Osječki matematički list 20 (2020), 99–111

Kombinatorne igre

Helena Dravec*

Sažetak

Igra je intelektualna ili fizička aktivnost jedne ili više osoba koja služi za razonodu i zabavu. Igrači u igri pokušavaju postići neki cilj poštujući pri tome pravila koja su unaprijed zadana. Igranje kombinatornih igara blisko je rješavanju matematičkih problema jer zahtijeva iste strategije kao i matematika. U ovom radu opisane su kombinatorne igre i njihova rješenja ukoliko su pronađena, te načini na koje kombinatorne igre možemo koristiti u nastavi matematike.

Ključne riječi: *kombinatorne igre, teorija igara, igra Nim, igra Chomp, igra Sprouts, igra Sim*

Combinatorial games

Abstract

Game is an intellectual or physical activity for one or more persons that is used for leisure and entertainment. Players in the game try to achieve the goal, respecting at the same time the preset rules. Playing combinatorial games is close to solving mathematical problems because it requires the same strategies as mathematics. In this paper, combinatorial games and their solutions are described, as well as the ways in which combinatorial games can be used in the classroom.

Keywords: *combinatorial games, game theory, the game of Nim, the game of Chomp, the game of Sprouts, the game of Sim*

*Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email: helena.dravec@gmail.com

1 Uvod

Zamislite da vi i vaš prijatelj igrate sljedeću igru: uzmete 16 šibica te ih posložite u redove tako da se u prvom redu nalazi jedna šibica, u drugom tri, u trećem pet, a u četvrtom sedam šibica. Svatko od vas naizmjence uzima šibice. Vi igrate prvi i birate jedan red iz kojeg ćete uzeti šibice. Pravilo je da uzmete proizvoljan broj šibica iz tog reda, a najmanje jednu. Vaš prijatelj čini istu stvar na svom potezu. Onaj koji uzme posljednju šibicu je pobjednik.

Primijetimo da je ova igra drugačija od društvenih igara na koje smo naviknuli: ovdje nema bacanja kockice niti slučajnog odabira i ništa nije skriveno. Riječ je o kombinatornoj igri po imenu Nim, a istaknut ćemo i još neke poznate igre te vrste: Šah, Križić-kružić, Poveži 4 i Go. Kako u ovim igrama nema slučajnosti, postoje strategije za "savršenu igru". U igri Križić - kružić, ako oba igrača igraju optimalno, niti jedan neće pobijediti pa tu igru smatramo *riješenom* igrom. Isto vrijedi i za Poveži 4, iako je ona riješena uz pomoć računala. Šah i Go su vrlo komplekse igre pa za njih nije razrađena najbolja strategija. Međutim, postoji nešto što igru Nim čini drugačijom od gore nabrojanih igara, a to je da svaki igrač ima dozvoljen potpuno isti skup poteza. Takve igre zovemo *imparcijalnim (nepristranim)* igrama.

2 O teoriji igara

Kombinatorne igre dio su novije grane matematike koja se zove *teorija igara*. Teorija igara nastala je sredinom 20. stoljeća, a njezinim začetkom smatra se knjiga *Theory of games and economic behavior* koju su napisali matematičar John von Neumann i ekonomist Oskar Morgenstern. Značajan doprinos u njezinu razvoju dao je i John Nash, zbog čega mu je dodijeljena i Nobelova nagrada za ekonomiju. Glavna vodilja za razvoj teorije igara bila je primjena u ekonomiju. Međutim, ona ima primjene u raznim prirodnim znanostima, čak i u biologiji.

Teorija igara proučava konfliktne situacije između dva ili više sudionika kako bi odredila najpovoljnije racionalno ponašanje za svakog od njih. Riječ *igra* predstavlja konflikt između sukobljenih strana koji želimo analizirati. Konflikt je određen strogo definiranim pravilima poput onih u društvenim igrama, no to ne mora nužno biti društvena igra, a sudionici ne moraju nužno biti osobe iako ih nazivamo *igračima*. Najopćenitija podjela u teoriji igara je na dvije grane, a to su *kooperativne* i *nekooperativne* igre. Kooperativne igre imaju sljedeća svojstva:

- pravila igre su neprecizno opisana;
- nemoguće je izravno analizirati osobne probleme pojedinih igrača pri odlučivanju pa je naglasak na proučavanju koalicija igrača;
- zbog pretpostavke o mogućnosti formiranja i održavanja koalicija, moguće je stvaranje kompromisa.

Nekooperativne igre opisane su sljedećim svojstvima:

- pravila igre su precizno definirana i potpuna;
- osnovne jedinice odluke su individualni igrači;
- nije moguće stvaranje kompromisa (osim ako pravila to dopuštaju).

Kombinatorne igre pripadaju nekooperativnim igrama bez elemenata slučajnosti, a u kojima sudjeluju dva igrača. To znači da oba igrača uvijek imaju potpun uvid u stanje igre, jedino nisu poznati budući potezi igrača. Mi ćemo proučavati kombinatorne igre koje završavaju u konačnom broju poteza i to onda kada igrač koji je na potezu više nema mogućnost igranja dozvoljenih poteza. Jedan od igrača je uvijek pobjednik, a drugi je gubitnik pa igra ne može završiti neriješenim ishodom. Takve igre zovemo *imparcijalnim* igrama. Kao što samo ime kaže, kombinatorne igre sadrže elemente kombinatorike, a teorija koja se bavi proučavanjem takvih igara naziva se *kombinatorna teorija igara*.

U svrhu boljeg razumijevanja kombinatornih igara, slijedi primjer analize jednostavne kombinatorne igre koju nazivamo *igra oduzimanja*.

Primjer 1. Na stolu se nalazi hrpa s dvadeset jednim žetonom. Dva igrača naizmjence izvlače žetone s hrpe. Mogu uzeti minimalno jedan i maksimalno tri žetona. Igrač koji uzme posljednji žeton je pobjednik. Pitamo se hoće li pobijediti igrač koji je prvi na potezu ili će pobjedu odnijeti drugi igrač? Postoji li određena strategija igre (detaljan plan) koja će uvijek donijeti pobjedu?

Kako bismo odgovorili na ova pitanja, analizirat ćemo igru od kraja prema početku. Zamislimo da je na stolu ostalo jedan, dva ili tri žetona. Igrač koji je na potezu pobjeđuje ako ih uzme sve. Ako su ostala četiri žetona, igrač koji je na potezu morat će ostaviti jedan, dva ili tri žetona, što znači da će njegov protivnik biti pobjednik. Drugim riječima, četiri žetona znače poraz za igrača koji je na potezu, a pobjedu za njegovog suparnika koji je ostavio četiri žetona.

Ako se na stolu nalazi pet, šest ili sedam žetona, igrač koji je na potezu može pobijediti jedino ako smanji broj žetona na četiri. Ako je na stolu ostalo osam žetona, igrač koji je na potezu morat će ostaviti pet, šest ili sedam žetona pa će njegov protivnik pobijediti.

Uočavamo da postoje pozicije (stanja) u igri kojima prvi igrač treba težiti ako želi pobijediti, a to su nula, četiri, osam, dvanaest,... Kako se na početku igre na stolu nalazi dvadeset jedan žeton, što nije djeljivo s četiri, siguran potez za pobjedu prvog igrača je da na prvom potezu makne samo jedan žeton, te se dalje u igri nastavi pridržavati tzv. pobjedničke strategije ostavljajući svom protivniku pozicije djeljive s četiri.

3 Kombinatorne igre

Ranije smo spomenuli da kombinatorne igre uključuju dva igrača. Zbog jednostavnosti, igrače ćemo zvati lijevi (L) i desni (D) igrač. Kako za svaku poziciju u igri pravila igre jednoznačno određuju dva skupa opcija, za svakog igrača po jedan, igru možemo definirati kao uređen par skupova opcija. Ako igru označimo s G, definicija glasi:

$$G = \left\{\left\{G^{L_1}, G^{L_2}, ...\right\} | \left\{G^{D_1}, G^{D_2}, ...\right\}\right\} = \left\{G^L | G^D\right\},$$

gdje je $G^L = \left\{G^{L_1}, G^{L_2}, ...\right\}$ skup opcija lijevog igrača, a $G^D = \left\{G^{D_1}, G^{D_2}, ...\right\}$ skup opcija desnog igrača. Ova definicija je induktivna, a njezinu bazu predstavlja igra u kojoj niti jedan igrač nema što odigrati. Takvu igru označavamo s 0 (nula) i ona je oblika:

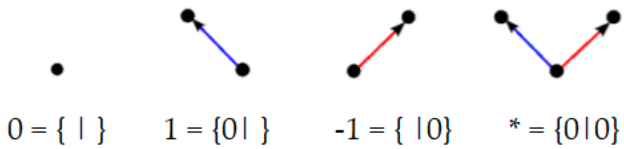
$$\left\{\varnothing | \varnothing\right\} = \left\{\ |\ \right\}.$$

Nadalje, svakoj igri možemo dodijeliti stupanj koji opisuje njenu jednostavnost. Nakon svakog odigranog poteza igra postaje jednostavnija na način da dolazimo u poziciju igre manjeg stupnja. Igra koja ima stupanj 0 je najjednostavnija igra u kojoj imamo prazan skup opcija i za lijevog i za desnog igrača, te ju označavamo s $\left\{\ |\ \right\}$. U sljedećem koraku svaki igrač na raspolaganju ima po dvije opcije $\varnothing$ i $0 = \left\{\ |\ \right\}$, što je ukupno četiri opcije za igru stupnja 1, a to su: $0 = \left\{\ |\ \right\}$, $1 = \left\{0 |\ \right\}$, $-1 = \left\{\ | 0\right\}$ i $* = \left\{0 | 0\right\}$. Ove igre možemo prikazati pomoću stabala kao što je prikazano na slici 1.

One predstavljaju prototipove igara s obzirom na koje ćemo klasificirati složenije igre. Njihova ključna svojstva su sljedeća:

- Igra 0 - igra u kojoj gubi onaj igrač koji je prvi na potezu jer nema što odigrati, a *drugi igrač pobjeđuje*. Takve igre imaju vrijednost nula.
- Igra 1 - igra u kojoj uvijek *pobjeđuje lijevi igrač*, bez obzira na to koji je igrač prvi na potezu. Sve takve igre imaju pozitivnu vrijednost.

- Igra -1 - igra u kojoj uvijek *desni igrač pobjeđuje*, a sve igre takvog tipa imaju negativnu vrijednost.
- Igre * - igra u kojoj pobjeđuje igrač koji je *prvi* na potezu. Takva igra predstavlja najjednostavniju igru koja nije označena brojem tj. njena vrijednost nije nula, niti je pozitivna, niti negativna. Igre takvog tipa zovu se *neizrazite* igre.



Slika 1. Opcije igrača L su označene plavom bojom, a opcije igrača D crvenom bojom

Više rezultata o stupnjevima igara čitatelj može pogledati u [1].

Kod imparcijalnih igara nije važno koji je igrač lijevi, a koji desni, već koji od njih započinje igru pa u nastavku koristimo izraze prvi igrač (Igrač 1) i drugi igrač (Igrač 2).

3.1 P - pozicije i N - pozicije

Prije nego prijeđemo na analizu igara potrebno je uvesti neke pojmove. Promatramo igru iz perspektive igrača. Bitno nam je kakvu poziciju ostavljamo svom protivniku jer ga želimo pobijediti. Isto želi i naš protivnik: sebi osigurati pobjedu, a nama poraz. Pozicije koje nam osiguravaju pobjedu nakon odigranog poteza zovemo *sigurnim pozicijama*, a one koje osiguravaju pobjedu našem protivniku zovemo *nesigurnim pozicijama*. Stanje igre može biti:

- P - pozicija - sigurna (pobjednička) pozicija, osigurava pobjedu prethodnom igraču, engl. **P**revious player
- N - pozicija - nesigurna (gubitnička) pozicija, osigurava pobjedu idućem igraču engl. **N**ext player

Ako se vratimo na igru oduzimanja iz Primjera 1, možemo vidjeti da se P - pozicije sastoje od svih pozicija koje su djeljive s četiri, a ostale pozicije su N - pozicije.

Kako bismo analizirali i riješili imparcijalnu igru, moramo odrediti P - i N - pozicije, a to ćemo učiniti tako da zadovoljimo sljedeća svojstva:

- Svaka moguća pozicija je ili P - pozicija ili N - pozicija (ne može biti oboje).
- Iz svake N - pozicije moguće je pomaknuti se u P - poziciju.
- Iz P - pozicije nije moguće doći u drugu P - poziciju.
- Završna pozicija je P - pozicija.

Nakon što pravilno odredimo P - i N - pozicije, možemo načiniti strategiju: Na našem potezu pomičemo se na P - poziciju, a naš suparnik nema drugog izbora osim N - pozicije. Nakon toga se opet pomičemo na P - poziciju i nastavljamo tako dok ne dođemo do završne pozicije koja je također P - pozicija. Međutim, naša strategija bit će pobjednička jedino ako se počnemo kretati s N - pozicije. U suprotnom naš protivnik može koristiti opisanu strategiju pa nećemo moći učiniti ništa kako bismo se vratili u P - poziciju.

4 Igra Nim

Igru Nim opisali smo na početku, a sada ćemo je detaljnije analizirati i riješiti. Ova igra jedna je od najstarijih i najprivlačnijih matematičkih igara. Ne zna se njezino točno porijeklo, ali smatra se da potječe iz Kine. Zanimljiva je zbog svoje prividne složenosti, a u isto vrijeme i jednostavnosti matematike koja se krije iza nje. U početku smo spomenuli šibice, ali možemo koristiti i druge predmete (žetoni, karte, kamenčići,...) koji su posloženi u tri, četiri ili pet redaka. Najpopularnije kombinacije redaka su (3, 4, 5) - u prvom retku tri predmeta, u drugom četiri, te u trećem pet predmeta, zatim (5, 7, 9), (1, 3, 5, 7) itd. Mi ćemo promatrati kombinaciju (1, 3, 5, 7) kao i na početku. Dakle, šibice su posložene na sljedeći način:

```
   |
  |||
 |||||
|||||||
```

Ovakva igra je igra tipa *, a to je, kako smo ranije naveli, igra u kojoj pobjedničku strategiju ima drugi igrač ako igra optimalno. Drugim riječima, prvi igrač će izgubiti ako drugi igrač ne napravi pogrešku. Zamislimo da su u igri ostala dva retka s po dvije šibice.

```
||
||
```

Ako prvi igrač uzme dvije šibice iz jednog od ta dva retka, drugi će moći uzeti obje šibice, a time i posljednju. Ako prvi igrač uzme jednu šibicu iz bilo kojeg retka, drugi će igrač uzeti jednu od šibica iz retka s dvije šibice i tako će posljednja šibica opet pripasti drugom igraču. Kažemo da je stanje igre s dva retka po dvije šibice P - pozicija jer donosi pobjedu prethodnom igraču, bez obzira kako će njegov protivnik odigrati. Još neke od P - pozicija su sljedeće:

```
              |            |
 |||          ||          |||
 |||          |||        |||||
                        |||||||
```

Ako želimo pobijediti u igri Nim, trebamo znati prepoznati P - pozicije. Broj šibica u svakom retku izrazimo u binarnom sustavu i redom ih zapišemo jedan ispod drugoga kao da zbrajamo brojeve na papiru, te zatim izbrojimo jedinice u svakom stupcu. Ako se u svakom stupcu nalazi paran broj jedinica imamo P - poziciju, u suprotnom imamo N - poziciju. Pokažimo to na prethodnim primjerima P - pozicija:

```
              1          1
 11          10         11
 11          11        101
                       111
```

Slijedi teorem koji se lako dokaže indukcijom.

Teorem 4.1. *S dane pozicije u igri Nim pobjeđuje drugi igrač ako i samo ako je pozicija P - pozicija.*

Dokaz. Uočimo da svaki potez s P - pozicije rezultira N - pozicijom, a sa svake N - pozicije moguće je odigrati potez na P - poziciju. Odatle slijedi tvrdnja teorema. □

Opisana varijanta igre Nim naziva se *standardnom* jer pobjeđuje igrač koji zadnji odigra potez. Postoji i varijanta *misère* u kojoj gubi onaj igrač koji uzme posljednju šibicu, a pobjednička strategija za ovu varijantu je sljedeća: Igramo kao što bismo igrali standardnu varijantu sve dok postoje barem dva retka s više od jedne šibice. Nakon što naš protivnik odigra tako da ostane samo jedan redak koji sadrži više od jedne šibice, smanjimo taj redak na jednu ili nijednu šibicu, ovisno o tome koja od dvije mogućnosti protivniku ostavlja neparan broj redaka s jednom šibicom. Tada će naš protivnik morati uzeti posljednju šibicu. Primijetimo da uvijek možemo zadati P - poziciju standardne igre Nim u kojoj se u dva ili više redaka nalazi više od jedne šibice pa će naš protivnik morati smanjiti broj takvih redaka na jedan.

5 Igra Chomp

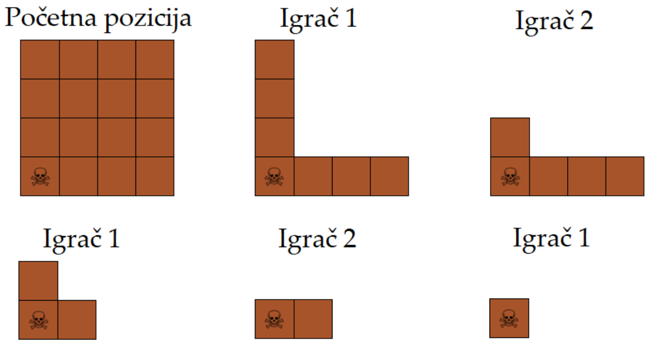
Igra Chomp se originalno igra na pravokutnoj ploči čokolade podijeljenoj na kvadratiće, dimenzije $m \times n$. Može se igrati i pomoću $m \times n$ tablice ili možemo neke predmete poredati u m redaka i n stupaca. Vratimo se originalnoj varijanti. Igrači naizmjence odabiru po jedan kvadratić čokolade te pojedu njega i sve kvadratiće koji se nalaze iznad njega i desno od njega. Kvadratić u donjem lijevom kutu je otrovan, a igrač koji ga pojede gubi igru. Možemo primijetiti da je Chomp *misère* igra, odnosno posljednji potez je gubitnički. Za ovu igru vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 5.1. *U igri Chomp prvi igrač ima pobjedničku strategiju.*

Dokaz. Prvi igrač može pojesti kvadratić čokolade u gornjem desnom kutu ploče. Ako tako dolazi u P - poziciju, onda do kraja igre može zadavati P - pozicije i pobijediti drugog igrača. S druge strane, ako je ploča bez gornjeg desnog kuta N - pozicija, drugi igrač je u jednom potezu može dovesti do P - pozicije. No, onda je prvi igrač mogao odmah odigrati isti taj potez, jer bilo koji potez odigran na početku igre sigurno eliminira gornji desni kut ploče. □

Nažalost, iz teorema nije poznato koja je pobjednička strategija prvog igrača, te do danas nisu otkrivene pobjedničke strategije za općeniti $m \times n$ slučaj igre Chomp, ali poznate su za neke specijalne slučajeve.

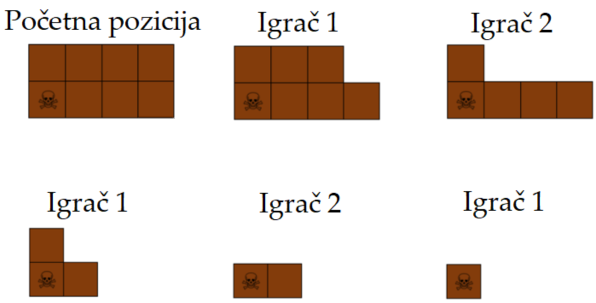
Jedan takav slučaj je $m = n$, tj. ploča čokolade je kvadratnog oblika. Prvi igrač pojede kvadratić koji se nalazi jedno mjesto desno i iznad otrovanog kvadratića, čime ostavlja oblik slova L koji ima "krakove" jednake duljine. Time prvi igrač ostavlja P - poziciju, te na bilo koji potez drugog igrača može odgovoriti simetrično, ostavljajući pri tome krakove jednakih duljina, sve dok ne prisili drugog igrača da pojede otrovani kvadratić. Primjer ovakve igre prikazan je na slici 2. Prikazana su stanja igre koja igrač



Slika 2. $n = m$ ploča

1 i igrač 2 ostavljaju iza sebe. Primjećujemo da igrač 1 svaki puta ostavlja P - poziciju igraču 2 koji više nema mogućnost ostavljanja P - pozicije, te mu naposljetku ne preostaje ništa drugo doli otrovanog kvadratića.

Drugi slučaj za koji znamo pobjedničku strategiju je ploča dimenzije $2 \times n$. Prvi igrač pojede kvadratić u gornjem desnom kutu ploče. Zatim na



Slika 3. 2 x 4 ploča

svaki potez drugog igrača odgovara tako da gornji redak bude za jedan kvadratić kraći od donjeg retka. Što god drugi igrač napravio, prvi igrač će uvijek moći doći u gore opisanu poziciju, te će na kraju navesti drugog igrača da pojede otrovani kvadratić. Primjer ovakvog slučaja igre prikazan je na slici 3, gdje vidimo da prvi igrač uvijek ostavlja P - pozicije.

Otkrivanje P - pozicija za Chomp na čokoladnoj ploči dimenzije $3 \times n$

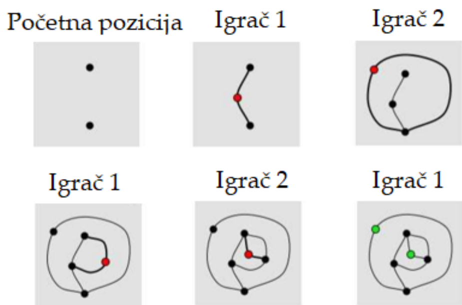
znatno je kompliciranije. Možemo ih opisati beskonačno mnogo, ali će i dalje ostati još beskonačno mnogo koje nismo opisali. Detaljnija analiza slučaja $3 \times n$ napravljena je u [2].

6 Igra Sprouts

U igri Sprouts dva igrača na papiru imaju označeno n nasumičnih točaka. Svaki igrač na svom potezu treba crtom spojiti dvije točke, te na crti označiti novu točku. Pravila su sljedeća:

- Crte smiju biti ravne ili zakrivljene, te se ne smiju sjeći (same sebe ili s drugim crtama).
- Iz jedne točke smiju izlaziti najviše tri crte.
- Crta smije točku spajati samu sa sobom (smije se napraviti petlja).

Igrač koji nacrta posljednju crtu je pobjednik. Primjer igre s dvije točke prikazan je na slici 4. S obzirom da igra ima puno slučajeva, još uvijek nije otkrivena pobjednička strategija. Evo što znamo o njoj:



Slika 4. Sprouts

Pretpostavimo da igra počinje s n točaka i traje točno m poteza. Svaka točka ima tri života, te svaki potez smanjuje ukupan broj života u igri za jedan (dva života su izgubljena povlačenjem crte, ali nova točka dodaje još jedan život), te svaka preživjela točka na kraju ima najviše jedan život. Prema tome, na kraju igre preostaje ukupno $3n - m$ života. Mora postojati barem jedna preživjela točka (barem ona koja je dodana u posljednjem potezu) iz čega slijedi da je $3n - m \geq 1$, odnosno $m \leq 3n - 1$ tj. igra ima najviše $3n - 1$ poteza.

Na kraju svake igre svaka preživjela točka ima točno dva umrla "susjeda". Postoje dvije vrste susjeda. Preživjela točka može biti povezana s po jednom crtom s dvije umrle točke, tada su joj te dvije točke jedini susjedi. U drugom slučaju može biti povezana dvama crtama s jednom umrlom točkom koja joj je prvi susjed, a drugi susjed joj je prva iduća točka povezana s prvim susjedom. Ta točka je sigurno umrla jer u protivnom igra ne bi

Slika 5. Preživjele točke označene su zelenom bojom, a susjedi su crne točke

bila završena. Slika 5 prikazuje susjede. Niti jedna umrla točka ne može biti susjed dvama različitim preživjelim točkama. Sve umrle točke koje nisu susjedi nazivaju se *farizeji*. Označimo njihov ukupan broj slovom p. Vrijedi:

$$n + m = 3n - m + 2(3n - m) + p$$

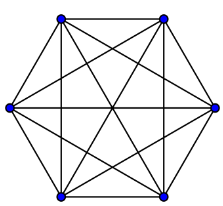
jer početni broj točaka + broj poteza = ukupan broj točaka na kraju igre = preživjeli + susjedi + farizeji. Odavde dobivamo:

$$m = 2n + \frac{p}{4}.$$

Zaključujemo da igra traje najmanje $2n$ poteza, a broj farizeja djeljiv je s četiri.

Reći ćemo da igra završava pobjedom ako prvi igrač pobijedi, a porazom ako drugi igrač pobijedi. Koristeći računala, ustanovilo se da varijante igre Sprouts čiji broj točaka podijeljen sa šest daje ostatak tri, četiri ili pet završavaju pobjedom, a ostale porazom.

7 Igra Sim



Posljednja kombinatorna igra koju ćemo spomenuti je igra Sim za koju je potrebno na papiru nacrtati šest točaka. Dva igrača naizmjenično spajaju točke, svaki svojom bojom, a u igri gubi onaj igrač koji napravi jednobojni trokut kojemu su vrhovi zadane točke.

Za analizu ove igre koristit ćemo se Ramseyevom teorijom. Ramseyeva teorija bavi se pronalaskom najmanjeg broja vrhova $R(p, q)$ potpunog grafa K_n, tj. jednostavnog grafa kojemu je svaki par vrhova spojen bridom, tako da, prilikom bojenja bridova s dvije različite boje B_1 i B_2, postoji potpun podgraf s p vrhova čiji su svi bridovi obojeni bojom B_1 ili postoji potpun podgraf s q vrhova čiji su svi bridovi obojeni bojom B_2. Broj vrhova $R(p,q)$ nazivamo *Ramseyev broj*.

Kako je $R(3,3) = 6$, bilo koje 2 - bojenje potpunog grafa K_6 mora sadržavati potpun graf K_3 koji je cijeli obojen ili prvom ili drugom bojom. Odavde slijedi da će sigurno jedan od igrača pobijediti u igri.

Računalnom analizom igre dolazi se do zaključka da drugi igrač može imati savršenu strategiju, ali je ona preteška za pamćenje.

Lako možemo doći i do maksimalnog broja poteza u ovoj igri. Kako imamo šest vrhova iz svakog vrha možemo povući najviše pet bridova prema ostalim vrhovima, a kako bismo izbjegli dvostruko brojenje bridova, dobiveni rezultat podijelimo s dva i dobivamo $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$.

8 Primjena u nastavi

Spomenute kombinatorne igre mogu se iskoristiti u obliku radionice na dodatnoj ili izbornoj nastavi matematike u srednjoj školi. Također, radionica se može održati u sklopu nekih posebnih prigoda kao što su dani otvorenih vrata škole, Festival znanosti i sl. Radionica se provodi tako da nastavnik učenike prvo upozna s kombinatornom teorijom igara, a zatim ih podijeli u četiri grupe, tako da u svakoj grupi bude paran broj učenika jer u svakoj kombinatornoj igri sudjeluju dva igrača. Svaka grupa dobiva pravila za jednu od igara Nim, Chomp, Sprouts ili Sim, zadatak, te potrebne materijale za igru:

- Nim - svaki par u grupi dobiva šesnaest predmeta (šibice, žetoni ili neki predmeti po vlastitom izboru), a zadatak grupe je pokušati otkriti pobjedničku strategiju.

- Chomp - s obzirom na to da je s pravom čokoladom nezgodno raditi, svaki par učenika u grupi dobije male čokoladice, bombone ili neke druge predmete koje je potrebno slagati u oblik kvadrata (slučaj $m = n$) ili u ploču dimenzije $2 \times n$. Zadatak za učenike je odrediti pobjedničke strategije za ove dvije varijante igre.

- Sprouts - svaki par učenika u grupi dobiva papir te im nastavnik može ponuditi da igru isprobaju za različite n. Zadatak grupe je pokušati odrediti maksimalan broj poteza.

- Sim - svaki par u grupi dobiva papir na kojemu se nalazi šest točaka, a zadatak grupe je odrediti maksimalan broj poteza.

U prvom dijelu radionice svaka grupa radi samostalno, nastavnik pojašnjava eventualne nejasnoće, a učenike kojima ide teže može navoditi prema rješenjima. Nakon nekog vremena provjerava do kakvih su zaključaka učenici došli, te im daje rješenja za sve zadatke. Nakon toga grupe se mijenjaju za igre kako bi svi učenici mogli isprobati svaku igru.

Ova radionica zahtjeva puno razmišljanja i isprobavanja raznih strategija, stoga je najbolje iskoristiti dva školska sata kako bi se odradila. Kroz nju učenici mogu pokazati svoju maštovitost, kreativnost i sposobnost logičkog razmišljanja, a ujedno se i zabaviti.

Literatura

[1] M. Botinčan, *Kombinatorne igre*, Hrvatski matematički elektronski časopis math.e, **6** (2005).
`http://e.math.hr/igre/igreprint.pdf`

[2] V. Krčadinec, J. Vuger, *Dvije igre i njihova generalizacija*, Hrvatski matematički elektronski časopis math.e, **10** (2007).
`http://e.math.hr/dvijeigre/index.html`

[3] V. Krčadinac, *Teorija igara - matematičko modeliranje konfliktnih situacija*, Hrvatski matematički elektronski časopis math.e, **3** (2004).
`http://e.math.hr/old/teorijaigara/index.html`

[4] A. Chan, *Combinatorial Game Theory*,The University of Chicago, Department of Mathematics, 2011.
`http://math.uchicago.edu/~ac/cgt.pdf`

[5] M. Černivec, S. Rukavina, *Radionica "Kombinatorne igre"*, Matematika i škola, **61** (2014), 14-16.