O KONSTRUKCIJI PRAVILNIH MNOGOKUTA

Šefket Arslanagić, Sarajevo

U osnovnoj se školi uči o konstrukcijama pravilnih mnogokuta (npr. pravilnih mnogokuta s 3, 4, 6, 8 i 12 stranica). Ovdje ćemo se pozabaviti pitanjem konstrukcije pravilnog *n*-terokuta upisanog u kružnicu zadanog polumjera, pitanjem usko povezanim s podjelom kružnice na *n* jednakih dijelova.

Ako se u zadanu kružnicu upiše jednakostranični trokut (odnosno pravilni šesterokut), tj. ako se kružnica danog polumjera podijeli na 3 (6) jednakih dijelova, može se konstrukcijom simetrale luka kružnica potom podijeliti na 6, 12, 24... $3 \cdot 2^k$ jednakih dijelova ($k \in \mathrm{N}$). Znači, ako je poznat (zadan) polumjer kružnice, može se šestarom i ravnalom konstruirati ovakav pravilni mnogokut za koji možemo reći da je iz *klase jednakostraničnog trokuta*.

Dalje, ako se u zadanu kružnicu upiše kvadrat, može se kružnica poslije konstrukcije simetralom podijeliti na 8, 16, 32... $4 \cdot 2^k$ jednakih dijelova ($k \in \mathrm{N}$). Za ove ćemo pravilne mnogokute reći da su iz *klase kvadrata*.

Problem formiranja ovakvih klasa pravilnih mnogokuta, koji se mogu konstruirati samo ravnalom i šestarom, riješen je tek krajem XVIII. stoljeća. Genijalni njemački matematičar K. F. Gauss (1777. – 1855.) utvrdio je algebarskim putem da klasu mogu određivati samo brojevi oblika $p_1, p_2 ... p_m$ ($m \in \mathrm{N}$), gdje su svi faktori prosti i međusobno različiti, a oblika su $2^k + 1$ ($k \in \mathrm{N}$).

Dakle, pravilni *n*-terokut može se konstruirati samo ako je $n = 2^t \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \cdot ... \cdot p_m$ ($t \in \mathrm{N}_0$), gdje su p_i različiti prosti faktori oblika $2^k + 1$.

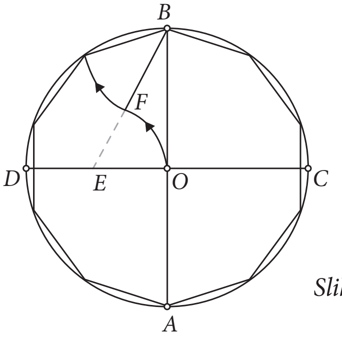
Prost broj 5 je oblika $2^k + 1$ (jer za $k = 2$ vrijedi $2^2 + 1 = 5$), pa prema tome postoji *klasa pravilnih peterokuta*, tj. pomoću ravnala i šestara mogu se konstruirati pravilni mnogokuti s 5, 10, 20... $5 \cdot 2^k$ stranica.

Primjer 1. Konstruirajmo pravilni deseterokut upisan u zadanu kružnicu.

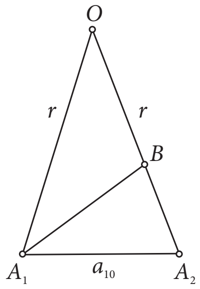
Rješenje: Konstruiramo redom (Slika 1.):

1. dva međusobno okomita promjera $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ zadane kružnice $k(O, r)$;
2. točku E kao polovište dužine $\overline{OD}$, tj. tako da je $|OE| = \frac{r}{2}$;
3. dužinu $\overline{BE}$;
4. kružni luk sa središtem u točki E s polumjerom duljine $\frac{r}{2}$;
5. točku F kao presjek nacrtanog kružnog luka i dužine $\overline{BE}$.

Dužina $\overline{BF}$ jednaka je stranici traženog deseterokuta. Ostatak konstrukcije je očigledan.



Slika 1.



Slika 2.

Zadatak. Dokažite da je duljina dužine $\overline{BF}$ jednaka duljini stranice a_{10} pravilnog deseterokuta upisanog u kružnicu polumjera r.

Dokaz: Neka je trokut ΔA_1OA_2 (Slika 2.) jedan od deset sukladnih (karakterističnih) trokuta na koje pravilni deseterokut dijeli njegove simetrale nacrtane kroz nasuprotne vrhove, a $\overline{A_1B}$ neka je dio simetrale kuta $\angle OA_1A_2$. S obzirom da je veličina središnjeg kuta pravilnog deseterokuta $\angle A_1OA_2$ jednaka 36°, slijedi da u jednakokračnom trokutu ΔOA_1A_2 vrijedi $|\angle OA_1A_2| = |\angle OA_2A_1| = 72°$, pa je $|\angle OA_1B| = |\angle BA_1A_2| = 36°$ i $|\angle A_2BA_1| = 72°$. Zaključujemo da je $|A_1B| = |OB| = |A_1A_2| = a_{10}$.

Trokuti ΔA_1OA_2 i ΔA_2A_1B međusobno su slični. Na temelju toga dobivamo razmjer $|OA_1| : |A_1B_1| = |A_1B_1| : (|OA_2| - |OB|)$, tj. $r : a_{10} = a_{10} : (r - a_{10})$, odakle je $a_{10} + r \cdot a_{10} - r^2 = 0$. Posljednja jednakost ekvivalentna je s jednakošću $\left(a_{10} + \frac{r}{2}\right)^2 = \left(\frac{r\sqrt{5}}{2}\right)^2$, a odavde slijedi $a_{10} + \frac{r}{2} = \frac{r\sqrt{5}}{2}$, ili

$$a_{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} r. \qquad (*)$$

Sada preostaje dokazati da je $|BF| = a_{10}$. U trokutu ΔOBE (Slika 1.) je $|OB| = r$ i $|OE| = \frac{r}{2}$ (konstrukcija!), pa primjenom Pitagorinog poučka na trokut ΔOBE dobivamo da je $|BE| = \frac{r\sqrt{5}}{2}$. Budući da je po konstrukciji $|EF| = \frac{r}{2}$, zaključujemo da je $|BF| = \frac{r\sqrt{5}}{2} - \frac{r}{2}$, tj. $|BF| = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} r$. Dakle, zaista je $|BF| = a_{10}$.

Konstrukcijom stranice upisanog pravilnog deseterokuta, tj. diobom kružnice na 10 jednakih dijelova riješen je i primjer konstrukcije pravilnog peterokuta.

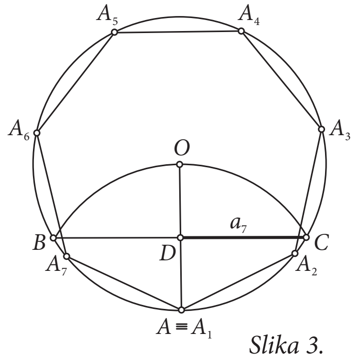
Primjer 2. Konstruirajmo pravilni peterokut upisan u zadanu kružnicu.

Rješenje: Spojimo li dužinama redom svaki drugi (po redu) vrh pravilnog deseterokuta, dobit ćemo pravilni peterokut. U praksi se konstrukcija pravilnog peterokuta radi na način prikazan na Slici 6.

Sljedeći prosti broj je 7 i on nije oblika $2^k + 1$, pa se pravilni sedmerokut ne može konstruirati šestarom i ravnalom (osim, naravno, približno).

Primjer 3. Napravimo približnu konstrukciju pravilnog sedmerokuta upisanog u kružnicu zadanog polumjera.

Rješenje: Prvo se konstruira kružni luk sa središtem u točki A s polumjerom duljine r koji siječe danu kružnicu $k(O, r)$ u točkama B i C, a zatim dužina $\overline{BC}$, tako da je točka D presjek dužina $\overline{BC}$ i $\overline{OA}$ (Slika 3.).



Slika 3.

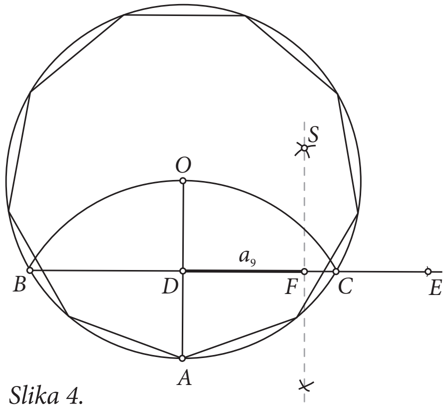
Duljina dužine $\overline{CD}$ približno je jednaka duljini stranice pravilnog sedmerokuta. Visina jednakostraničnog trokuta ΔOAC sa stranicom duljine r iznosi $|CD| = \frac{r\sqrt{3}}{2}$. U trokutu ΔA_1OA_7, na primjer, poznate su duljine stranica $|OA_1| = |OA_7| = r$ i $|A_1A_7| = \frac{r\sqrt{3}}{2}$. Ako su poznate duljine svih triju stranica nekog trokuta, mogu se izračunati i svi ostali elementi toga trokuta. No, za to je potrebno poznavati trigonometriju. Stoga cijeli dokaz ovdje ne možemo provesti (ali mogu ga provesti stariji Matkači, srednjoškolci), nego ćemo samo reći još sljedeće: $|\angle A_1OA_7| \approx 51° \ 19' \ 4''$. Veličina središnjeg kuta pravilnog sedmerokuta je $360° : 7 \approx 51° \ 25' \ 43''$, što znači da pogreška nastala opisanom konstrukcijom iznosi oko 0.2 %.

Ni pravilan deveterokut nije moguće točno konstruirati jer broj 9, iako oblika $2^k + 1$, nije prost.

Primjer 4. Konstruirajmo (približno točno) pravilan deveterokut upisan u kružnicu zadanog polumjera.

Rješenje: Konstrukciju izvodimo sljedećim redoslijedom (Slika 4.):

1. kružni luk sa središtem u točki A s polumjerom duljine r i točke B, C i D, kao u Primjeru 3;
2. točku E na pravcu DC tako da je $|CE| = \frac{r}{2}$;
3. simetralu s dužine $\overline{DE}$;
4. sjecište F simetrale s i dužine $\overline{DE}$ (tj. polovište dužine $\overline{DE}$).



Slika 4.

Duljina dužine $\overline{DF}$ približno je jednaka duljini stranice pravilnog deveterokuta upisanog u zadanu kružnicu.

Primjenom trigonometrije utvrđuje se da je apsolutna pogreška u određivanju veličine središnjeg kuta pravilnog deveterokuta na prikazani način manja od $3'\,46''$, tj. manja od 0.16 %.

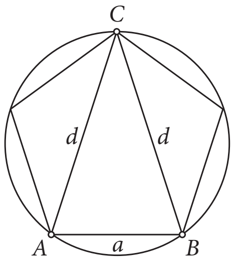
Na pitanje koja je sljedeća klasa pravilnih mnogokuta (poslije klase pravilnog peterokuta), odgovor je: klasa pravilnih petnaesterokuta.

Naime, broj 15 umnožak je dvaju prostih brojeva, pri čemu su oba broja oblika $2^k + 1$ ($2^1 + 1 = 3$, $2^2 + 1 = 5$).

Primjer 5. Konstruirajmo pravilni petnaesterokut upisan u kružnicu zadanog polumjera.

Rješenje: S obzirom da $\frac{1}{15}=\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$, zaključujemo da je veličina središnjeg kuta pravilnog petnaesterokuta jednaka razlici veličina središnjih kutova pravilnog šesterokuta i pravilnog deseterokuta. Konstrukcija je jednostavna i prepušta se čitaocu.

Do sada smo razmatrali konstrukciju pravilnih mnogokuta upisanih u kružnicu zadanog polumjera. Što ako je, umjesto duljine polumjera upisane kružnice, poznata duljina stranica pravilnog mnogokuta? Pitanje konstrukcije pravilnog n-terokuta s poznatom duljinom stranice rješivo je samo u onim slučajevima kada i podjela kružnice na n jednakih dijelova. Takva konstrukcija poznata nam je za $n = 3$, $n = 4$ i $n = 6$.



Slika 5.

Primjer 6. Konstruirajmo pravilni petokut sa stranicom duljine a.

Rješenje: Promotrimo jednakokračni trokut ΔABC čija je osnovica zadana stranica duljine a, a kraci su dijagonale pravilnog peterokuta nacrtane iz istog vrha (Slika 5.). Duljina krakova označena je s d. Tada je $\left|\angle ACB\right|=36^\circ$ i $\left|\angle BAC\right|=\left|\angle ABC_2\right|=72^\circ$. (Provjerite!).

Dakle, može se prvo konstruirati dijagonala d na temelju činjenice da je $d=\frac{a}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$.

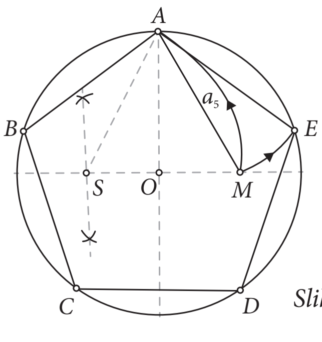
Primjenom Pitagorinog poučka računamo duljinu hipotenuze x pravokutnog trokuta, čije su katete duljina a i $\frac{a}{2}$. Dobivamo da je $x=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$ i $d=x+\frac{a}{2}$.

Nakon određivanja d konstruira se trokut ΔABC. Opisana kružnica oko toga trokuta je i opisana kružnica oko traženog pravilnog peterokuta, te je dalji tijek konstrukcije očigledan.

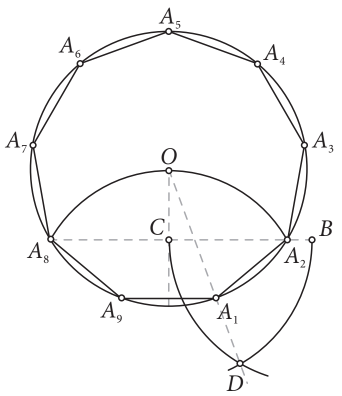
Zadatci za vježbu

1. Opišite konstrukciju pravilnog peterokuta sa Slika 6. i dokažite njenu ispravnost.
2. Koristeći relaciju (*) konstruirajte pravilni deseterokut sa stranicom duljine a.
3. Opišite približnu konstrukciju pravilnog deveterokuta sa Slika 7.
4. Konstruirajte pravilan peterokut pomoću njegove dijagonale.
5. Dokažite da se pravilan petnaesterokut može konstruirati i pomoću stranica jednakostraničnog trokuta i pomoću pravilnog petokuta pa napravite konstrukciju.
6. Može li se točno konstruirati pravilan n-terokut ako je:

   a) $n = 11$, b) $n = 12$, c) $n = 14$, d) $n = 17$? Zašto?



Slika 6.



Slika 7.

Literatura

1. Š. Arslanagić, *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.
2. V. Blagojević, *Teoreme i zadaci iz planimetrije*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Istočno Sarajevo, 2002.
3. V. Burcov, *Konstruktivni zadaci u ravni*, Redakcija specijalizovnih izdanja, Beograd, 1971.
4. M. Mettler, *Vom Charme der „verblassten" Geometrie*, Verlag Eurobit Temeswar (Romania), 2000
5. D. Palman, *Geometrijske konstrukcije*, Element, Zagreb, 1996.
6. B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.