na testu znanja postigla eksperimentalna grupa. Ovo se može objasniti činjenicom što se u završnome ispitivanju tražilo svestranije pristupanje matematičkim sadržajima, što se može pripisati uspješnom utjecaju eksperimentalnoga činitelja.

### **10.2. Razina usvojenosti činjenica i informacija**

Prilikom projektiranja i organizacije nastavnoga procesa u eksperimentu, ali i pri konstrukciji testa »Operacije s razlomcima«, pošli smo od činjenice da je za intelektualni razvoj učenika, uz ostale komponente, od posebne važnosti *usvajanje određenoga fonda činjenica i informacija*. Naime, poznavanje osnova nekoga znanstvenoga područja tek je onda potpuno kada učenik, osim razumijevanja bitnih veza i odnosa, može uspješno operirati i nužnim brojem činjenica i informacija. Jer, ako činjenice i informacije nisu predimenzionirane i prenaplašene, one predstavljaju važnu komponentu kompaktilnu s jednom od osnovnih didaktičkih funkcija nastave – *stjecanjem kvalitetnih, trajnih i aplikativnih znanja*.

U pogledu utjecaja učenja rješavanjem problemskih zadataka na obrazovni učinak u elementarnoj nastavi matematike, usvajanje činjenica i informacija pretpostavka je da će eksperimentalni uvjet, osim razumijevanja proučavanih pravila, svojstava i zakonitosti, znatno pridonijeti poboljšanju i razini usvojenosti matematičkih činjenica i informacija.

Stupanj usvojenosti činjenica i informacija ostvaren je završnim mjerenjem učinka testom »Operacije s razlomcima«.

Osnovni rezultati razine usvojenosti činjenica i informacija u grupama prikazani su u tablici 5.

**Tablica 5.** *Razine usvojenosti činjenica i informacija u grupama*

	Oznaka	Grupa	
		E	K
Broj ispitanika u uzorku	$N$	78	77
Aritmetička sredina	$\bar{X}$	13,4	9,7
Postotak uspješnosti	$p$	83,5%	60,3%
Standardna devijacija	$\sigma$	2,49	2,87
Koeficijent varijabilnosti	$V$	18,58	29,59
Standardna pogreška aritmetičke sredine na osnovi standardne devijacije osnovnoga skupa	$\sigma_{\bar{x}}$	0,2838	0,3292
Razlika između aritmetičkih sredina	$d_{\bar{x}}$	3,7	
Standardna pogreška razlika aritmetičkih sredina	$\sigma_{d_{\bar{x}}}$	0,4346	
$t$ – vrijednost	$t$	8,51	

Rezultati mjerenja pokazuju da je eksperimentalna grupa i u pogledu usvojenosti činjenica i informacija postigla znatno bolji uspjeh: 3,7 bodova više po učeniku, odnosno prosječno 23,2 postotaka (83,5 prema 60,3). Razlika je u srednjim vrijednostima ( $t = 8,51$ ) statistički značajna na razini 0,01, ali i na razini 0,05.

Budući da su eksperimentalna i kontrolna grupa prethodno bile ujednačene prema najznačajnijim obilježjima, može se zaključiti da je *uzrok* ovoga *poboljšanja usvojenosti matematičkih činjenica i informacija problemski pristup matematičkim sadržajima i problemska obrada nastavnih sadržaja* na kojim se temeljio ovaj eksperiment.

Prema tome, *učenje rješavanjem problemskih zadataka u nastavi matematike pokazalo je veću učinkovitost od uobičajenoga, tradicionalnog načina rada u pogledu razine usvojenosti matematičkih činjenica i informacija.*

### 10.3. Aplikativnost stečenih znanja

U didaktici i metodikama s pravom se smatra da je *aplikativnost stečenih znanja* u nastavi vrhunac učinkovitosti odgojno-obrazovnoga procesa i jedan od osnovnih kriterija provjere u kojoj su mjeri stečena znanja postala učenikova svojina. Naime, problem aplikativnosti stečenih znanja temelji se na spoznaji da usvojena znanja nisu uvijek i aplikativna znanja.

Znanje je aktivno i aplikativno onda kada se ne javlja u istome vidu i obliku u kojemu je usvojeno, već je transformirano u stavove, ideje i uvjerenja.

Aplikativnost znanja jedan je od osnovnih uvjeta razvijanja sposobnosti uviđanja novoga u susretu s novim problemskim zadacima i nalaženja racionalnoga puta za rješavanje tih novih problemskih zadataka. Ovdje se, prema tome, ne radi o jedinstvenome prestrukturiranju, već o prijenosu naučenih misaonih operacija na nove objekte mišljenja, tj. na nove problemske situacije.

Na teorijskome je planu aplikativnosti stečenih znanja i njihovu transferu (prijenosu) na nove problemske situacije posvećena dužna pozornost. Međutim, još ostaju necjelovito istraženi putovi stvaranja povoljnih kognitivnih (spoznajnih) i drugih uvjeta kako učenje ne bi bilo samo učenje novih sadržaja, činjenica i informacija, već i učenje za transfer (*learning for transfer*). Tu mogućnost sadržava u sebi upravo rješavanje problemskih zadataka.

Budući da rješavanje problemskih zadataka predstavlja prestrukturiranje stečenih znanja u novoj problemskoj situaciji, u artikulaciji problemskoga sata predvidjeli smo etapu aplikativnosti stečenih znanja u novoj problemskoj situaciji. Dakle, dana je mogućnost provjere upoznatih pravila, svojstava i stečenih činjenica i informacija. Ova je provjera u eksperimentalnoj grupi obavljena na satima obrade novih sadržaja, ali i na satima vježbanja i utvrđivanja.

U tu je svrhu u testu »Operacije s razlomcima« postavljeno šest zadataka kojima je mjeran učinak aplikativnosti stečenih znanja.

Osnovni rezultati vezani uz aplikativnost stečenih znanja prikazani su u tablici 6.

Iz tablice 6 vidljivo je da postignuti rezultati u pogledu aplikativnosti stečenih znanja u eksperimentalnoj grupi nisu visoki (39,3%), no oni su ipak znatno viši od onih postignutih u kontrolnoj grupi (12,6%).

**Tablica 6.** Aplikativnost stečenih znanja u grupama

	Oznaka	E-grupa	K-grupa
Aritmetička sredina	$\bar{X}$	2,4	0,8
Postotak	$p$	39,3	12,6

U eksperimentalnoj je grupi prosječno po učeniku riješeno 2,4 zadatka (od 6 zadataka), dok u kontrolnoj grupi taj prosjek ne iznosi ni jedan zadatak (0,8).

Može se zaključiti da je veća aplikativnost stečenih znanja u eksperimentalnoj grupi, a razlog je tomu – može se slobodno tvrditi – upravo učenje rješavanjem problemskih zadataka u nastavi.

#### ***10.4. Utjecaj modela sustava vježbi za poticanje problemsko-stvaralačkih sposobnosti učenika na rješavanje problemskih zadataka u nastavi***

Za utvrđivanje utjecaja modela sustava vježbi za poticanje problemsko-stvaralačkih sposobnosti učenika na rješavanje problemskih zadataka u nastavi korišten je »Problemsko-stvaralački test«.

»Problemsko-stvaralački test« primijenjen je i u početnome mjerenju. Sadržava 75 zadataka s ukupno 85 bodova.

Naša hipoteza da će na »Problemsko-stvaralačkome testu« učenici koji su matematičke sadržaje usvajali učenjem rješavanjem problemskih zadataka i koji su sudjelovali u realizaciji modela sustava vježbi za poticanje problemsko-stvaralačkih sposobnosti postići znatno bolji uspjeh, u cijelosti je potvrđena.

Problemsko-stvaralačke sposobnosti i učenje rješavanjem problemskih zadataka u čvrstoj su vezi jer problemsko-stvaralačke sposobnosti podrazumijevaju, između ostaloga, originalnost, otvorenost, fleksibilnost, racionalnost, fluentnost ideja, rješavanje problemskih zadataka. Upravo su zato u eksperimentalnoj grupi očekivani bolji rezultati u odnosu prema kontrolnoj grupi, koja nije bila u situaciji da stječe znanja rješavanjem problemskih zadataka u nastavi i koja nije sudjelovala u modelu sustava vježbi. Očekivanja su se pokazala ispravnima.

U završnome je mjerenju eksperimentalna grupa, u odnosu prema kontrolnoj, postigla značajno bolji, viši rezultat, kako u prosječno ostvarenim bodovima po učeniku ( $\bar{X}_E = 49,69$ ,  $d_{\bar{X}} = 12,03$ ), tako i općim uspjehom u rješavanju »Problemsko-stvaralačkoga testa«:  $p_E = 58,5\%$ ,  $p_K = 44,3\%$ , ili  $+14,2\%$  u korist eksperimentalne grupe.

Uspoređivanjem rezultata u početnome mjerenju i onih u završnome, vidi se različit napredak eksperimentalne i kontrolne grupe u problemsko-stvaralačkim sposobnostima. To se napredovanje lijepo uočava iz podataka prikazanih u tablici 7. Jasno je uočljiv napredak eksperimentalne grupe.

U početnome su mjerenju u objema grupama ostvareni prilično ujednačeni rezultati – eksperimentalna je grupa u svim relevantnim pokazateljima bila nešto (zanemarivo) bolja – što znači da su grupe u eksperiment ušle s ujednačenom kvalitetom u pogledu problemsko-stvaralačkih sposobnosti.

I dok je kontrolna grupa uglavnom stagnirala ili neznatno napredovala, napredovanje eksperimentalne grupe bilo je značajno.

U odnosu prema početnom mjerenju, eksperimentalna je grupa u završnome mjerenju napredovala u prosječno osvojenim bodovima po učeniku za 13,50, za razliku od kontrolne grupe gdje to napredovanje iznosi samo 2,22. Eksperimentalna je grupa zapaženo napredovala i u općem uspjehu, pri čemu je, u odnosu prema početnom mjerenju, zabilježen porast za 15,9 postotnih jedinica, dok je kod kontrolne grupe taj porast skromnih 2,6 postotnih jedinica.

U eksperiment su obje grupe ušle umjereno i na jednak način homogene ( $V_E = 36,39$ ;  $V_K = 38,32$ ). Međutim, nakon završetka eksperimenta došlo je do poremećaja te homogenosti: eksperimentalna je grupa znatno poboljšala homogenost ( $V_E = 25,74$ ) u odnosu prema kontrolnoj grupi, gdje je ona ostala gotovo ista ( $V_K = 36,83$ ).

**Tablica 7.** Usporedni podaci eksperimentalne i kontrolne grupe u početnome i završnome mjerenju u »Problemsko-stvaralačkome testu«

	Eksperimentalna grupa			Kontrolna grupa		
	početno	završno	razlika	početno	završno	razlika
Aritmetička sredina ( $\bar{X}$ )	36,19	49,69	13,50	35,44	37,66	2,22
Postotak ( $p$ )	42,6	58,5	15,9	41,7	44,3	2,6
Standardna devijacija ( $\sigma$ )	13,17	12,79	<b>-0,38</b>	13,58	13,87	0,29
Koeficijent varijabilnosti ( $V$ )	36,39	25,74	<b>-10,65</b>	38,32	36,83	<b>-1,49</b>

S obzirom na prethodnu ujednačenost grupa po svim relevantnim činiteljima, nastale se (značajne) razlike u korist eksperimentalne grupe mogu pripisati utjecaju učenja rješavanjem problemskih zadataka primijenjena u radu na matematičkim sadržajima, kao i modelu sustava vježbi za poticanje problemsko-stvaralačkih sposobnosti učenika.

Prema tome, možemo zaključiti da je, s obzirom na ujednačenost u startu, eksperimentalni činitelj utjecao na to da eksperimentalna grupa ostvari

*bolje rezultate na »Problemsko-stvaralačkome testu«, čime je naša hipoteza i potvrđena.*

Može se, nadalje, zaključiti i to da je i model sustava vježbi za poticanje problemsko-stvaralačkih sposobnosti učenika imao utjecaja na dobivene rezultate.

### **11. Učinak u pogledu trajnosti stečenih znanja**

Jedan je od pokazatelja uspješnosti primijenjenih didaktičko-metodičkih postupaka *trajnost stečenih znanja*.

Posebna je hipoteza o trajnosti stečenih znanja glasila da će znanja stečena rješavanjem problemskih zadataka biti trajnija, s obzirom na to da rješavanje problemskih zadataka svojom prirodom optimalno pridonosi stabilnosti i raspoloživosti naučenih sadržaja i dovodi do učvršćivanja memorativnih veza među usvojenim sadržajima. Upravo je zato trebalo utvrditi postoje li razlike u trajnosti između znanja stečenih na uobičajen, tradicionalan način i znanja koja su stečena učenjem rješavanjem problemskih zadataka i kolike su te razlike (ako postoje).

Budući da su grupe u eksperimentu radile u približno ujednačenim uvjetima (ista količina nastavnih sadržaja, ista nastavna sredstva i pomagala, jednak fond nastavnih sati kao i približna ujednačenost u drugim relevantnim obilježjima), eventualno povoljniji *činak u pogledu trajnosti stečenih znanja* u eksperimentalnoj grupi mogao bi se pripisati utjecaju problemskoga pristupa matematičkim sadržajima i njihovoj problemskoj obradi.

Devedesetak dana od prestanka djelovanja eksperimentalnoga činitelja ponovno je provedeno mjerenje istim testom znanja koji je korišten i u završnome mjerenju (test »Operacije s razlomcima«). Smatrali smo da je razdoblje od devedesetak dana (oko tri mjeseca) poslije završnoga mjerenja, koje je obuhvatilo i zimske praznike, dovoljno dugo za sređivanje, učvršćivanje učenikova znanja i za pouzdanije utvrđivanje učinka trajnosti stečenih znanja.

Rezultati dobiveni ponovljenim mjerenjem prikazani su u tablici 8.

**Tablica 8.** Rezultati u testu »Operacije s razlomcima« (ponovljeno mjerenje)

	Oznaka	Grupa	
		E	K
Broj ispitanika u uzorku	$N$	78	77
Aritmetička sredina		22,5	14,0
Postotak uspješnosti	$P$	64,2%	40,0%
Standardna devijacija	–	6,11	6,97
Koeficijent varijabilnosti	$V$	27,16	49,79
Standardna pogreška aritmetičke sredine na osnovi standardne devijacije osnovnoga skupa		0,6963	0,7995
Razlika između aritmetičkih sredina		8,5	
Standardna pogreška razlika aritmetičkih sredina		1,0602	
$t$ – vrijednost	$T$	8,02	

Uspoređivanjem aritmetičkih sredina ponovljenoga (kontrolnoga) mjerenja (tablica 8) s aritmetičkim sredinama završnoga mjerenja (tablica 1) može se vidjeti da je u objema grupama došlo do neznatnog pada razine općega uspjeha. U eksperimentalnoj grupi taj pad iznosi 1,2 boda, dok je u kontrolnoj 1,8 bodova. Opadanje uspjeha u objema je grupama minimalno, što znači da je učinak retencije zadovoljavajuć, imamo li na umu da je od završnoga do ponovljenog mjerenja prošlo prilično vremena. Međutim, eksperimentalna je grupa zadržala visoku prednost sa završnoga mjerenja, jer je svaki učenik iz te grupe u prosjeku ostvario više od 64% mogućih bodova; u kontrolnoj grupi taj prosjek iznosi 40%.

Budući da  $t$ -vrijednost iznosi 8,02, razlika među aritmetičkim sredinama statistički je značajna na objema razinama.

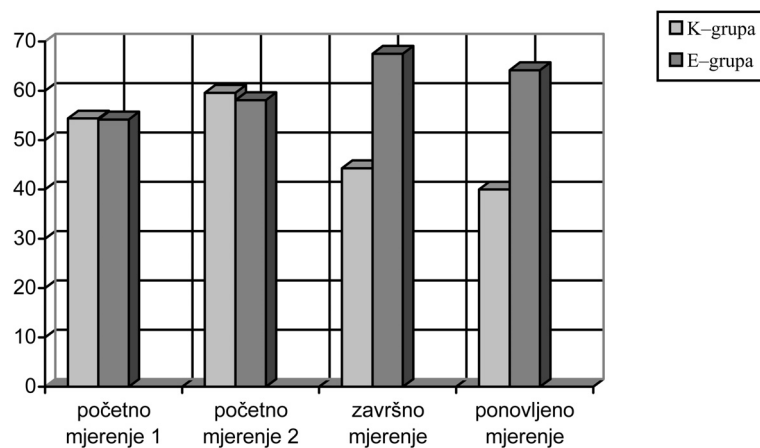
Usporedni rezultati (tablica 9) početnoga, završnoga i ponovljenog, tj. kontrolnog mjerenja prikazani su na slici 5. Grafička ilustracija pokazuje da su u početnome mjerenju rezultati eksperimentalne i kontrolne grupe dovoljno ujednačeni – kontrolna je grupa u oboma testovima imala neznatno bolji rezultat. Međutim, kod završnoga mjerenja, ali i kod ponovljenoga mjerenja, dominiraju rezultati koje je postigla eksperimentalna grupa.

**Tablica 9.** Usporedni rezultati početnoga, završnoga i ponovljenoga mjerenja

Mjerenje		Pototak postignuća	
		E-grupa	K-grupa
Početno	»Prethodna znanja iz matematike« (1)	54,2	54,4
	»Operacije s razlomcima – prethodna znanja« (2)	58,1	59,6
Završno		67,5	44,3
Ponovljeno (kontrolno)		64,2	40,0

Važno je istaknuti da je postojanost postignutih rezultata u eksperimentalnoj grupi veća, budući da je koeficijent varijabilnosti 27,16. U kontrolnoj grupi taj koeficijent iznosi 49,79, što znači da je ovdje veća raspršenost pojedinačnih rezultata oko aritmetičke sredine.

Iz izloženoga se daje zaključiti da su razine znanja među grupama, iako linearno snižene, ostale različite i da je razlika u aritmetičkim sredinama među grupama ponovno statistički značajna ( $t$ -vrijednost iznosi 8,02).

**Slika 5.**

Ispitivanje učinka utjecaja eksperimentalnoga činitelja na trajnost stečenih znanja u našem eksperimentu pokazalo je sljedeće: (1) u objema



je grupama došlo do neznatnoga pada općega uspjeha pa se može reći da je učinak trajnosti stečenog znanja zadovoljavajuć; (2) u eksperimentalnoj je grupi došlo do manjega pada razine općega uspjeha nego u kontrolnoj grupi, pa je time, makar neznatno, došlo do veće razlike između grupa; i (3) rješavanje problemskih zadataka omogućilo je veću stabilnost znanja u eksperimentalnoj grupi.

Prema tome, može se reći da je *eksperimentalna grupa zadržala stečenu kvalitativnu prednost u pogledu trajnosti stečenih znanja*, čak štoviše, *došlo je do blagoga povećanja razlike u uspjehu* (u korist eksperimentalne grupe).

Na osnovi iznesenog može se zaključiti da je *hipoteza koja se odnosi na očekivanu veću prednost rješavanja problemskih zadataka u pogledu trajnosti stečenih znanja, u potpunosti potvrđena*.

## 12. Zaključna razmatranja

Rješavanje problemskih zadataka u nastavi oblik je učenja koji karakterizira teškoća, nova situacija, neadekvatnost prije stečenih znanja i iskustava u novoj situaciji, kao i potreba prestrukturiranja tih prije stečenih znanja i iskustava u kontekstu postavljenog cilja. Rješavanje je problemskih zadataka u nastavi i integralna i integrativna višedimenzionalna mentalna aktivnost, kojom se učenik uvodi u sve samostalnije uočavanje bitnih veza i odnosa, izvođenje zaključaka, stjecanje novih znanja i generalizacija i usvajanje racionalnijih putova i mišljenja.

Učenici su u eksperimentalnoj grupi pokazivali punu aktivnost, svestrani pristup matematičkim sadržajima, racionalnost, stvaralaštvo i kritičnost. Samostalno su uočavali problemske zadatke, formirali ih, dekomponirali, postavljali hipoteze, istraživali i otkrivali te se kritički osvrtni na dobivena rješenja. Osposobljavali su se za samostalno poniranje u matematičke sadržaje, istraživanje i otkrivanje relevantnih matematičkih činjenica i zakonitosti. Utjecalo je to, naravno, na drukčiju organizaciju i artikulaciju nastavnoga sata, čime se nastojao osigurati intenzivniji misaoni rad učenika, logičan (i prirodan) slijed pojedinih etapa i operacija učenja i veći obrazovni učinci.

Za verifikaciju utjecaja eksperimentalnoga činitelja izabran je pedagoški eksperiment s paralelnim, približno ujednačenim grupama. Opređijelili smo se, dakle, za dovoljno pouzdan metodološki postupak kako bismo došli do potrebnih dokaznih podataka o stupnju ispravnosti postavljenih hipoteza.

U tako kontroliranim uvjetima utvrdili smo sljedeće učinke učenja rješavanjem problemskih zadataka: (1) ukupni obrazovni učinak, (2) razina usvojenosti informacija i činjenica, (3) aplikativnost stečenih znanja, (4) utjecaj modela sustava vježbi za poticanje problemsko-stvaralačkih sposobnosti učenika na rješavanje problemskih zadataka u nastavi i (5) učinak u pogledu trajnosti stečenih znanja.

Primijenjeno je više mjernih instrumenata i svi posjeduju veoma povoljne metrijske karakteristike. Mjerni instrumenti predstavljaju pouzdan izvor podataka, čime je stvorena solidna osnova za donošenje konačnog suda o ispravnosti postavljenih hipoteza i za izvođenje odgovarajućih zaključaka.

Polaznim je mjerenjima utvrđeno da su grupe u eksperimentu bile približno ujednačene u svim relativnim obilježjima, čime su stvoreni uvjeti za opravdano očekivanje da će eksperimentalni činitelj biti uzrok i izvor pretpostavljenih ispitivanih varijacija.

Na osnovi provedenoga eksperimenta i dobivenih empirijskih podataka, mogu se izvesti sljedeći zaključci:

1. Rezultati završnoga mjerenja dobiveni kriterijskim testom »Operacije s razlomcima« pokazali su da je eksperimentalna grupa postigla bolji ukupan uspjeh (23,7 bodova ili 67,5% mogućih bodova po učeniku u eksperimentalnoj, u odnosu prema 15,8 bodova ili 44,3% u kontrolnoj grupi). Vrijednost  $t$ -omjera iznosi 8,25 ( $P < 0,05$ ; 1,97) i upućuje na statističku značajnost nađenih razlika u aritmetičkim sredinama eksperimentalne i kontrolne grupe. Time je potvrđena glavna hipoteza prema kojoj učenje rješavanjem problemskih zadataka utječe na značajno povećanje ukupnoga obrazovnoga učinka. Uočeno je, također, da se znanja u eksperimentalnoj grupi kreću prema višim rezultatima, a to je gibanje nastalo utjecajem eksperimentalnoga činitelja.
2. Dobiveni rezultati upućuju na to da rješavanje problemskih zadataka potiče učenika na aktivniji misaoni rad, a time i na dinamičniji tijek spoznajnoga procesa koji prethodi konačnoj konstituciji i konsolidaciji znanja.
3. Učenici eksperimentalne grupe iskazali su veću motiviranost za rješavanje zadataka u testu. To se vidi iz manjega postotka nerješivanih zadataka: 12% nepokušanih rješavanja u eksperimentalnoj grupi u odnosu prema 23% u kontrolnoj grupi.
4. Rezultati mjerenja pokazuju da je eksperimentalna grupa u usvojenosti informacija i činjenica postigla znatno bolji uspjeh (83,5% mogućih bodova po učeniku u odnosu prema 60,3% u kontrolnoj grupi). Vrijednost  $t$ -omjera iznosi 8,51 ( $P < 0,05$ ; 1,97) i upućuje na statis-

tičku značajnost nađenih razlika u aritmetičkim sredinama eksperimentalne i kontrolne grupe. To znači da je učenje rješavanjem problemskih zadataka pokazalo veću učinkovitost od uobičajenog načina rada u razini usvojenosti matematičkih činjenica i informacija.

5. Postignuti su rezultati u pogledu aplikativnosti stečenih znanja u eksperimentalnoj grupi znatno veći u odnosu prema kontrolnoj grupi: razlika 26,7 indeksnih postotaka u korist eksperimentalne grupe. Iako aplikativnost stečenih znanja u eksperimentalnoj grupi nije visoka (oko 39%), ona je ipak znatno viša nego u kontrolnoj grupi (oko 13%). Ovi rezultati upućuju na to da je aplikativnost stečenih znanja veća u eksperimentalnoj grupi, a razlog je tomu eksperimentalni činitelj, tj. učenje rješavanjem problemskih zadataka.
6. Model sustava vježbi za poticanje problemsko-stvaralačkih sposobnosti učenika na rješavanje problemskih zadataka pozitivno je utjecao na eksperimentalnu grupu. Mjerenjem je utvrđeno da je kontrolna grupa stagnirala ili neznatno napredovala (početno mjerenje 41,7%, završno mjerenje 44,3%), dok je eksperimentalna grupa značajno napredovala (42,6% u početnom mjerenju u odnosu prema 58,5% u završnome mjerenju).
7. U verifikaciji hipoteze o eventualnome većem učinku učenja rješavanjem problemskih zadataka u pogledu trajnosti stečenih znanja – očekivanja su se ispunila. Retencija u eksperimentalnoj grupi bila je znatno veća nego u kontrolnoj grupi (oko 23 boda ili 64,2% mogućih bodova po učeniku u eksperimentalnoj grupi prema 14 bodova ili 40% u kontrolnoj grupi). Vrijednost  $t$ -omjera iznosi 8,02 ( $P < 0,05; 1,97$ ) i govori o statističkoj značajnosti nađenih razlika u aritmetičkim sredinama eksperimentalne i kontrolne grupe.

Na osnovi sumarnoga prikaza osnovnih rezultata istraživanja vidljivo je da je glavna hipoteza potvrđena. Zadaci istraživanja u cijelosti su izvršeni i dani su potrebni odgovori na postavljena pitanja.

Učenje rješavanjem problemskih zadataka omogućava dobar put i način da se učenici sustavno i na istraživačko-otkrivajući način osposobljavaju za samostalan rad, što je od velike teorijske i praktične važnosti za izgrađivanje učenikove ličnosti, koja se osposobljava za učenje učenja, samoobrazovanje i stalno obrazovanje.

Ovaj je eksperiment omogućio utvrđivanje važne didaktičke zakonitosti da između rješavanja problemskih zadataka, kao najvišega i visoko produktivnog oblika učenja, i obrazovnoga učinka u uvjetima školske nastave, postoji uzročno-posljedična veza. Naime, učenje rješavanjem problemskih zadataka, pod određenim uvjetima, postiže visoke obrazovne

učinke. Potvrda je to teorijskih stavova o razmatranome pitanju, ali i važan pokazatelj o prednostima koje ovaj oblik učenja posjeduje i koje treba intenzivnije iskoristiti, ne samo u nastavi matematike, već i u drugim nastavnim predmetima i na drugim uzrastima.

*Važnost je ovoga istraživanja u tome što je to prvo istraživanje takva oblika i opsega koje je provedeno u nastavi matematike. Upravo zato su dobiveni rezultati značajniji i od posebne didaktičko-metodičke vrijednosti.*

### 13. Smjerovi daljnjih istraživanja

Rezultati ovoga istraživanja otkrivaju niz problema koji su vezani uz odgojno-obrazovni rad u cjelini. Pokazalo je da postoji širok prostor za daljnja istraživanja.

*Teorijske implikacije*, koje proizlaze iz rezultata ovoga istraživanja, njime su samo naznačene, ali, kako su izvan područja postavljenih ciljeva i hipoteza i kako nisu obuhvaćene drugim, sličnim istraživanjima, mogu biti predmetom novih didaktičko-metodičkih studija i rasprava. Na taj bi se način naznačeni opći trend utjecaja učenja rješavanjem problemskih zadataka dopunio novim činjenicama i informacijama. Tako bi bilo vrlo korisno istražiti:

- kakve su mogućnosti vježbanja sasvim specifičnih sposobnosti kao što su, na primjer, učinci u području problemsko-stvaralačkoga mišljenja i zaključivanja;
- kakve su mogućnosti pozitivnoga mijenjanja stavova učenika, kao subjekta u odgojno-obrazovnome procesu, prema nastavnim sadržajima, zadacima i predmetu učenja;
- kakve su mogućnosti utjecaja učenja rješavanjem problemskih zadataka u drugim nastavnim predmetima i na drugoj učeničkoj dobi;
- u kojoj mjeri i kako dob učenika utječe na afirmativnost za prihvaćanje novina koje im se nude; i
- kako i koliko može učenje rješavanjem problemskih zadataka pridonijeti formiranju pozitivnih stavova prema umjetničkim djelima.

Nadalje, bilo bi korisno istražiti u kojoj mjeri i kako učenje rješavanjem problemskih zadataka utječe na: (1) učenikovu motiviranost za rad na nastavnim sadržajima i (2) razvoj emotivnog i intelektualnoga života učenika.

Bilo bi, također, korisno istražiti ulogu učitelja u odgojno-obrazovnome procesu s pozicija primjene učenja putem rješavanja problemskih zadataka.

*Praktične implikacije*, koje pruža ovo istraživanje, otvaraju, također, niz problema za daljnja istraživanja. Učenje rješavanjem problemskih zadataka ne postavlja niti zahtijeva posebne materijalne uvjete. Ovaj oblik učenja, međutim, postavlja veće zahtjeve pred učitelja, kako u pogledu njegove pripremljenosti za ovako intenzivan oblik rada, tako i njegove osposobljenosti za primjenu suvremenih metoda i oblika učenja. Ti su zahtjevi u eksperimentu djelomično riješeni posebnom pripremom učitelja prije početka, ali i tijekom eksperimenta. Cjelovito rješenje toga zahtjeva moguće je postići odgovarajućim istraživanjima i potrebnim reformskim zahvatima u sustavu obrazovanja učitelja.

Praktične implikacije ovoga istraživanja mogu se odnositi i na pitanje didaktičko-metodičkoga oblikovanja udžbenika, ali i izrade pratećih metodičkih priručnika koji bi polazili od teorijskih stavova i specifičnosti pojedinih nastavnih predmeta i dobi učenika, s pozicija primjene rješavanja problemskih zadataka u nastavi.

\* \* \*

Namjera nam je bila iznijeti neka didaktičko-metodička pitanja koja su se nametnula u ovome istraživanju. Razumljivo je da mnoga druga pitanja koja nisu istaknuta, a koja su vjerojatno prisutna, zahtijevaju detaljne teorijske analize i, ako je moguće, empirijske provjere.

Detaljnije bi analize vjerojatno riješile neka pitanja, ali – sigurno – otvorile i nova. Na taj se način potvrđuje sva složenost didaktičko-metodičkih fenomena.

#### **Literatura:**

- Duraković, Mehmed (1985), *Razvijanje stvaralačkih sposobnosti u problemsko-kreativnoj nastavi*, Pula, Istarska naklada.
- Kadum, Vladimir (2005), *Učenje rješavanjem problemskih zadataka u nastavi (matematike)*, Pula, IGSA.
- Mužić, Vladimir (1968), *Metodologija pedagoškog istraživanja*, Sarajevo, Zavod za izdavanje udžbenika.
- Suchodolski, Bogdan (1974), *Tri pedagogije* (prijevod s poljskog), Beograd, Duga.
- Špoljar, Kornelija (1989), *Utjecaj novijih teorija učenja na prevladavanje tradicionalnog modela nastave*. U: *Život i škola*, Osijek, broj 2.

## THE INFLUENCE OF LEARNING ON EDUCATIONAL PERFORMANCE IN THE ELEMENTARY TEACHING OF MATHEMATICS THROUGH PROBLEM SOLVING TASKS

Vladimir Kadum

*The paper expounds the results the author arrived at by researching the influence of learning on educational performance in the elementary teaching of mathematics through problem-solving tasks.*

*The experiment was conducted on a sample of 155 participants. The sample belongs to the category of intentional samples, is of medium size, and the experiment is of the intensive type, wherein the number of participants is not as important as the results of the research itself.*

*The acquired results show that learning through problem-solving tasks: (1) is more effective than the traditional, usual way ( $t = 8,25$ ;  $P < 0,05$ ); (2) significantly contributes to one's understanding of key mathematical contents (in relation to the original grading, group E raised its level by 8.01 points per student, while group K lowered its level by 0.28 points per student); (3) contributes to creating a more active relationship to problem-solving on the part of the students (group E had significantly less unsolved problems – i.e. 11.9% – than group K – i.e. 23.8%); (4) contributes to higher success, and more facts and information are adopted ( $t = 8,51$ ;  $P < 0,05$ ); (5) contributes to a higher applicability of the acquired knowledge (26.7 percentaged points more than in the traditional way of learning); (6) significantly extends the duration of the acquire knowledge ( $t = 8,02$ ;  $P < 0,05$ ); (7) the model of the system of tasks for the stimulation of the problem-solving creative abilities of students influences their solving the problems in class significantly ( $t = 5,58$ ;  $P < 0,05$ ).*

**Key words:** *mathematics, teaching, educational performance, problem solving, learning, problem-solving tasks*