Osječki matematički list 20 (2020), 113–124

Manje elegantna rješenja nekih zadataka

Alija Muminagić*, Zdenka Kolar-Begović †

Sažetak

U radu su ponuđena rješenja zadataka i dokazi tvrdnji različitog karaktera. Iako je neke od postavljenih zadataka možda moguće riješiti, a neke tvrdnje dokazati, na elegantniji način, dana rješenja, odnosno dokazi, nam mogu poslužiti kao motivacija za proučavanje korištenih pojmova, a mogu nam poslužiti i kao ideje za rješavanje sličnih zadataka i dokazivanje drugih tvrdnji.

Ključne riječi: *trokut, Pitagorin teorem, sinusov poučak, polinom*

Less elegant solutions to some problems

Abstract

The paper offers solutions to problems and proofs of claims of different nature. Although it might be possible to solve some of the tasks and prove some claims in a more elegant way, the given solutions and proofs can be used as a motivation for studying the concepts used, and also as ideas for solving similar tasks and proving other claims.

Keywords: *triangle, Pythagorean theorem, sine theorem, polynomial*

*Enighedsvej 58.1.th., 4800 Nykøbing F., Danmark, email: fatima.muminagic@gmail.com
†Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email: zkolar@mathos.hr

U radu ćemo dati neka rješenja zadataka i dokaze nekih tvrdnji na možda po nekima neuobičajen i složen način. Dakle, ponuđena rješenja i izneseni dokazi nisu jednostavni i kratki. Međutim, upoznavanje učenika s ovakvim načinima rješavanja može imati veliku dobrobit jer učenici uče koristiti stečena znanja za rješavanje zadataka, a na rješavanje nekih zadataka počinju gledati iz drugog kuta. Takvi postupci u nastavi doprinose razvoju matematičkih sposobnosti i kreativnosti učenika što je jedan od glavnih zadataka nastave matematike.

Na početku rada navest ćemo dokaz jedne tvrdnje geometrijskog karaktera.

Zadatak 1. Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako vrijedi jednakost

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2,$$

gdje su α, β i γ unutarnji kutovi tog trokuta.

Rješenje. Navedenu tvrdnju možemo dokazati na više načina npr. [1], a mi želimo u ovom radu dati sljedeći dokaz dane tvrdnje.

Dokažimo najprije implikaciju:
Ako vrijedi $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$ onda je trokut ABC pravokutan.

Iz formule za površinu trokuta ABC, čije su duljine stranica a, b i c, a unutarnji kutovi α, β i γ :

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$

dobivamo $\sin\alpha = \dfrac{2P}{bc}$, $\sin\beta = \dfrac{2P}{ac}$ i $\sin\gamma = \dfrac{2P}{ab}$, pa je

$$2 = 4P^2\left(\frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{a^2c^2} + \frac{1}{a^2b^2}\right)$$

što se može zapisati

$$2a^2b^2c^2 = 4P^2(a^2+b^2+c^2),$$

odakle slijedi

$$8a^2b^2c^2 = 16P^2(a^2+b^2+c^2). \tag{1}$$

Podsjetimo se sada, da Heronovu formulu za površinu trokuta ABC

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\ \text{gdje je}\, s = \frac{a+b+c}{2}$$

možemo zapisati u obliku

$$P = \frac{1}{4}\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 - 2\left(a^4+b^4+c^4\right)},$$

tj.

$$16P^2 = \left(a^2+b^2+c^2\right)^2 - 2\left(a^4+b^4+c^4\right). \tag{2}$$

Uvrštavajući (2) u (1) dobivamo

$$8a^2b^2c^2 = \left(\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 - 2\left(a^4+b^4+c^4\right)\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

odakle slijedi jednakost

$$8a^2b^2c^2 - \left(\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 - 2\left(a^4+b^4+c^4\right)\right)\left(a^2+b^2+c^2\right) = 0. \tag{3}$$

I što smo dobili? Dobili smo jednakost (3) iz koje bismo trebali zaključiti da je trokut ABC pravokutan.

Pokušajmo sa sljedećom analizom. U jednakosti (3) pojavljuju se samo duljine stranica a, b i c trokuta ABC. Ideja je dakle, jednakost (3) napisati (transformirati) u obliku iz kojeg možemo zaključiti da je trokut pravokutan.

Prema obratu Pitagorinog teorema, proizlazi da jednakost (3) moramo dovesti na oblik

$$\left(a^2-b^2-c^2\right)\left(a^2-b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right) = 0. \tag{4}$$

Međutim, realizirati ovu ideju je mučan posao ("tour de force"). Odmah moramo reći da je izraz na lijevoj strani jednakosti (3) veoma neprikladan za rastav na faktore.
Teško da će to uspjeti nakon prvog pokušaja, međutim nakon ne malo truda, doći ćemo do odgovarajućeg grupiranja i konačnog rješenja.

Uvođenjem u (3) supstitucije

$$a^2 = x,\ b^2 = y,\ c^2 = z \tag{5}$$

imamo

$$\begin{aligned}
0 &= 8xyz - \big[(x+y+z)^2 - 2\big(x^2+y^2+z^2\big)\big](x+y+z)\\
&= 8xyz - \big(x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz-2x^2-2y^2-2z^2\big)(x+y+z)\\
&= 8xyz - \big[(xy+xz+yz) - \big(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\big)\big](x+y+z)\\
&= 8xyz - (xy+xz+yz)(x+y+z) + \big(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\big)(x+y+z)\\
&= 8xyz - (xy+xz+yz)(x+y+z) + x^3+y^3+z^3-3xyz\\
&= 5xyz - x^2y - xy^2 - xyz - x^2z - xyz - xz^2 - xyz - y^2z - yz^2 + x^3+y^3+z^3\\
&= x^3 - x^2y - x^2z + 2xyz - xy^2 - xz^2 + y^3 + z^3 - y^2z - yz^2\\
&= x^3 - x^2(y+z) - x\big(-2yz + y^2 + z^2\big) + y^3 + z^3 - yz(y+z)\\
&= x^3 - x^2(y+z) - x(y-z)^2 + (y+z)\big(y^2 - yz + z^2\big) - yz(y+z)\\
&= x^3 - x^2(y+z) - x(y-z)^2 + (y+z)\big(y^2 - yz + z^2 - yz\big)\\
&= x^3 - x^2(y+z) - x(y-z)^2 + (y+z)(y-z)^2\\
&= x^2(x-y-z) - (y-z)^2(x-y-z)\\
&= (x-y-z)\big(x^2-(y-z)^2\big)\\
&= (x-y-z)(x-y+z)(x+y-z).
\end{aligned}$$

Koristeći ponovno supstituciju (5) dobivamo (4). Iz (4) slijedi

$$a^2-b^2-c^2=0 \text{ ili } a^2-b^2+c^2=0 \text{ ili } a^2+b^2-c^2=0,$$

tj.

$$a^2=b^2-c^2 \text{ ili } b^2=a^2+c^2=0 \text{ ili } =c^2=a^2+b^2$$

odakle, prema obratu Pitagorinog teorema, slijedi tvrdnja.

Implikaciju, ako je trokut ABC pravokutan onda vrijedi jednakost $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$, ostavljamo čitateljima da je sami (lako) dokažu. ◀

Nakon ovog "neelegantnog" rješenja, dajemo primjer jednog elegantnog dokaza sljedeće tvrdnje, koju smo koristili u dokazu tvrdnje iz prethodnog zadatka.

Zadatak 2. Dokazati da za realne brojeve x, y i z vrijedi jednakost

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = \big(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\big)(x+y+z).$$

Rješenje. Promotrimo determinantu

$$D = \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

S druge strane (znamo da vrijedi)

$$D = D_1 = \begin{vmatrix} x+y+z & y & z \\ x+y+z & x & y \\ x+y+z & z & x \end{vmatrix} = (x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & y & z \\ 1 & x & y \\ 1 & z & x \end{vmatrix}$$
$$= (x+y+z)\big(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz\big).$$

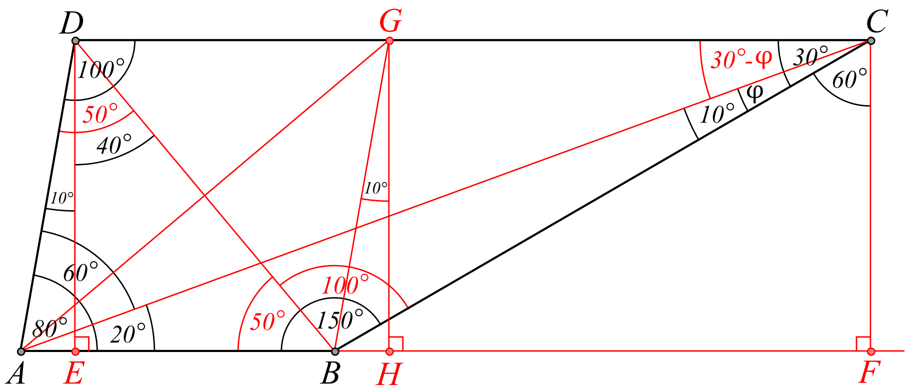
◀

Zadatak 3. Dokazati da vrijedi jednakost

$$\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg} 70^\circ.$$

Rješenje. Neka je četverokut $ABCD$ trapez i neka je $\angle ABC = 150^\circ$ i $\angle CDA = 100^\circ$. Očito onda vrijedi $\angle DAB = 80^\circ$ i $\angle BCD = 30^\circ$.

Neka je $|AB| = |AD|$. To znači da je trokut BDA jednakokračan, pa je $\angle ABD = \angle ADB = 50^\circ$. Uočimo da je $\angle DBC = \angle ABC - \angle ABD = 150^\circ - 50^\circ = 100^\circ$.



Slika 1. Trapez $ABCD$

Uvedimo oznaku $\angle BCA = \varphi$. Tada je $\angle ACD = 30^\circ - \varphi$. Primjenom sinusovog teorema na trokute ACD i ABC dobivamo

$$\frac{|AD|}{\sin(30^\circ - \varphi)} = \frac{|AC|}{\sin 100^\circ},$$

odakle slijedi

$$|AC| = \frac{|AD| \sin 100^\circ}{\sin(30^\circ - \varphi)} \tag{6}$$

i

$$\frac{|AB|}{\sin \varphi} = \frac{|AC|}{\sin 150^\circ},$$

a odavde, zbog $|AB| = |AD|$, slijedi

$$|AC| = \frac{|AD| \sin 150^\circ}{\sin \varphi}. \tag{7}$$

Iz (6) i (7) slijedi

$$\frac{\sin 100^\circ}{\sin(30^\circ - \varphi)} = \frac{\sin 150^\circ}{\sin \varphi},$$

tj.

$$\sin 100^\circ \sin \varphi = \sin 150^\circ \sin(30^\circ - \varphi),$$

što, zbog $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, možemo zapisati kao

$$2 \sin 100^\circ \sin \varphi = \sin(30^\circ - \varphi),$$

a zbog $\sin 100^\circ = \cos 10^\circ$ imamo

$$2 \cos 10^\circ \sin \varphi = \sin(30^\circ - \varphi),$$

odakle, zbog $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$, dobivamo

$$2 \cdot \frac{1}{2} \left(\sin(\varphi - 10^\circ) + \sin(\varphi + 10^\circ)\right) = \sin(30^\circ - \varphi),$$

tj.

$$\sin(\varphi - 10^\circ) = \sin(30^\circ - \varphi) - \sin(\varphi + 10^\circ).$$

Zbog $\sin x - \sin y = 2 \sin \dfrac{x-y}{2} \cos \dfrac{x+y}{2}$ dobivamo

$$\sin(\varphi - 10^\circ) = 2 \sin(10^\circ - \varphi) \cos 20^\circ,$$

odakle slijedi $\sin(\varphi - 10^\circ) = 0$, tj. $\varphi = 10^\circ$.

Sada imamo, slika 1,

$$\begin{aligned}
\angle BAC &= 180^\circ - 150^\circ - 10^\circ = 20^\circ,\\
\angle ACD &= 30^\circ - 10^\circ = 20^\circ,\\
\angle DAC &= 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ.
\end{aligned}$$

Povucimo visinu $\overline{DE}$ u trokutu ABD i neka je $|DE| = 1$. Očito je $\angle ADE = 10^\circ$ (uočite pravokutni trokut ADE), pa je

$$\operatorname{tg} 10^\circ = \frac{|AE|}{|DE|} = \frac{|AE|}{1} = |AE|. \tag{8}$$

U trokutu DEB je $\angle BDE = 50^\circ - 10^\circ = 40^\circ$ i

$$\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{|EB|}{|DE|} = \frac{|EB|}{1} = |EB|. \tag{9}$$

Neka je F ortogonalna projekcija točke C na AB. Tada je $\angle FCB = 60^\circ$ i

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{|BF|}{|CF|} = \frac{|BF|}{|DE|} = |BF|. \tag{10}$$

Točkom B povucimo paralelu s AD i neka je G presječna točka te paralele i stranice $\overline{CD}$ trapeza $ABCD$. Neka je H ortogonalna projekcija točke G na $\overline{AB}$. Vrijedi $\angle BGH = \angle ADE = 10^\circ$ (kutovi s paralelnim kracima) i u trokutu BGH je

$$\operatorname{tg} 10^\circ = \frac{|BH|}{|GH|} = \frac{|BH|}{|DE|} = |BH|. \tag{11}$$

U pravokutnom trokutu AFC je $\angle ACF = 10^\circ + 60^\circ = 70^\circ$ i

$$\operatorname{tg} 70^\circ = \frac{|AF|}{|CF|} = \frac{|AF|}{|DE|} = |AF|. \tag{12}$$

U pravokutnom trokutu AGH je $\angle AGH = 40^\circ + 10^\circ = 50^\circ$ i

$$\operatorname{tg} 50^\circ = \operatorname{tg} \angle AGH = \frac{|AH|}{|GH|} = \frac{|AH|}{|DE|} = |AH|. \tag{13}$$

Kako vrijedi $|AE| + |EB| + |BF| = |AF|$ što je zbog (8), (9) i (10) ekvivalentno s $\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg} 70^\circ$. ◀

Napomena 1. *Uočite da je* $|AE| + |EB| + |BF| = |AH| - |BH| + |BF|$ *što je, zbog* $tg\, 10^\circ + tg\, 40^\circ + tg\, 60^\circ = tg\, 70^\circ$ *i (13), (11) i (10), ekvivalentno s* $tg\, 10^\circ + tg\, 40^\circ + tg\, 60^\circ = tg\, 50^\circ - tg\, 10^\circ + tg\, 60^\circ$, *a što je ekvivalentno s*
$2\, tg\, 10^\circ + tg\, 40^\circ = tg\, 50^\circ$ *i* $tg\, 50^\circ - tg\, 10^\circ + tg\, 60^\circ = tg\, 70^\circ$.

Zadatak 4. *Neka je* P *polinom stupnja* n, *takav da je*

$$P(k) = \frac{k}{k+1} \quad \textit{za } k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Naći $P(n+1)$.

Rješenje. Lagrangeov interpolacijski polinom n-tog stupnja, čiji graf prolazi kroz $(n+1)$ različitih točaka, dan je s

$$\begin{aligned}
P(x) = {} & \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)} \cdot f(0) \\
& + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)} \cdot f(1) + \cdots \\
& + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \cdot f(k) \\
& + \cdots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})} \cdot f(n).
\end{aligned}$$

U našem slučaju imamo $x_k = k$ i $f(k) = \frac{k}{k+1}$ za $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, pa je

$$\begin{aligned}
P(n+1) = {} & \frac{(n+1-1)(n+1-2)(n+1-3)\cdots(n+1-n)}{(0-1)(0-2)(0-3)\cdots(0-n)} \cdot \frac{0}{0+1} \\
& + \frac{(n+1-0)(n+1-2)(n+1-3)\cdots(n+1-n)}{(1-0)(1-2)(1-3)\cdots(1-n)} \cdot \frac{1}{1+1} + \cdots \\
& + \frac{(n+1-0)(n+1-1)(n+1-2)\cdots(n+1-(n-1))}{(n-0)(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-1))} \cdot \frac{n}{n+1} \\
= {} & \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdots(-n)} \cdot \frac{0}{1} + \frac{(n+1)(n-1)(n-2)\cdots 1}{1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdots(1-n)} \cdot \frac{1}{2} \\
& + \cdots + \frac{(n+1)n(n-1)\cdots 2}{n(n-1)(n-2)\cdots 1} \cdot \frac{n}{n+1} \\
= {} & \frac{n!}{(-1)^n \cdot n!} \cdot \frac{0}{1} + \frac{(n+1)(n-1)!}{(-1)^{n-1}(n-1)!} \cdot \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n}{n+1} \\
= {} & \frac{\frac{(n+1)!}{n+1}}{(-1)^n \cdot 0! \cdot n!} \cdot \frac{0}{1} + \frac{\frac{(n+1)!}{n}}{(-1)^{n-1} 1! \cdot (n-1)!} \cdot \frac{1}{2} + \cdots + \frac{\frac{(n+1)!}{1}}{(-1)^0 \cdot n!} \cdot \frac{n}{n+1} \\
= {} & (n+1)!\Big(\frac{0}{1} \cdot \frac{(-1)^n}{0! \cdot (n+1)!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{1! \cdot n!} + \cdots + \frac{n}{n+1} \cdot \frac{(-1)^0}{n! \cdot 1!}\Big) \\
= {} & (n+1)! \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k+1} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{k! \cdot (n+1-k)!} \\
= {} & \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{k+1-1}{k+1} \cdot \frac{(n+1)!}{k! \cdot (n+1-k)!}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \Big(1 - \frac{1}{k+1}\Big) \binom{n+1}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n+1}{k} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{1}{k+1} \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}
$$

Uz oznake

$$
S_1 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n+1}{k} \text{ i } S_2 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{1}{k+1} \binom{n+1}{k}
$$

vrijedi $P(n+1) = S_1 - S_2$.
Izračunajmo najprije S_1.

$$
S_1 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n+1}{k}.
$$

Kako je

$$
\begin{aligned}
0 = (1-1)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot 1^k \cdot (-1)^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot 1^k \cdot (-1)^{n+1-k} + 1,
\end{aligned}
$$

to dobivamo

$$
\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot 1^k \cdot (-1)^{n+1-k} = -1,
$$

tj.

$$
\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot (-1)^{n-k} = 1,
$$

odakle dobivamo $S_1 = 1$.

Izračunajmo sada S_2. Kako je

$$
(x-1)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot x^k \cdot (-1)^{n+1-k}
$$

to vrijedi

$$\int_0^1 (t-1)^{n+1}\,dt = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} \int_0^1 t^k\,dt,$$

tj.

$$\frac{(t-1)^{n+2}}{n+2}\Big|_0^1 = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} \cdot \frac{t^{k+1}}{k+1}\Big|_0^1$$

i dalje

$$-\frac{(-1)^{n+2}}{n+2} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} \cdot \frac{1}{k+1},$$

pa imamo

$$-\frac{(-1)^{n+2}}{n+2} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{n+2} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} \cdot \frac{1}{k+1},$$

odakle dobivamo

$$\frac{(-1)^{n+2}}{n+2} = -\frac{1}{n+2} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} (-1)^{n-k} \cdot \frac{1}{k+1}.$$

Prema tome,

$$S_2 = \frac{1}{n+2} + \frac{(-1)^{n+2}}{n+2},$$

tj.

$$S_2 = \begin{cases} 0, & \text{za } n = 2k+1 \\ \dfrac{2}{n+2}, & \text{za } n = 2k \end{cases}$$

i konačno

$$P(n+1) = S_1 - S_2 = \begin{cases} 1 - 0 = 1, & \text{za } n = 2k+1 \\ 1 - \dfrac{2}{n+2} = \dfrac{n}{n+2}, & \text{za } n = 2k. \end{cases}$$

◀

Prokomentirajmo ovo rješenje. Prvo što možemo uočiti, zapis rješenja nije kratak. Međutim, ideja rješavanja korištenjem Lagrangeovog interpolacijskog polinoma u potrazi za nalaženjem rješenja prihvatljiva je (posebno u nenalaženju neke bolje ideje). Ali, kao što smo vidjeli, realizacija te ideje nije baš laka. U rješavanju, korištenjem Lagrangeovog interpolacijskog polinoma, prisutno je dosta računanja, za koje je potrebno znanje o sumama, integralima i faktorijelima. Ali, od koristi je znati riješiti zadatak i na ovaj način, jer nam može koristiti za dobivanje ideje za rješavanje nekog sličnog zadatka.

Napomena 2. Zadatak je dan na USAMO (The USA Mathematical Olympiad, 1975. godine), gdje je ponuđeno sljedeće rješenje.

Rješenje. Prema uvjetu zadatka vrijedi $(k+1)P(k)-k=0$ za $k=0,1,2,\dots n$. Ideja je sada da promotrimo polinom

$$Q(x)=(x+1)P(x)-x. \tag{14}$$

Polinom (14) je stupnja $n+1$ i znamo svih $n+1$ nula. Tada je

$$Q(x)=ax(x-1)(x-2)\cdots(x-n),$$

pa zbog $Q(-1)=1$ je

$$1=a(-1)(-2)(-3)\dots(-(n+1))=(-1)^{n+1}(n+1)!\cdot a$$

i odavde

$$a=\frac{1}{(-1)^{n+1}(n+1)!}.$$

Sada je $(x+1)P(x)=Q(x)+x$, pa je

$$(x+1)P(x)=\frac{x}{(n+1)!}\Big((-1)^{n+1}(x-1)(x-2)\cdots(x-n)+(n+1)!\Big)$$

i stavljajući $x=n+1$ dobivamo

$$(n+2)P(n+1)=n+1+(-1)^{n+1},\ \text{tj.}$$

$$P(n+1)=\begin{cases}1, & \text{za } n=2k+1\\ \dfrac{n}{n+2}, & \text{za } n=2k.\end{cases}$$

◀

Literatura

[1] Š. Arslanagić, A. Muminagić, *Još jedna teorema u vezi sa pravouglim trouglom*, Tangenta, **66**(2) (2011–2012), 1–7.

[2] A. Muminagić, Z. Starc, *Geometrijski pristup u rješavanju zadataka*, Osječki matematički list, **13**(2) (2013), 155–162.