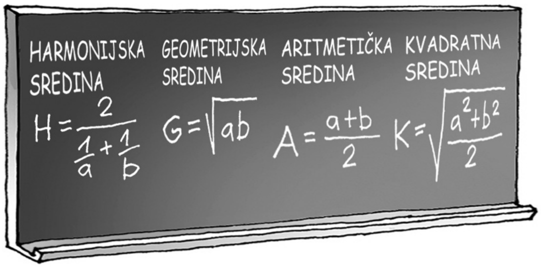
O BROJEVNIM SREDINAMA ZA DVA POZITIVNA BROJA

Dragoljub Milošević, Gornji Milanovac

Za dva pozitivna broja a i b definiraju se harmonijska, geometrijska, aritmetička i kvadratna sredina, redom na sljedeći način:



Harmonijska sredina zapisuje se još i kao $H=\dfrac{2ab}{a+b}$. Lako se dokazuje da vrijede sljedeće nejednakosti:

$$H \le G \le A \le K,$$

pri čemu je jednakost ispunjena samo ako je $a = b$. Tada je $H = G = A = K$.

Ovdje ćemo navesti i dokazati dvije jednakosti i nekoliko nejednakosti koje vrijede za navedene brojevne sredine.

Zadatak 1. Dokažimo sljedeće jednakosti:

a) $AH = G^2$,

b) $G^2 + K^2 = 2A^2$.

Rješenje.

a) $A \cdot H = \dfrac{a+b}{2} \cdot \dfrac{2ab}{a+b} = ab = \left(\sqrt{ab}\right)^2 = G^2$;

b) $G^2 + K^2 = ab + \dfrac{a^2+b^2}{2} = \dfrac{1}{2}(2ab + a^2 + b^2) = \dfrac{1}{2}(a+b)^2 = 2\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 = 2A^2$

Zadatak 2. Dokažimo sljedeće nejednakosti:

a) $A^2 \ge HG$,

b) $K + G \le 2A$,

c) $A + H \ge 2G$,

d) $2K + H \le 3A$.

Rješenje.

a) Korištenjem jednakosti $G^2 + K^2 = 2A^2$ imamo $G^2 - 2KG + K^2 = 2A^2 - 2KG$, ili $(G - K)^2 = 2(A^2 - KG)$.

Budući da je $(G - K)^2 \geq 0$, zaključujemo da je $2(A^2 - KG) \geq 0$, odakle je $A^2 \geq KG$

b) Upotrebom jednakosti $G^2 + K^2 = 2A^2$ i dokazane nejednakosti $A^2 \geq KG$ dobivamo

$(K+G)^2 = K^2 + 2KG + G^2 = 2A^2 + 2KG \leq 2A^2 + 2A^2 = 4A^2$, odakle je $K + G \leq 2A$.

c) Budući da je $(A - H)^2 \geq 0$, tj. $A^2 - 2AH + H^2 \geq 0$, zaključujemo da vrijedi $A^2 + 2AH + H^2 \geq 4AH$, tj. $(A + H)^2 \geq 4G^2$ (zbog $AH = G^2$), a odatle slijedi $A + H \geq 2G$.

d) Korištenjem nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za brojeve A i $2A - H$, imamo: $\frac{A+2A-H}{2} \geq \sqrt{A(2A-H)}$, ili (poslije kvadriranja) $\left(\frac{3A-H}{2}\right)^2 \geq A(2A-H)$.

S obzirom na to da je $A(2A - H) = 2A^2 - AH = G^2 + K^2 - G^2 = K^2$, zbog jednakosti $AH = G^2$ i $G^2 + K^2 = 2A^2$ slijedi $\left(\frac{3A-H}{2}\right)^2 \geq K^2$, što znači da je $K \leq \frac{3A-H}{2}$ i $2K + H \leq 3A$.

Zadatak 3. Dokažimo valjanost sljedećih nejednakosti:

a) $K + H \geq A + G$,

b) $KH \leq AG$.

Rješenje.

a) Množenjem lijeve i desne strane nejednakosti $K + G \leq 2A$ pozitivnim brojem $K - G$, te primjenom jednakosti iz zadatka 1, imamo redom:

$K^2 - G^2 \leq 2AK - 2AG$, $K^2 + 2AG \leq 2AK + G^2$, $K^2 + 2AG + G^2 \leq 2AK + 2G^2$, $2A^2 + 2AG \leq 2AK + 2AH^2$, $2A(A + G) \leq 2A(K + H)$ i, konačno, $K + H \geq A + G$.

b) Primjenom jednakosti $AH = G^2$ i nejednakosti $A^2 \geq KG$ dobivamo redom: $AHK = G^2K$, $HK = \frac{KG}{A} \cdot G \leq \frac{A^2}{A} \cdot G$, tj. $KH \leq AG$.

Pozivamo Matkače da nam pošalju rješenje sljedećeg zadatka:

Dokažite da vrijedi nejednakost $G^4 + K^4 = 2A^4$.