Matka 29 (2020./2021.) br. 114

PASCALOV I LEIBNIZOV TROKUT

Daria Bevanda, XV. gimnazija, Zagreb

Mnogobrojne pravilnosti u matematici možemo smjestiti u trokute. Zanimljivu misao možemo potvrditi s nekoliko primjera takvih pravilnih trokuta, a neki od njih su Pascalov i Leibnizov trokut.

Započet ćemo Pascalovim trokutom. Imate li kakvih pretpostavki o kakvom se posebnom trokutu radi?

Francuski matematičar i fizičar iz 17. stoljeća, Blaise Pascal, proučavao je pravilnosti koje ovaj trokut krije, a s nekima od njih i sami ćemo se pozabaviti. Prije nego se bacimo na zanimljive tajne koje čuva Pascalov trokut, pogledajmo najprije kako on nastaje.

1
1 1
1 2 1

Slika 1. Prva tri reda Pascalova trokuta

Za početak nacrtajmo trokut s tri jedinice, jednom na vrhu i dvije ispod nje (Slika 1.). Svaki sljedeći red nastat će zbrajanjem dvaju susjednih brojeva, a na samim rubovima redova nalazi se po jedna jedinica na svakoj strani. Vodeći se zadanim pravilom možemo odrediti kako sljedeći red izgleda: dakle, s obje strane imamo pod dvije jedinice, a srednji ćemo element dobiti kada zbrojimo dvije susjedne jedinice iz reda iznad. Trebali bismo dobiti 1 2 1.

Pokušajte sami ispuniti sljedeća 4 reda, a svoje rješenje možete provjeriti na samome kraju!

Kako bismo bolje mogli proučavati zanimljiva svojstva koja ovaj trokut nudi, moramo odrediti neke dijelove samog trokuta. Svakom ćemo redu odrediti njegovu poziciju, počevši od nule. Dakle, red u kojemu se nalazi samo jedna jedinica bit će 0. (nulti) red, s dvije jedinice 1. (prvi), s dvojkom 2. (drugi) i tako u nedogled. Možemo uočiti kako svaki red odmah poslije rubne jedinice ima broj koji odgovara njegovom rednom broju (jedno od mnogobrojnih prečaca s kojima ćemo se susresti u ovom interesantnom trokutu).

Ako se nalazimo u 4. (četvrtom) redu, koja se znamenka nalazi neposredno poslije rubne jedinice? U kojem se redu nalazi broj 9 odmah poslije rubne jedinice?

Počnimo! Prvo ćemo se baviti zbrojem elemenata pojedinog reda trokuta. Promotrimo trokut na slici (Slika 2.) te zbrojimo elemente prvih par redova.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

Slika 2. Pascalov trokut do 7. reda

1 + 1 = 2
1 + 2 + 1 = 4
1 + 3 + 3 + 1 = 8

Zbrojite još neke redove Pascalova trokuta. Što uočavate? Koliki je zbroj 3. reda, a koliki 5. reda?

Ako dobro pogledamo, uočit ćemo kako su svi brojevi parni, tj. višekratnici broja 2. Trenutno nam se to i ne čini kao neka pravilnost, no idemo proučiti to malo bolje.

Rastavljanjem tih zbrojeva na proste faktore uočit ćemo kako se ti brojevi sastoje samo od broja dva. ***Raspišite neke od tih zbrojeva kao umnoške prostih brojeva.***

$$4 = 2 \cdot 2$$

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Prisjetimo se kako smo odredili da ćemo numerirati redove trokuta. Dakle u **2. (drugom)** redu zbroj znamenaka jednak je 4 koju smo rastavili na **2 dvojke**. U **3. (trećem)** redu zbroj je jednak broju 8, a nju možemo rastaviti na **3 dvojke**.

Možemo zaključiti da je zbroj elemenata unutar n-tog reda jednak umnošku n dvojki.

Provjerite ovo pravilo na 4. i 5. redu. A u 10. redu? Vrijedi li zaista to pravilo?

Ako se još malo zadržimo na redovima, primijetit ćemo još jednu pravilnost – pravilo prostih brojeva.

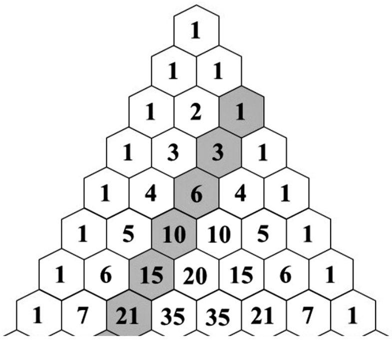
Promotrimo peti (5.) i sedmi (7.) red. U 5. redu prvi broj uz 1 je 5, zatim 10, pa 10 te na kraju ponovno 5 i 1. ***Što možemo zaključiti o broju 10?*** Možemo zaključiti da je 10 višekratnik broja 5.

Što je sa 7. redom? U sedmom se redu uz broj 7 nalaze elementi 21, 35, 21 te ponovno 7 i 1. 21 i 35 višekratnici su broja 7.

Zaključak je taj da se u svakom redu u kojem se neposredno poslije 1 nalazi prosti broj nalaze višekratnici toga prostog broja. Još je jedna od mnogobrojnih tajni koje krije Pascalov trokut otkrivena! ***Provjerite vrijedi li to i za neke druge proste brojeve (2, 3, 11, 13...).***

Zanimljivo je kako se redovi u Pascalovu trokutu ponašaju. Idemo istražiti što nam dijagonale trokuta donose.

U trokutu pronalazimo dvije vrste dijagonala: oštre i blage. Bavit ćemo se oštrim dijagonalama. (Slika 3.)

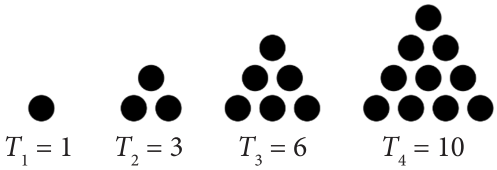


Slika 3. Treća oštra dijagonala Pascalova trokuta

Pratit ćemo dijagonale s lijeve strane. Tako nam prva dijagonala s lijeve strane sadrži samo jedinice. Što je s drugom dijagonalom? U njoj ćemo pronaći niz prirodnih brojeva. No što je s trećom dijagonalom? S njom ćemo se malo detaljnije pozabaviti.

Na početku ćemo ponoviti što su trokutasti brojevi. ***Možete li se sami sjetiti?***

Ako ste uspjeli, onda ste se sigurno sjetili kako su trokutasti brojevi oni koji označavaju broj „kuglica" koje su nam potrebne da napravimo trokut. Krećemo od 1. Sljedeći broj kuglica koje su potrebne za trokut jest 3. Ako nadodamo još 3 kuglice na dno prethodno nastalog trokuta, dobit ćemo još veći trokut, a za njega će trokutasti broj biti 6 (Slika 4.). Promotrimo sada elemente treće (3.) dijagonale. Uočavamo li neki uzorak?



Slika 4. Trokutasti brojevi

Elementi treće (3.) dijagonale tvore niz trokutastih brojeva. Prilično prikladno s obzirom na to da se radi o trećoj dijagonali, a trokut ima 3 vrha.

Ispišite neke elemente treće (3.) dijagonale te nacrtajte trokute koji odgovaraju tim trokutastim brojevima.

Koliko pravilnosti, a samo jedan trokut! Koliko će ih tek biti ako imamo dva trokuta!?

Poslije Pascalova trokuta, pozabavit ćemo se Leibnizovim.

Mladi njemački matematičar i filozof Gottfried Wilhelm Leibniz odgovoran je za nastanak novog trokuta prepunog pravilnosti nazvanog po njemu samome. Izgledom se uistinu razlikuje od Pascalova, ali neke pravilnosti uočavamo i kod njega. No prvo ćemo proučiti samo nastajanje trokuta.

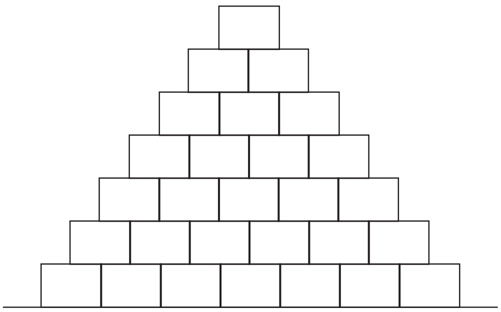
U Leibnizovu trokutu susrećemo se s drugačijim obrascem; na vrhu trokuta nalazi se 1, a na rubovima trokuta ne nalaze se jedinice već razlomci čiji su nazivnici elementi druge dijagonale Pascalova trokuta. Još jedna poveznica!

No kako ti brojevi zapravo nastaju? Za početak ispunite priloženi trokut s već poznatim pravilima koje znamo. Možemo primijetiti kako su nam nulti (0.) i prvi (1.) red već popunjeni. Uočavate li već možda kojim se pravilom trokut ispunjava? Trokut bi trebao izgledati kao na slici (Slika 5.).

$$1$$
$$\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{3} \qquad\qquad \frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{4} \qquad\qquad\qquad \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{5} \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{1}{5}$$
$$\frac{1}{6} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{1}{6}$$

Slika 5. Vanjski rub Leibnizova trokuta

Ako i niste na prvu odmah uočili, proći ćemo korak po korak obrazac karakterističan za Leibnizov trokut. U ovom trokutu stvari idu malo obrnutim redoslijedom. Dakle, nećemo zbrajati gornja dva susjedna, već donja dva susjedna elementa. Neobično, zar ne? Prema tome, u drugom (2.) redu moramo odgonetnuti koji broj zbrojen sa $\frac{1}{3}$ daje $\frac{1}{2}$. Nakon što provedemo nekoliko računa, doći ćemo do broja $\frac{1}{6}$. ***Probajte ispuniti treći, četvrti i peti red. Da biste si olakšali računanje, možete se poslužiti kalkulatorom.***

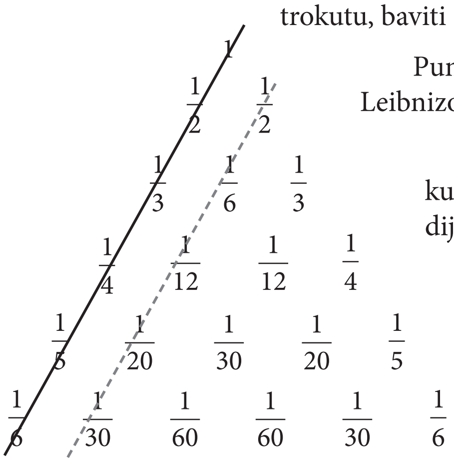


Ako ste ga dobro ispunili, Leibnizov trokut trebao bi izgledati kao na slici (Slika 6.).

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & \\
 & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & \\
 & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & \\
 & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & \\
\frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

Slika 6. Leibnizov trokut do 5. reda

Promatrat ćemo dijagonale, ponovno. Također ćemo se, kao i u Pascalovu trokutu, baviti oštrim dijagonalama.



Slika 7. Dijagonale Leibnizova trokuta

Punom linijom istaknimo prvu, a isprekidanom drugu dijagonalu Leibnizova trokuta. To bi trebalo izgledati kao na slici.

Prva dijagonala drugačija je od prve dijagonale Pascalova trokuta, ali poveznica sigurno postoji. Obojite plavom bojom drugu dijagonalu Pascalova trokuta. Uočavate li neku pravilnost?

Možemo primijetiti da nazivnici elemenata prve dijagonale Leibnizova trokuta odgovaraju elementima prve dijagonale Pascalova trokuta. Prilično zanimljiva poveznica, ali ima li još?

Povežite drugu dijagonalu Leibnizova trokuta s trećom dijagonalom Pascalova. ***Prisjetite se što vrijedi za elemente treće dijagonale Pascalova trokuta.*** Podijelite nazivnike svih elemenata druge dijagonale Leibnizova trokuta s 2. Uočavate li sad nešto?

Uočavamo da su nazivnici elemenata druge dijagonale podijeljeni s dva trokutasti brojevi, a ujedno i elementi treće dijagonale Pascalova trokuta. ***Provjerite vrijedi li to zaista; usporedite elemente tih dvaju dijagonala na svojim ispunjenim trokutima. Postoji li slična poveznica i za treću dijagonalu Leibnizova trokuta? A četvrtu? Provjerite.***

Literatura:

1. https://enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=35902 (7. 11. 2020.)
2. https://mis.element.hr/fajli/383/21-10.pdf (9. 11. 2020.)
3. https://www.mathsisfun.com/algebra/triangular-numbers.html (9. 11. 2020.)