Matka 29 (2020./2021.) br. 113

Nikol Radović, Sisak

Kružnica i kružnica

nove zgode geometrijske družbe

– Svatko od vas – započeo je ponovni susret geometrijske družbe profesor Kosinus – neka preuzme i otvori datoteku **Susret.gsp**.

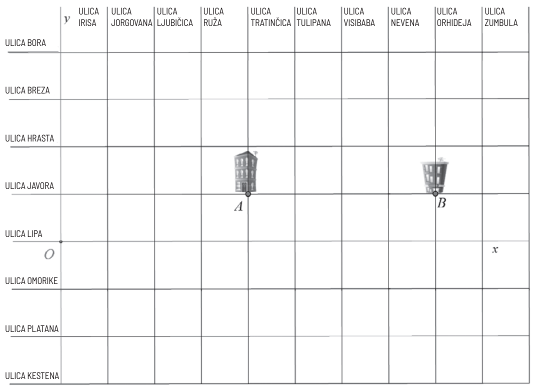
Pričekao je nekoliko minuta. Čulo se samo „klikanje” miša. Svi su bili uzbuđeni, željni novih znanja i matematičko-geometrijskih izazova.

– Sada možete pogledati tekst zadatka čiji će sadržaj biti tema današnjeg druženja – nastavio je objašnjavati profesor Kosinus.

Zadatak. Krugoslav se šeće blok od svoje kuće (točka B) sa svojim psom Ferijem. Mogu li se sresti Krugoslav i Kvadratoslav na nekom od križanja ulica Matkograda, Slika 1., ako Kvadratoslav vozi role 3 bloka od kuće svoga djeda Mrgoslava (točka A)?

– Razmislite i pokušajte ga riješiti na dva načina: a) u Euklidiji, b) u Nigdjezemskoj.

– Možda bi bilo dobro prisjetiti se osnovnih pravila koja vrijede u Euklidiji odnosno u Nigdjezemskoj. Šimune, bi li nas mogao podsjetiti na ta pravila?



Slika 1.

– Naravno – ponosno će Šimun – i nastavlja: Euklidija je zemlja u kojoj vrijede pravila euklidske geometrije i moguće se kretati u svim smjerovima. No, u Nigdjezemskoj to ne vrijedi. Tamo se moguće kretati/šetati *lijevo* ↔ *desno* ili *gore* ↔ *dolje*.
Bubač nadodaje: – Smjer sjever – jug ili istok – zapad.

Nestrpljiva Maja morala se uključiti: – Prošli smo put crtali kružnice u Euklidiji i Nigdjezemskoj. Kružnica u Nigdjezemskoj je kvadrat i zovemo je *M*-kružnica.

– Točno! – potvrdio je profesor Kosinus.
No Bubač kao Bubač, prvo zazuji i zamaše krilima pa komentira, opet su Krugoslav i Kvadratoslav u zadatku. Prozvani su se veselo smiješili. Ova opaska nije smela profesora Kosinusa – on je nastavio davati upute za rješavanje zadatka: – Ponavljam, razmislite o upravo rečenom pa probajte primijeniti na zadatak. Zadatak treba riješiti u dva slučaja. Tko prvi riješi, neka se javi! Imat će priliku prikazati i objasniti svoj način rješavanja.

– Gotova – javila se Petra. - Riješila sam oba slučaja zadatka. Lukas je samo mrmljao u bradu: – Kad prije? Imam osjećaj da nisam niti uzeo miša u ruku, a Petra je već riješila zadatak.

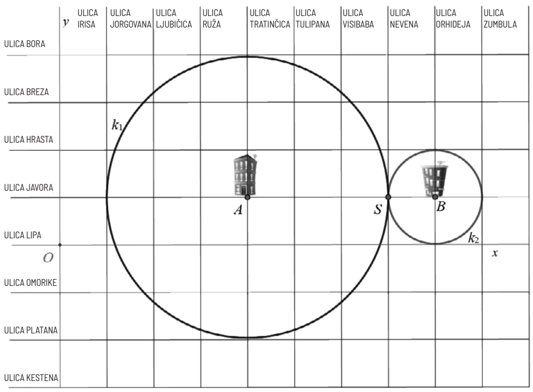
– Družbo, poslušajmo što nam ima Petra za reći. Pazite, kako biste ju mogli ispraviti ili ponešto prokomentirati ili pitati – komentirao je profesor Kosinus prije nego je Petri dao riječ.
Petra je stala pred družbu i prikazala dva rješenja, Slike 2. i 3, koje je nacrtala u Sketchpadu. No nije ostala samo na tome, odlučila je i ponešto reći:

– Na Slici 2. je rješenje zadatka u Euklidiji. Sve točke koje odgovaraju uvjetu da Krugoslav šeće oko točke *A* definiraju kružnicu k_1, dok je kružnica k_2 skup svih točaka koje nastaju rolanjem Kvadratoslava. Te dvije kružnice se dodiruju/tangiraju u točki *S*. Ta točka ujedno je točka njihovog susreta.

– Bolje bi bilo da si rekla skup svih točaka koje su na putu kojim se šeće Krugoslav definiraju kružnicu k_1 i slično za kružnicu k_2 – komentirala je Eva.

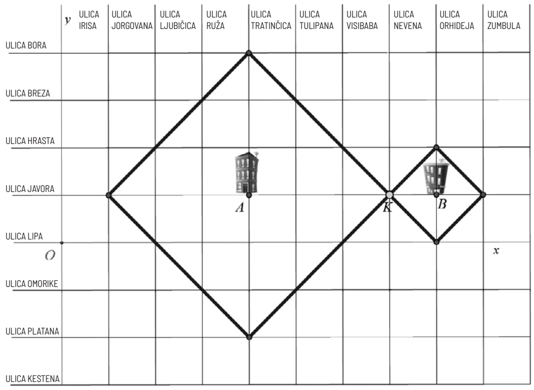
– **Što misle ostali o ova dva načina definiranja? – upitao je profesor Kosinus.**

– Može oboje, mislim – rekao je Kvadratoslav, dok su ostali kimali glavama.



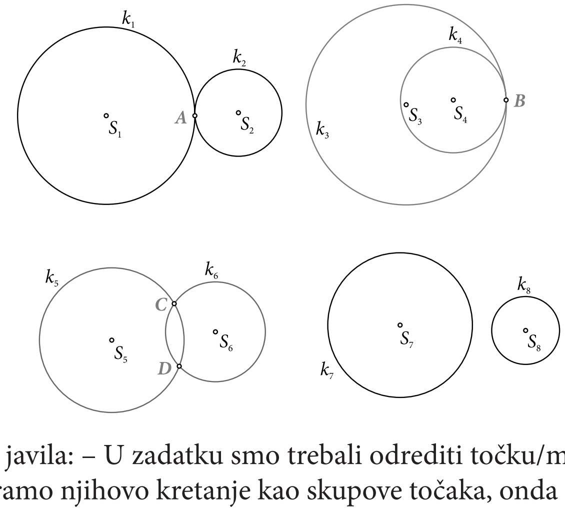
Slika 2.

Petra dalje nastavlja objašnjavati: – Kako bismo zadatak riješili u Nigdjezemskoj, nacrtamo *M*-kružnice koje odgovaraju šetnji Krugoslava odnosno rolanju Kvadratoslava, Slika 3. Točka *K* je točka susreta.



Slika 3.

– Ove je bilo vrlo dobro – javio se profesor Kosinus. Prije nego krenemo dalje, pogledajte sljedeću Sliku 4. Što možete reći? Ima li ta slika neke veze sa rješavanjem zadatka? Koje?



Slika 4.

Maja se prva javila: – U zadatku smo trebali odrediti točku/mjesto susreta. Ako promatramo njihovo kretanje kao skupove točaka, onda točku susreta možemo odrediti kao presjek tih skupova. To je i Petra objasnila.

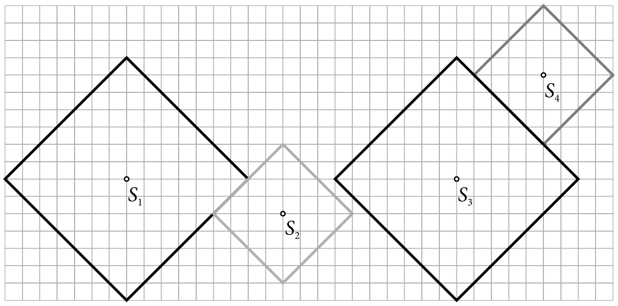
– Uz uvjet da točka presjeka postoji – nadodala je Eva – jer inače se ne mogu sresti.

– Zapažanje je na mjestu, ima li još razmišljanja? – upitao je profesor Kosinus.

– Mislim da ste nam Sliku 4. prikazali da se prisjetimo koje su mogući odnosi između dviju kružnica – počeo je Šimun – dvaju skupova točaka. Mogu se dodirivati izvana/iznutra u jednoj točki, sjeći u dvije točke ili zajedničkih točaka nama.

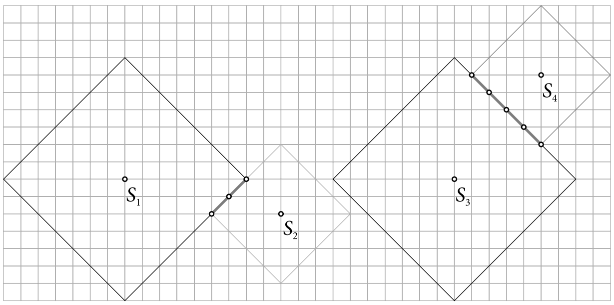
– Sve je to točno, ali još nismo proučavali slučajeve kod *M*-kružnica, to nam slijedi zar ne? – priključio se i Krugoslav.

– Svi ste u pravu – nastavlja profesor Kosinus. Pogledajte redom sljedeće slike. Presjek *M*-kružnica treba odrediti. Pokušati definirati pravilo koje vrijedi općenito. Naglašavam, svaka *M*-kružnica definirana je polumjerom r i središta *M*-kružnica su udaljena d mjernih jedinica.



Slika 5.

– Ovo nije teško, prikazat ću vam što sam ja dobio, Slika 6. – javio se Šimun i nastavio – posebno označene točke (veće u odnosu na ostale) presjeci su ovih dviju *M*-kružnica. Oni definiraju dužine. U ova dva slučaja presjek su dužine.



Slika 6.

– Mogu li se i ja nešto reći? – upitao je Krugoslav.

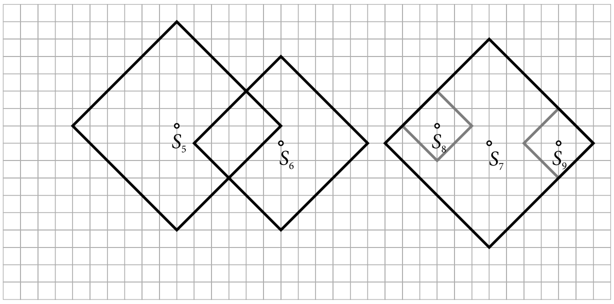
– Naravno! – zazujao je Bubač.

– Zamislimo da su zadane dvije *M*-kružnice $k_M(S_1, 7)$ i $k_M(S_2, 4)$. Sa d označimo udaljenost središta kružnica, tj. $d = |S_1S_2|$ – započeo je Krugoslav. Svi su ga slušali i kao da se pojavio upitnik iznad njihovih glava. No, Krugoslav nastavlja: – U našem slučaju vrijedi da je $d = 11$, ali i $11 = d = r_1 + r_2 = 7 + 4 = 11$ pa možemo zaključiti da je presjek dužina.

– Čekaj malo – javila se Petra – zar si zaboravio Zadatak? Tamo smo promatrali dvije *M*-kružnice $k_M(A, 3)$ i $k_M(B, 1)$. Prema tome vrijedi $4 = d = r_1 + r_2 = 3 + 1 = 4$, a zajednička točka je točka presjeka JEDNA točka. Nešto tu ne štima.

Profesor Kosinus je uvidio da treba intervenirati: – Polako. Prvo, Krugoslave, jako si lijepo uočio neka svojstva. Petra, super si nadopunila Krugoslavovo razmišljanje. Dakle, treba reći da ako su zadane dvije *M*-kružnice polumjerima r_1 i r_2, a s d označimo udaljenost središta, tada se, ako vrijedi $d = r_1 + r_2$, te dvije kružnice sijeku/dodiruju u točki (Slika 3.) ili po dužini, Slika 6.

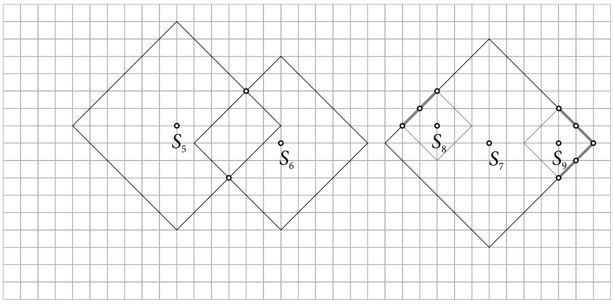
– Sada će biti puno jednostavnije promotriti slijedeći slučaj, Slika 7. – zazujao je Bubač.



Slika 7.

– Zaključujemo na isti način – započeli su Šimun i Lukas uglas. Da ih ne bi profesor Kosinus opomenuo, jer nije lijepo pričati u glas, dogovorili su se da započne Šimun, a nastavit će Lukas.

– Na sljedećoj Slici 8. prikazane su točke presjeka. Malo su veće od ostalih da bismo ih odmah uočili – nastavio je objašnjavati Šimun. Vidimo da su presjeci ovih dviju *M*-kružnica 2 točke odnosno dužine.



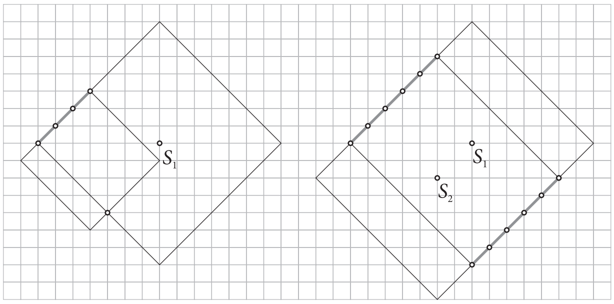
Slika 8.

– Ako bismo proučavali dvije *M*-kružnice zadane polumjerima i ako udaljenost od središta označimo sa d – počeo je objašnjavati Lukas, onda se, budući da je $d < r_1 + r_2$, dvije *M*-kružnice sijeku u 2 točke ili dužini ili u 2 dužine.

Eva se počela meškoljiti i nešto pričati u pola glasa.

– Eva, podijeli svoja razmišljanja s nama – kazao je profesor Kosinus.

– Malo sam se zaigrala *M*-kružnicama i nacrtala Sliku 9. Presjeci su ili točka i dužina ili dvije dužine.



Slika 9.

– Uh, koliko je proučavanje kružnica, točnije *M*-kružnica kompleksnije nego proučavanje položaja dviju kružnica u euklidskoj ravnini – komentirao je Bubač.

– Zadovoljan sam kako ste se snašli u novom okruženju primjenjujući poznate elemente euklidske geometrije i poopćavajući ih. Na kraju, razmislite što ako je $d > r_1 + r_2$ – zaključio je profesor Kosinus još jedno druženje geometrijske družbe.

Literatura:

1. Divjak, B. (2000): *Notes on Taxicab Geometry*, KOG. 5 – 9.
2. Mladinić, P. ; Radović N. (2018): *Geometrija prirode*, Proven grupa d. o. o., Zagreb.
3. Mladinić, P.; Radović, N. (2019): Kružnica je kvadrat ili proučavanje novih geometrija, Zbronik radova Stručno – metodičkog skupa Metodika nastave matematike u osnovnoj i srednjoj školi – Geometrija u nastavi matematike, Pula, 14. – 16.11.2019., 261 – 269.
4. Nirode, W. (2018): *Doing Geometry with Geometry Software*, Mathematic Teacher, Vol. 112, No. 3, November/ December, 179 – 184.-
5. Polya, G. (2003): *Matematičko otkriće*, HMD, Zagreb.
6. Reynolds, B. E.; Fenton, W. E. (2005): *College Geometry Using The Geometer's Sketchpad*, Key College Publishing, Emeryville.