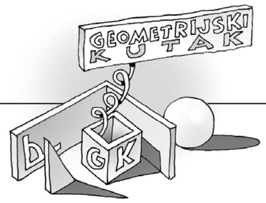
Matka 29 (2020./2021.) br. 114

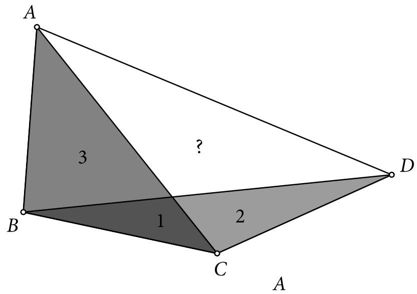


TROKUT, ČETVEROKUT I KRUG

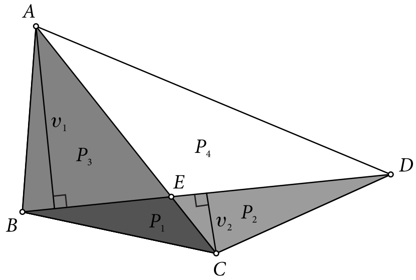
Zlatko Lobor, Zagreb

U ovom broju riješit ćemo nova četiri primjera. Ujedno, prva tri primjera zadatci su zadani u prethodnom broju Matke.

Primjer 1. Zadan je konveksni četverokut *ABCD* podijeljen dijagonalama na četiri dijela. Ako su poznate površine triju njegovih dijelova, kolika je površina cijeloga četverokuta?



Rješenje:



Označimo sjecište dijagonala E. Površine obojenih trokuta označimo s P_1, P_2 i P_3, a nepoznatu površinu trokuta AED označimo s P_4. U trokutima BDA i BCD spustimo visine v_1, odnosno v_2, na zajedničku stranicu $\overline{BD}$.

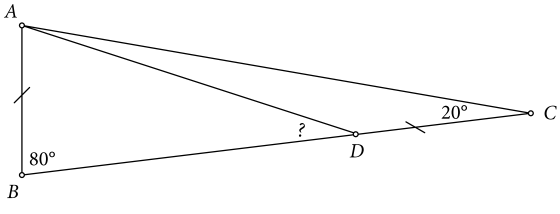
Za površine trokuta vrijedi: $P_1 = \frac{|BE| \cdot v_2}{2}$, $P_2 = \frac{|DE| \cdot v_2}{2}$, $P_3 = \frac{|BE| \cdot v_1}{2}$ i $P_4 = \frac{|DE| \cdot v_1}{2}$.

Slijedi: $P_1 \cdot P_4 = \frac{|BE| \cdot v_2}{2} \cdot \frac{|DE| \cdot v_1}{2} = \frac{|BE| \cdot |DE| \cdot v_1 \cdot v_2}{4}$ i

$$P_2 \cdot P_3 = \frac{|DE| \cdot v_2}{2} \cdot \frac{|BE| \cdot v_1}{2} = \frac{|DE| \cdot |BE| \cdot v_2 \cdot v_1}{4}.$$

Dakle, $P_1 \cdot P_4 = P_2 \cdot P_3$, tj. $P_4 = 2 \cdot 3 = 6$. Površina P četverokuta $ABCD$ je $P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 12$.

Primjer 2. Kolika je mjera kuta $\angle ADB$ ako je $|AB| = |CD|$?

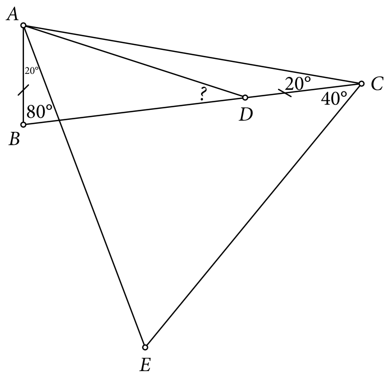


Rješenje:

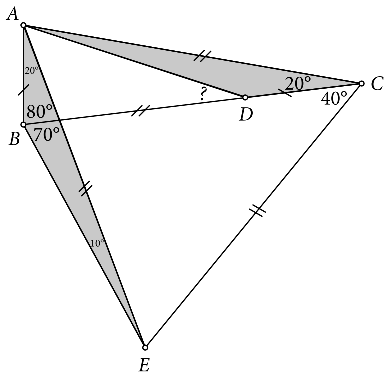
Izračunajmo najprije mjeru trećega kuta trokuta *ABC*. Vrijedi $|\angle BAC| =$ $= 180° - 20° - 80° = 80°$.

Budući da je $|\angle BAC| = |\angle CBA| = 80°$, možemo zaključiti da je trokut *ABC* jednakokračan.

Odaberimo sada u ravnini točku *E*, s iste strane pravca *AC* kao što su i *B* i *D*, takvu da je trokut *AEC* jednakostraničan (Slika 1.).



Slika 1.



Slika 2.

Svi kutovi trokuta *AEC* imaju 60° pa vrijedi $|\angle BCE| = 60° - 20° = 40°$ i $|\angle BAE| = 80° - 60° = 20°$.

Spojimo li točke *B* i *E* dužinom, dobivamo jednakokračni trokut *BEC* jer je $|BC| = |EC|$ (Slika 2.).

Kut između krakova toga trokuta ima 40°, a to znači da za kutove uz osnovicu $\overline{BE}$ vrijedi

$$|\angle EBC| = |\angle CEB| = (180° - 40°)\ /\ 2 = 70°.$$

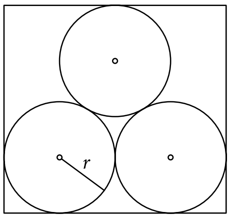
Mjera kuta $|\angle AEB|$ može se izračunati na dva načina:

I. $|\angle AEB| = |\angle CEB| - |\angle CEA| = 70° - 60° = 10°$

II. $|\angle AEB| = 180° - |\angle BAE| - |\angle EBA| = 180° - 20° - 150° = 10°$

Istaknimo sada trokute *ABE* i *ADC* (Slika 2.). Za ove trokute vrijedi $|AB| = |CD|$ i $|AE| = |AC|$ te je $|\angle BAE| = |\angle ACD| = 20°$. Prema S-K-S poučku o sukladnosti trokuta može se zaključiti da su trokuti *ABE* i *ADC* međusobno sukladni. To znači da je $|\angle CDA| = |\angle EBA| = 150°$, iz čega slijedi

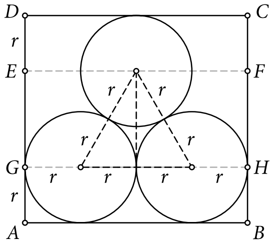
$$|\angle ADB| = 180° - |\angle CDA| = 180° - 150° = 30°.$$



Primjer 3. Kolika je površina četverokuta ako svi krugovi imaju radijus *r* (Slika na rubu)?

Rješenje:

Da bismo izračunali površinu četverokuta, potrebno je izračunati duljine njegovih stranica. Budući da nam je nepoznat radijus kružnica, duljine stranica četverokuta, a zatim i površinu izrazit ćemo u ovisnosti o radijusu zadanih kružnica r.



Označimo vrhove četverokuta $ABCD$. Središta triju kružnica vrhovi su jednakostraničnog trokuta kojemu stranice imaju duljine $2r$. Četverokut podijelimo dužinama $\overline{EF}$ i $\overline{GH}$ na tri dijela, kako je prikazano na slici lijevo.

Dužine $\overline{EF}$ i $\overline{GH}$ sadrže središta kružnica pa iz toga slijedi da je $|AG| = |ED| = r$, a $|GE|$ duljina je visine jednakostraničnog trokuta određenog središtima kružnica. Visina v jednakostraničnog trokuta sa stranicom duljine a računa se po formuli $v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Stoga je $|GE| = \frac{2r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$.

Dužina $\overline{GH}$ očigledno ima duljinu $4r$ jer je njezina duljina jednaka zbroju duljina promjera dviju donjih kružnica na slici.

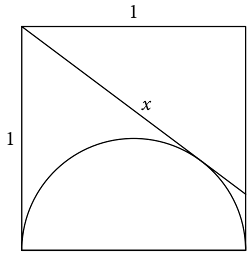
Dakle, duljine stranica četverokuta su

$|AB| = |GH| = 4r$ i

$|AD| = |AG| + |GE| + |ED| = r + r\sqrt{3} + r = r\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Površina P četverokuta $ABCD$ je

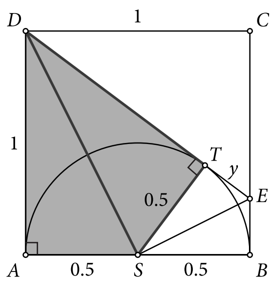
$$P = |AB| \cdot |AD| = 4r \cdot r\left(2+\sqrt{3}\right) = 4r^2\left(2+\sqrt{3}\right) \approx 14.93 \cdot r^2.$$

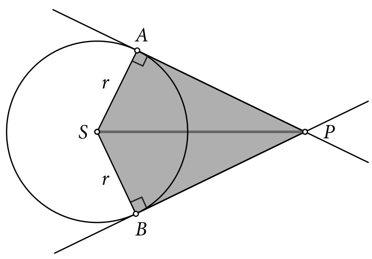


Primjer 4. Kolika je duljina x dužine unutar kvadrata, koja dira polukružnicu, ako je duljina njegovih stranica 1 (Slika na rubu)?

Rješenje:

Označimo vrhove kvadrata $ABCD$. Označimo s E drugu krajnju točku dužine duljine x, s T točku dodira dužine $\overline{DE}$ i polukružnice, a sa S središte polukružnice koje je ujedno i polovište stranice $\overline{AB}$.

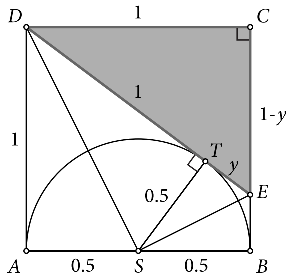




Pravac koji dira krivulju u jednoj točki naziva se **tangenta**. Na slici gore desno prikazane su tangente na kružnicu koje sadrže točku P izvan kružnice. Ako točke dodira (**dirališta**) označimo s A i B, onda možemo promatrati trokute SBP i SAP. Prema S-S-K poučku o sukladnosti ta su dva trokuta međusobno sukladna. Pritom koristimo činjenicu da je polumjer koji spaja središte i diralište okomit na tangentu.

Primijenimo ovo na postavljeni zadatak. Istaknuti trokuti DAS i DTS (na slici gore lijevo) sukladni su pa je $|DT| = |DA| = 1$. Označimo li duljinu dužine $\overline{TE}$ s y, tada vrijedi $|BE| = |ET| = y$ jer su i trokuti SBE i STE također međusobno sukladni.

U nastavku ćemo promatrati trokut DEC čije katete imaju duljine 1 i $1 - y$, a hipotenuza $1 + y$.



Iz Pitagorina poučka za ovaj pravokutni trokut slijedi:

$$(1 + y)^2 = 1^2 + (1 - y)^2$$

$$1 + 2y + y^2 = 1 + 1 - 2y + y^2$$

$$4y = 1$$

$$y = 0.25$$

Sada imamo $x = |DE| = 1 + y = 1 + 0.25 = 1.25$.

Zadatak (Rješenje će biti objavljeno u sljedećem broju.)

1. Kolika je površina kvadrata $ABCD$ ako su poznate duljine stranica trokuta kao na slici?