MATEMAGIČAR

Petar Mladinić, Zagreb

DETEKTIVSKE PRIČE GAUSSA I POLYE ILI DRUKČIJI POGLEDI NA PROBLEME

Poznata je anegdota o tome kako je mladi C. F. Gauss (1775. – 1855.) riješio zadatak o zbroju prvih sto prirodnih brojeva, tj. koliki je zbroj

$$1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100$$

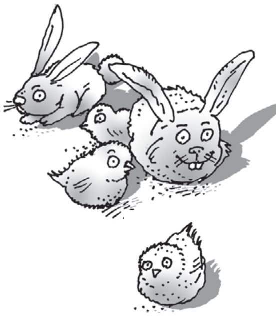
Mladi je Gauss uočio da je zbroj prvog i posljednjeg broja $1 + 100 = 101$, ali da je isti rezultat za $2 + 99$, $3 + 98$ itd., i da takvih parova ima $\frac{100}{2} = 50$, pa je ukupan zbroj jednak $50 \cdot 101 = 5050$.

Dakle, njegovim drukčijim pogledom na zadatak (kojim ga je učitelj „kaznio" jer je očekivao da će mu za zbrajanje trebati puno vremena) izbjegao je dugotrajno i dosadno zbrajanje.

* * *

George Polya (1887. – 1985.) u svojoj knjizi *Matematičko otkriće* daje sljedeći zadatak s pilićima i kunićima.

Zadatak. *Farmer je imao piliće i kuniće. Zajedno su imali 50 glava i 140 nogu. Koliko je taj farmer imao kunića, a koliko pilića?*



Može li se ovaj zadatak riješiti bez uobičajene uporabe sustava jednadžbi?

Polya navodi rješenje četrnaestogodišnjeg učenika koji je predložio da se taj problem pogleda na drukčiji način tako da se zamisli situacija u kojoj pilići i kunići u dodiru s tlom imaju samo polovinu svojih nogu, tj. $\frac{140}{2} = 70$. Na taj je način uočljivo da se razlika između ovog broja nogu i broja glava $70 - 50 = 20$ odnosi na broj kunića, i zadatak je riješen jer ima $50 - 20 = 30$ pilića.

* * *

U ovom smo smislu drukčijeg pogleda na probleme i nazvali ovaj tekst njihovim detektivskim pričama.

Polya je uobličio detektivsku proceduru/postupak/metodu za rješavanje problemskih zadataka/situacija. Ta metoda ima sljedeća 4 koraka:

1. razumijevanje problema,
2. stvaranje plana,
3. izvršenje plana,
4. pogled unatrag,

i nije karakteristična samo za probleme u matematici, nego i za sva druga područja učenja i poučavanja.

* * *

Četiri priče

Sljedeća četiri zadatka omogućuju različite načine rješavanja.

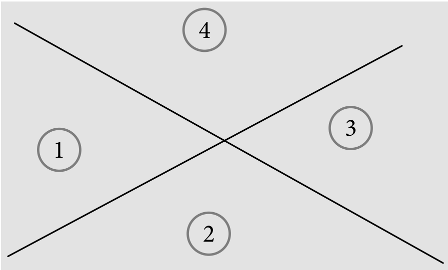
Razmotrimo problem o broju dijelova ravnine na koju je dijele pravci.

Priča 1. *U ravnini je zadano 100 pravaca tako da nikoja dva nisu međusobno usporedna i nikoja se tri ne sijeku u istoj točki.*

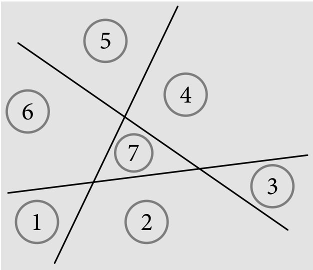
Na koliko dijelova ti pravci dijele ravninu?

Rješenje. Neka je n broj pravaca, a m broj područja/dijelova ravnine. Ilustrirajmo postupak dijeljenja ravnine na nekoliko primjera.

Za $n = 2$ dobivamo $m = 4$ područja.



Za $n = 3$ dobivamo $m = 7$ područja.



Za $n = 4$ dobivamo $m = 11$ područja, a za $n = 5$ dobivamo $m = 16$. Zapišimo te rezultate u tablicu.

n	2	3	4	5
m	4	7	11	16

Što se može uočiti? Broj m jednak je vrijednosti prethodnog broja m uvećanog za sadašnji n (primjerice, $7 = 4 + 3$, $11 = 7 + 4$). Zapišimo ovo zapažanje na nov način u sljedeću tablicu kako bismo uočili novi pogled.

n								
3	7							
4		+4					=	7 + 4 = 11
5			+5				=	11 + 5 = 16
6				+6			=	16 + 6 = 22
7					+7		=	22 + 7 = 29
8						+8	=	29 + 8 = 37

Vidimo da je 7 = 1 + 1 + 2 + 3, i to „ugradimo" u zbroj ovih dijelova ravnine u kojem je vidljiva Gaussova dosjetka:

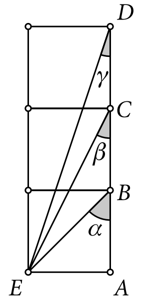
1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + ... + 100	=	$1 + 50 \cdot 1$
	=	5051

Broj područja/dijelova ravnine jednak je 5051.

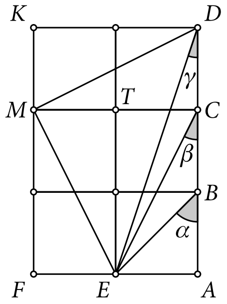
Priča 2. *Tri kvadrata složena su jedan na drugi. Točka E spojena je s točkama B, C i D. Dokažite da je*

$$\alpha + \beta + \gamma = 90.$$

Rješenje.



Nadopunimo sliku tako da zrcalimo ovaj „stup" na lijevoj stranici. Dobijemo sljedeću sliku.



Točka F zrcalna je slika točke A, točka M slika točke C i K točke D.

Točka T polovište je dužine $\overline{MC}$.

$|\angle TED| = \gamma$ i $|\angle EMF| = \beta$. (Zašto?)

$|\angle EMD| = 18° - (\beta + (90° - \beta)) = 90°$, a $|EM| = |MD|$ jer to su duljine dijagonala sukladnih pravokutnika.

Tokut ΔEMD je pravokutan i jednakokračan. Odavde slijedi da je $|\angle MDE| = \alpha$ $= 45°$ te $\gamma + \beta = \alpha = 45°$.

Dakle, vrijedi

$$\alpha + \beta + \gamma = 90.$$

Zadatak. Zadan je pravokutni trokut ΔABC s kutovima $\alpha = 30°$ i $\beta = 60°$ te duljinom hipotenuze jednake 1. Kolike su duljine kateta a i b toga trokuta?

Uputa. Trokut ABC zrcali u odnosu na pravac kojemu pripada kateta koja definira kut α.

Sljedeći problem na neki je način kombinatorni.

Priča 3. *Uzmimo 6 listova (ne nužno jednakih) papira. Neke od njih rezrežemo na 7 dijelova. Taj postupak rezanja na 7 dijelova možemo nastaviti nekoliko puta.*

Ako smo na kraju razrezivanja dobili 67 komada papira, koliko komada ili koliko smo puta rezali?

Rješenje. Ovaj je zadatak na prvi pogled dosta neodređen u smislu kako smo navikli u matematičkim zadatcima. Trebamo ga pokušati pogledati na „nov" način.

Razmotrimo ovaj postupak poštujući 1. korak koji je Polya definirao.

U početnom trenutku imamo 7 komada papira.

Nakon prvog razrezivanja (kao i u ostalim razrezivanjima ako ih načinimo nakon toga) suočavamo se sa sljedećim brojevima, primjerice u prvom rezanju imamo 7 komada papira.

U tom rezanju (kao i u ostalim razrezivanjima ako ih učinimo) suočavamo se sa sljedećim brojevima: jedan se papir razreže na 7 dijelova. To znači da imamo starih 5 papira i 1 + 6 novih papira, tj.

$$5 + 1 + 6 = 12$$

papira.

Isto bi se dogodilo da smo razrezali 2 ili više papira.

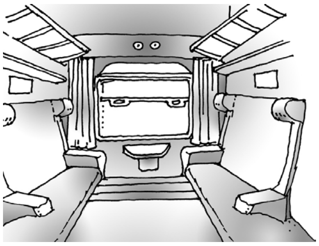
Dobili smo, u svim slučajevima, broj papira koji mora biti djeljiv brojem 6.

Ova analiza ukazuje da se ovim postupkom ne može dobiti broj od 67 papira jer taj broj nije djeljiv brojem 6.

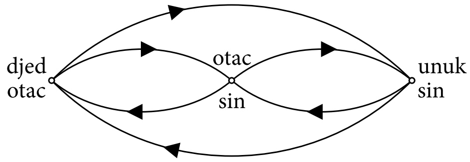
Zadatak. Ako je ukupan broj papira jednak a) 126 i b) 1000, može li se taj proces ostvariti?

Sljedeći zadatak nije ni geometrijski ni numerički. Riješit ćemo ga na dva načina.

Priča 4. *Koliko najviše, a koliko najmanje mjesta u kupeu vlaka mogu zauzeti 2 oca, 2 sina, 1 djed i jedan unuk?*



Rješenje. Ovaj se problem može vizualizirati pomoću grafa. Vidi se da se radi o najmanje 3 osobe.



Ako se predoči jezikom skupova, onda imamo sljedeće skupove:

$$\{djed, otac\}, \{otac, sin\}, \{djed, sin\}.$$

Njihova unija (ako se radi o istim osobama) daje tročlani skup

$$\{djed, otac\} \cup \{otac, sin\} \cup \{djed, sin\} = \{djed, otac, sin\}.$$

Evo novih priča. Objavit ćemo ime svakog Matkača koji nam pošalje rješenje i nagraditi ga.

Zadatci

1. Grad A povezan je s gradom B s 2 ceste jednake duljine koje idu kroz grad X i grad Y. Cesta iz X u Y kroz B kraća je od ceste koja ide kroz A i grad Y bliži je gradu A od grada B. Koliko je ukupno po duljini različitih cesta između ta 4 grada? Napišite redoslijed cesta od najkraće do najdulje.
2. Blizanci Danica i Petar slave rođendan. Majci su dali liste svojih pozvanih prijatelja i prijateljica. Na listama je bilo 8 Petrovih i 6 Daničinih prijateljica i prijatelja. Majka je zaključila da su pozvali ukupno 10 prijatelja i prijateljica. Je li moguće da majka nije nikoga zaboravila?
3. Na šahovskoj ploči 8 × 8 uklonjeni su gornji lijevi i donji desni kvadratić. Može li se tako okrnjena ploča pokriti s 31 pločicom 2 × 2 s crvenim i bijelim kvatratićem?