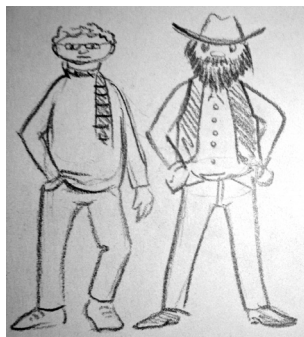
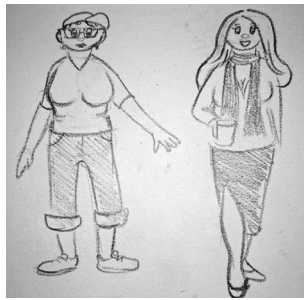
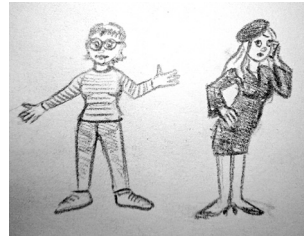


LAŽEŠ LI?

Franka Miriam Brückler, Zagreb

Pogledaj crteže¹ 16 različitih likova i odaberi jedan. Nemojte mi reći koji si odabrao ;-)



¹Svi crteži su © Franka Miriam Brueckler.

Postavit ću ti sedam pitanja o liku koji si odabrao. Na jedno – bilo koje – pitanje, ako tako želiš, možeš namjerno odgovoriti lažno, na ostalih šest moraš istinito odgovoriti. Naravno da mi ne trebaš reći jesi li lagao u ijednom odgovoru! Kladim se da, čak i ako jednom slažeš, mogu saznati koji lik si izabrao, a ako si lagao, pogodit ću čak i na koje pitanje!

Moja pitanja su:

1. Nosi li lik kapu ili šešir?
2. Nosi li lik šal?
3. Je li osoba muška?
4. Nosi li osoba naočale?
5. Je li osoba visoka?
6. Je li osoba mršava?
7. Je li osoba dugokosa?



Recimo da su tvoji odgovori redom

ne-da-ne-ne-da-da-da.

Kladim se da je tvoj lik visoka, malo popunjena dugokosa žena, nije li? I pritom si lagao kad si rekao rekli da se radi o mršavoj osobi :-)

Kako li sam samo to mogla znati? U pozadini ove matematičke igrice čitanja misli je nešto što se zove **Hammingov kod** za ispravljanje grešaka, važan i primjenjiv u digitalnoj obradi signala i prijenosu podataka. Detaljno objašnjenje je izvan mogućnosti ovako kratkog člancića, ali evo osnovnih ideja.

Prvo, ono što sam ti dopustila da lažeš u jednom odgovoru, u prijenosu podataka znači da je dopušteno da jedan bit informacije bude krivo prenesen. Naime, budući da svaki odgovor može biti samo „da” ili „ne”, nizovi odgovora zapravo su **binarni nizovi**. Vjerojatno si čuo za binarni zapis brojeva (zapis brojeva samo pomoću znamenki 0 i 1) koji je temelj funkcioniranja svih modernih kompjutorskih stvarčica – svaki bit može biti 0 ili 1. Tako gore navedeni niz odgovora ne-da-ne-ne-da-da-da možemo zapisati i kao (sedmero-znamenkastu) binarnu brojku (niz od 7 bitova) 0100111. Možemo to i vizualizirati bijelim i crnim kvadratićima (bijeli kvadratić = da = 1, crni kvadratić = ne = 0). Naš odgovor ne-da-ne-ne-da-da onda možemo vizualizirati ovako:

■□■□□□□.

Nadalje, postavila sam sedam pitanja, ali zapravo me zanimao odgovor na njih samo 4. Svako pitanje ima dva moguća odgovora, da ili ne. Ako me zanimaju samo odgovori na 4 pitanja, imamo dakle $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ mogućih kombinacija odgovora na njih – točno koliko je nacrtanih likova. Dodatna 3 pitanja služe tome da u slučaju laži istu mogu prepoznati i automatski ispraviti. Budući da imamo 7 pitanja, imamo $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$ mogućih kombinacija



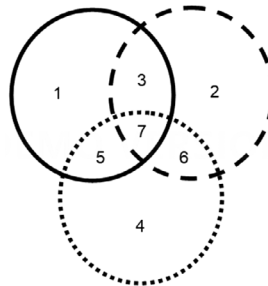
odgovora na moja pitanja, iz kojih moram nekako otkriti koji je od 16 likova tvoj. Budući da ovdje imamo 7-bitnu poruku od koje je stvarna informacija sadržana u 4 bita, govorimo o (7,4)-Hammingovom kodu.

Pitanja čiji su me odgovori stvarno zanimali bila su pitanja pod rednim brojevima 3., 5., 6. i 7.² (je li lik muško – kao što možeš vidjeti, pola likova su muški, pola su ženski; je li lik visok – kao što možeš vidjeti, pola je likova visoko, a pola nisko; je li lik mršav – kao što možeš vidjeti, pola je likova mršavo, a pola debljuškasto; ima li lik dugu kosu – kao što možeš vidjeti, pola likova ima dugu, a pola kratku kosu). Dakle, stvarna informacija u nizu ■□■□□□ nalazi se na 3., 5., 6. i 7. bitu, ali ja naravno načelno ne znam je li neki – bilo koji od njih 7 – bit krivo prenesen (jesi li lagao), a čak i da znam da jest, ne znam koji je to. Da bih to mogla otkriti, trebaju mi tzv. kontrolni bitovi, tj. bitovi na 1., 2. i 4. poziciji (to su ona tri dodatna pitanja).

Kontrolni bitovi su osmišljeni tako da kontroliraju istinitost po 3 bita stvarnog odgovora koji omogućuje identifikaciju odabranog lika, tj. stvarne 4-bitne poruke. Najjednostavniji način na koji se može objasniti kako iz, primjerice, ■□■□□□ saznajem koju si osobu odabrao i na koje si, ako ikoje, pitanje dao lažan odgovor je sljedeći.

Svaki od kontrolnih bitova prikažimo kao drugačije obrubljen krug – 1. kontrolni bit (odgovor na 1. pitanje, tj. ukupno 1. bit poruke) neka je recimo krug obrubljen punom kružnicom, 2. kontrolni bit (odgovor na 2. pitanje, tj. ukupno 2. bit poruke) neka je krug obrubljen crtkanom kružnicom, a 3. kontrolni bit (odgovor na 4. pitanje, tj. ukupno 4. bit poruke) neka je krug obrubljen točkastom kružnicom. Krugove crtamo tako da se i svaka dva dijelom preklapaju, kao i sva tri skupa u sredini.

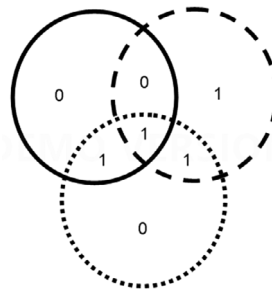
Dijelovi u kojima se preklapaju naši „kontrolni krugovi”, a njih kao što vidiš ima 4 – to naravno nije slučajno – predstavljaju 4 bita (odgovora) koji nas stvarno zanimaju. Na sljedećoj slici vidiš koji dio crteža s krugovima predstavlja koji po redu bit (prvi do sedmi) izvorne poruke (tvog slijeda odgovora).



²Naravno da je nebitno koja su po redu četiri pitanja bitna, ali tradicionalno se u 7-bitnom Hammingovom kodu uzima da se stvarna informacija nalazi na pozicijama 3., 5., 6. i 7.



Kad sam dobila tvoj niz odgovora (ne-da-ne-ne-da-da-da, tj. 0100111), u mislima sam ih unijela u gornji dijagram prema pozicijama koje sam zapamtila (uoči da nije preteško zapamtiti prethodni dijagram). Za navedeni primjer sam dakle u mislima dobila (ili stvarno na papir nacrtala) sljedeće:



Sad samo treba utvrditi u koliko od triju kružnica imam neparan broj jedinica. U prvom krugu, obrubljenom punom linijom, 2 su jedinice, dakle paran broj njih (podsjećam – 0 je paran broj!). U drugom, crtkano obrubljenom krugu, 3 su jedinice, dakle neparan broj njih, a tako i u trećem krugu obrubljenom točkastom kružnicom. Dakle, u 2 od 3 kruga imamo neparan broj jedinica. Ako ni u jednom krugu nemamo neparan broj jedinica, onda osoba nije lagala ni na jedno pitanje (nijedan bit nije krivo prenesen) te direktno iz odgovora na 4 bitna pitanja (iz 3., 5., 6. i 7. bita) saznajemo odabir.

Ako samo u jednom krugu imamo neparan broj jedinica, osoba je lagala na kontrolno pitanje koje odgovara tom krugu (odgovarajući kontrolni bit krivo je prenesen), ali su svejedno odgovori na bitna pitanja bili istiniti pa opet lako utvrdimo koji je lik odabran.

Ako u dva kruga imamo neparan broj jedinica (tako je u našem primjeru), osoba je lagala na jedno od četiri bitna pitanja (jedan od 4 bita stvarne poruke krivo je prenesen), i to na ono koje odgovara dijelu zajedničkom tim dvama krugovima, ali ne i trećem. U našem slučaju to su bili drugi i treći krug (obrubljeni crtkano i točkasto), a njima dvama zajednički dio je onaj koji odgovara 6. bitu (odgovoru na 6. pitanje, vidi prethodni dijagram), dakle lažan je odgovor na 6. pitanje (osoba nije mršava, nego je zapravo debeljuškasta) i sad je opet lako utvrditi koji je lik odabran.

Ako pak u sva tri kruga imamo neparan broj jedinica, zadnji je odgovor lažan (zadnji bit poruke krivo je prenesen) pa njega treba izmijeniti da bismo otkrili stvarni odabir (stvarnu poruku).

Zadatak za tebe (rješenje u sljedećem broju) – koji sam od likova s početka ovog članka odabrala ako sam na onih 7 pitanja odgovorila redom ne-da-da-da-da-da-da? Jesam li u ijednom odgovoru lagala? Ako jesam, u kojem?

U stvarnim primjenama ovakve se stvari, naravno, rade i s više bitova i pomoću računala. S obzirom da je literaturu na ovu temu (engl. *Hamming code*) lako naći na internetu, ali se uglavnom radi o prilično zahtjevnim tekstovima, umjesto na literaturu općenito o Hammingovim kodovima upućujemo na jedan člančić (na engleskom) o jednom magičnom triku koji se temelji na Hammingovom kodu:

<http://www.geofhagopian.net/papers/hammingCodeTrick.pdf>

