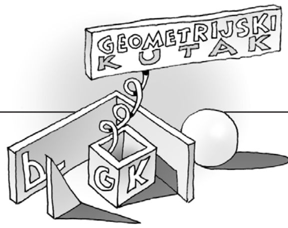
Matka 29 (2020./2021.) br. 113



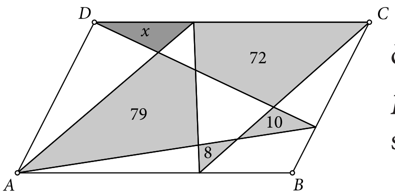
GEOMETRIJSKI KUTAK

Zlatko Lobor, Zagreb

TROKUT, ČETVEROKUT I KRUG

Dragi Matkači, od ovog broja vaša Matka ima novu rubriku – Geometrijski kutak. U njoj ćemo objavljivati zanimljive i izazovne geometrijske probleme o vama dobro poznatim likovima, trokutu, četverokutu i krugu. U svakom ćemo broju ponuditi nekoliko zadataka s rješenjima, ali i nekoliko zadataka za samostalno rješavanje. Vjerujemo da će među vama biti i onih koji će se prihvatiti samostalnog rješavanja, a tek onda pogledati napisano rješenje!

Za početak, riješimo tri geometrijska problema.

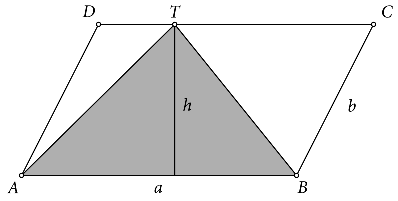


Primjer 1. U paralelogramu *ABCD* zadane su površine dvaju četverokuta i dvaju trokuta. Kolika je površina trokuta označena s x?

Rješenje: Prije rješavanja samog zadatka prisjetimo se važnog svojstva paralelograma.

Za po volji odabranu točku T na stranici $\overline{CD}$ površina trokuta *ABT* jednaka je polovini površine paralelograma *ABCD*, tj. $p_{ABT} = \frac{1}{2} p_{ABCD}$.

Neka su a i b duljine stranica paralelograma i neka je h duljina visine paralelograma nacrtane na stranicu duljine a.



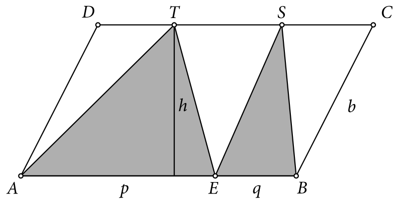
Tada vrijedi:

Površina paralelograma *ABCD*: $p_{ABCD} = ah$.

Površina trokuta *ABT*: $p_{ABT} = \frac{1}{2} ah$.

Iz toga slijedi da je $p_{ABT} = \frac{1}{2} p_{ABCD}$.

Ovo se svojstvo može poopćiti.



Unutar istoga paralelograma može se istaknuti dva ili više trokuta kako je prikazano na sljedećoj slici.

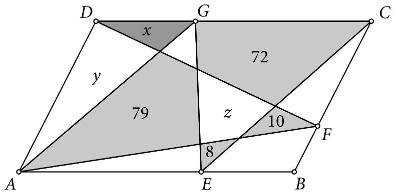
Pritom su točke T i S po volji odabrane na stranici $\overline{CD}$, a E po volji odabrana na $\overline{AB}$.

Neka su p i q duljine stranica trokuta *AET*, odnosno *EBS*, a h je duljina njihove visina na istaknute stranice.

Izračunajmo zbroj površina ova dva trokuta.

$$p_{AET} + p_{EBS} = \frac{1}{2}ph + \frac{1}{2}qh = \frac{1}{2}\underbrace{(p+q)}_{a}h = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}p_{ABCD}$$

Ovime smo pokazali da je zbroj površina trokuta AET i EBS jednak polovini površine paralelograma $ABCD$.



Sada možemo riješiti i zadani problem. U tu svrhu ćemo slovima E, F i G na zadanoj slici označiti istaknute točke koje pripadaju stranicama paralelograma $ABCD$. Također, s y i z označimo površine bijelog trokuta, odnosno četverokuta.

Ako dobro promotrimo sliku, primijetit ćemo da je prema opisanom svojstvu površina trokuta AFD jednaka polovini površine paralelograma $ABCD$. Možemo pisati:

$$\frac{1}{2}p_{ABCD} = p_{AFD} = y + 79 + z + 10.$$

Prema gore opisanom poopćenju vrijedi da je i zbroj površina trokuta AGD i ECG jednak polovini površine paralelograma $ABCD$. Dakle, vrijedi:

$$\frac{1}{2}p_{ABCD} = p_{AGD} + p_{ECG} = y + x + 8 + z + 72.$$

Izjednačavanjem ovih dvaju izraza dobivamo:

$$y + x + 8 + z + 72 = \frac{1}{2}p_{ABCD} = y + 79 + z + 10, \text{ tj.}$$

$$y + x + 8 + z + 72 = y + 79 + z + 10.$$

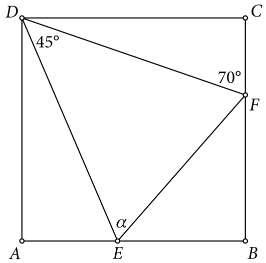
Poništavanjem y i z s obje strane jednadžbe dobivamo običnu linearnu jednadžbu iz koje možemo izračunati nepoznatu površinu x.

$$x + 8 + 72 = 79 + 10$$

$$x + 80 = 89$$

$$x = 9.$$

Primjer 2. Zadan je kvadrat $ABCD$. Kolika je mjera α kuta $\angle FED$?



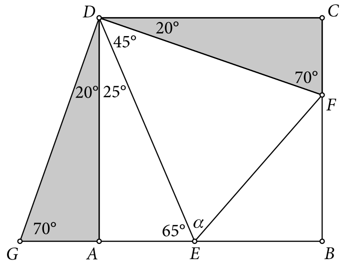
Rješenje: Iz zadanih podataka možemo izračunati:

$|\angle FDC| = 90° - |\angle CFD| = 90° - 70° = 20°$

$|\angle ADE| = 90° - |\angle EDF| - |\angle FDC| = 90° - 45° - 20° = 25°$

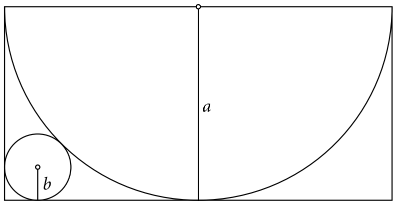
$|\angle DEA| = 90° - |\angle ADE| = 90° - 25° = 65°$

Zarotirajmo trokut DFC oko točke D tako da se stranica $\overline{CD}$ preslika u $\overline{AD}$.

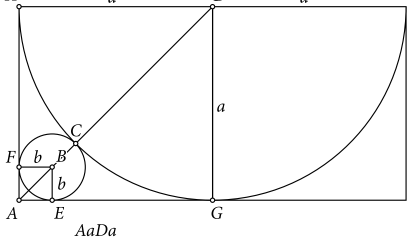


Trokuti DFC i DGA su sukladni pa je $|DF| = |DG|$. Također, i trokuti GED i FED su sukladni jer osim $|DF| = |DG|$ imaju zajedničku stranicu $\overline{ED}$ te su kutovi između odgovarajućih stranica jednaki 45°. Iz toga možemo zaključiti da su i kutovi $\angle DEG$ i $\angle FED$ sukladni pa je $\alpha = 65°$.

Primjer 3. Promotrimo sliku i izračunajmo koliki je omjer polumjera $\frac{a}{b}$?



Rješenje: Dopunimo sliku.



Uočimo kvadrate $AGDH$ sa stranicom duljine a i $AEBF$ sa stranicom duljine b. Njihove su dijagonale dužine $\overline{AD}$, odnosno $\overline{AB}$.

$$|AD| = |AB| + |BC| + |CD|$$

$$a\sqrt{2} = b\sqrt{2} + b + a$$

$$a\sqrt{2} - a = b\sqrt{2} + b$$

$$a\left(\sqrt{2}-1\right)=b\left(\sqrt{2}+1\right)$$

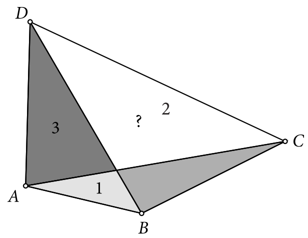
$$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

Racionalizacijom nazivnika dobivamo:

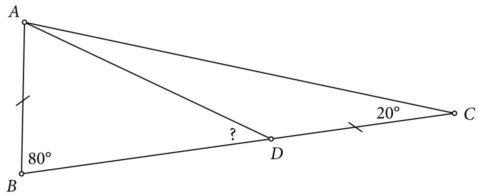
$$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot1+1^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2}=\frac{2+2\sqrt{2}+1}{2-1}=3+2\sqrt{2}\approx5.828\,.$$

Za kraj, ovdje navodimo još tri zadatka. Pokušajte ih riješiti samostalno. Njihova ćemo rješenja objaviti u sljedećem broju.

Zadatak 1. Zadan je konveksni četverokut *ABCD* podijeljen dijagonalama na četiri dijela. Ako su poznate površine triju njegovih dijelova kolika je površina cijeloga četverokuta?



Zadatak 2. Kolika je mjera kuta $\angle ADB$ ako je $|AB| = |CD|$?



Zadatak 3. Kolika je površina četverokuta ako svi krugovi imaju radijus *r*?