Koordinatizacija kvadratne spirale

Aleksandar Hatzivelkos[1]

Tijekom povijesti spirale su često privlačile pažnju matematičara – počevši od Arhimedove spirale, koju je taj slavni grčki matematičar proučavao 300 godina prije nove ere, pa do logaritamske spirale koju je u 17. stoljeću opisao Descartes, a potom intenzivno proučavao Jacob Bernoulli. No ovaj put u središtu naše pažnje neće biti klasična spirala (u smislu neprekidne ravninske krivulje), već diskretna „spirala" koja povezuje točke s cjelobrojnim koordinatama u ravnini.

Iako se takva spirala kao ornament pojavljuje još u dalekoj prošlosti, svoju prvu ozbiljnu matematičku upotrebu dobiva u drugoj polovici 19. stoljeća, kada Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor upravo tu spiralu koristi kako bi opisao bijekciju između skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ i Kartezijevog produkta $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, odnosno posljedično skupa racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$.

Objasnimo o čemu se radi: kako bi dokazao jednaku kardinalnost skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ i skupa racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$, Cantor je iskazao sljedeći teorem: ukoliko postoje injektivne funkcije $f : A \to B$ i $g : B \to A$, tada postoji i bijektivna funkcija $h : A \to B$. Što se kardinalnosti skupova A i B tiče, to znači da egzistencija injekcija f i g dokazuje jednaku kardinalnost tih skupova. Cantor je taj teorem 1887. naveo bez dokaza, no dokaz su 1898. godine pružili (nezavisno jedan od drugoga) Ernst Schröder i Felix Bernstein, tako da je uobičajen naziv za taj teorem Schröder-Bernsteinov teorem. Kasnije se pokazalo kako je Schröderov dokaz sadržavao pogrešku (koja je potom ispravljena). Zanimljivo je da je Dedekind taj teorem dokazao u dva navrata (1887. i 1897.) iako svoje dokaze nikada nije objavio, već su naknadno pronađeni u njegovim osobnim spisima.

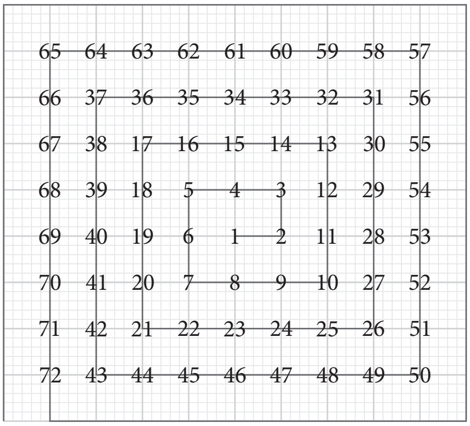
U kontekstu razmatranja kardinalnosti skupa prirodnih i racionalnih brojeva, jasno je kako vrijedi $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, pa je stoga i $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$. Dakle, preostalo je pokazati drugi smjer, tj. da vrijedi $|\mathbb{N}| \geq |\mathbb{Q}|$, odnosno da postoji injekcija $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$. Kvadratna spirala prikazana na Slici 1. opisuje konstrukciju takve injekcije.

Tom spiralom definirana je injekcija sa skupa $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ na skup $\mathbb{N}$. Naime, svake dvije točke s cjelobrojnim koordinatama u ravnini se preslikavaju u različite vrijednosti skupa prirodnih brojeva, pa je riječ o injektivnom preslikavanju. Nadalje, uko-

[1]Aleksandar Hatzivelkos, Veleučilište Velika Gorica

liko sve racionalne brojeve $\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ interpretiramo kao cjelobrojne točke u ravnini s koordinatama (m,n), jasno je kako postoji bijekcija s $\mathbb{Q}$ na pravi podskup skupa $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: svaki racionalni broj može se prikazati kao kombinacija cjelobrojnih koordinata, no u $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ imamo i točke koje ne predstavljaju racionalne brojeve – poput cjelobrojnih točaka na x-osi koje bi u toj reprezentaciji predstavljale razlomke s nulom u nazivniku, ali i točke kod kojih koordinate m i n imaju zajednički djelitelj (te time predstavljaju razlomke koji nisu do kraja skraćeni).

No, u svakom slučaju, injekcija sa skupa $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ na skup $\mathbb{N}$ nužno generira i injekciju sa skupa $\mathbb{Q}$ na skup $\mathbb{N}$, jer je kompozicija bijekcije i injekcije i dalje injektivna funkcija. Time nam preslikavanje koje opisuje kvadratna spirala sa Slike 1. pruža injekciju potrebnu za dokazivanje jednake kardinalnosti skupova $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Q}$.



Slika 1. Namatanje brojevnog pravca prirodnih brojeva na kvadratnu spiralu

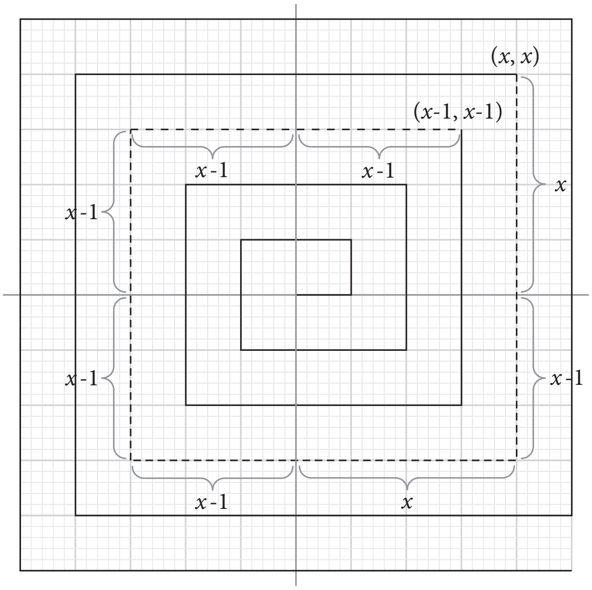
Ista je spirala ponovno došla u središte pažnje 60-ih godina 20. stoljeća. Ovaj put za to je bio zaslužan poljski matematičar Stanislaw Ulam. Prema vlastitim riječima, za „vrijeme jednog dosadnog predavanja" kratio je vrijeme pišući redom prirodne brojeve u kvadratnu spiralu, te uočio zanimljivosti vezane uz pojavu prostih brojeva u takvom prikazu. Ta je tema kasnije bila ekstenzivno proučavana, kako u matematičkim tako i u računalnim znanostima. Upravo zbog toga kvadratna se spirala često naziva i Ulamovom spiralom.

Pa ipak, u fokusu ovog teksta nisu prosti brojevi, već koordinatizacija opisane spirale. Često se u računalnim simulacijama i testiranjima raznih softverskih rješenja koristi upravo kvadratna spirala. Jedno od pitanja na koje se traži odgovor je i pitanje pozicioniranja pojedine točke ravnine s cjelobrojnim koordinatama na brojevni pravac koji se putem kvadratne spirale namotava krećući od ishodišta.

Točnije, koja vrijednost $n \in \mathbb{N}$ na kvadratnoj spirali odgovara točki sa zadanim koordinatama $T(x, y)$?

Pri tome je cilj postići što manju vremensku složenost rješenja, odnosno prezentirati rješenje koje će i za velike vrijednosti parametra n dati odgovor u kratkom vremenskom intervalu. Naravno, matematičarima je prvi interes konstruirati funkciju koja neposredno rješava zadani problem, čime je i vremenska složenost računalnog rješavanja konstantna, tj. zanemariva.

Prvi cilj ovog teksta jest pokazati kako možemo doći do odgovora na to pitanje. Počet ćemo s određivanjem vrijednosti n za točke $T(x,x), x \in \mathbb{N}$, odnosno za cjelobrojne točke sa simetrale prvog kvadranta, pri čemu ćemo s $f(x,y)$ označiti broj n koji se nalazi na kvadratnoj spirali na mjestu točke $T(x,y)$. Tako je, primjerice, $f(2,3) = 32$ (vidi Sliku 1).



Slika 2. Rekurzivni pomak na simetrali prvog kvadranta

Vrijednost funkcije $f(x, x)$ opisat ćemo rekurzivno. Kako bismo se po spirali vratili do prethodne točke na simetrali prvog kvadranta, s koordinatama $(x-1, x-1)$, po spirali trebamo napraviti put duljine $2 \cdot x + 6 \cdot (x-1)$. Odavde slijedi rekurzija:

$$f(x,x) = f(x-1,x-1) + 8x - 6, \qquad f(0,0) = 1.$$

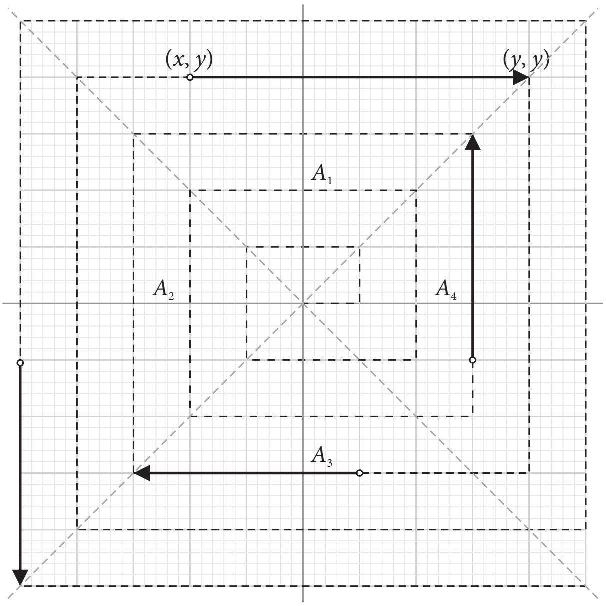
Rješavanjem ove rekurzije lako se dobiva opća formula za točke na dijagonali prvog kvadranta:

$$f(x,x) = 4x^2 - 2x + 1.$$

S druge strane, za točke na simetrali trećeg kvadranta, koje su oblika $T(x, x)$, $x \in \mathbb{Z}$, $x < 0$, vrijednost funkcije $f(x, x)$ možemo prikazati uz pomoć $f(-x,-x)$ na sljedeći način:

$$f(x,x)=f(-x,-x)+4\cdot(-x)=4\cdot(-x)^2-2\cdot(-x)+1-4x=4x^2-2x+1\,.$$

Dakle, funkcija *f* jednaka je za točke na simetralama prvog i trećeg kvadranta. Područje ravnine sada ćemo podijeliti na četiri dijela (A_1, A_2, A_3 i A_4) kojima su granice pravci $|y|=|x|$ (kao na Slici 3.) te ćemo vrijednost funkcije *f* iskazati posebno za svaki od tih dijelova ravnine, uz pomoć rezultata koji smo dobili za točke simetrale prvog i trećeg kvadranta.



Slika 3. Računanje vrijednosti funkcije f(x,y) preko vrijednosti na simetralama 1. i 3. kvadranta

Područja A_1, A_2, A_3 i A_4 definiramo na sljedeći način:

$$A_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 : y\geq |x|\right\},\ A_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 : x<-|y|\right\},$$
$$A_3=\left\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 : y\leq -|x|\right\}\ \text{i}\ A_4=\left\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 : x>|y|\right\}.$$

Za točke $(x,y)\in A_1$ vrijednost funkcije *f* definiramo svođenjem na simetralu prvog kvadranta na sljedeći način:

$$f(x,y)=f(y,y)-(y-x)=4y^2-y-x+1$$

Tako, primjerice, imamo $f(-1,4)=4\cdot 4^2-4+1+1=62$, što odgovara prikazu sa Slike 1. Analogno, postavimo li pomake do simetrale prvog i trećeg kvadranta, i u ostalim slučajevima dobivamo:

$$f(x,y)=f(x,x)+x-y=4x\ \ -x-y+1,\qquad (x,y)\in A$$

$$f(x,y)=f(y,y)+x-y=4y^2-3y+x+1,\quad (x,y)\in A_3$$
$$f(x,y)=f(x,x)-x+y=4x^2-3x+y+1,\quad (x,y)\in A_4.$$

Dakle, tražena funkcija je oblika:

$$f(x,y)=\begin{cases} 4y^2-y-x+1\,, & (x,y)\in A_1 \\ 4x^2-x-y+1, & (x,y)\in A_2 \\ 4y^2-3y+x+1, & (x,y)\in A_3 \\ 4x^2-3x+y+1, & (x,y)\in A_4 \end{cases}$$

Time smo odredili Cantorovu injekciju kojom se neposredno iz zadanih (cjelobrojnih) koordinata ravnine računa prirodan broj pridružen tim koordinatama kroz namatanje polupravca prirodnih brojeva. Na taj se način izbjegava dugotrajno iterativno računanje bilo kroz neku od rekurzija, bilo kroz neposredno izvođenje namotavanja polupravca prirodnih brojeva u kvadratnu spiralu.

Budući da opisana funkcija nije samo injekcija već i bijekcija, sljedeće je prirodno pitanje kako glasi inverz? Na koji način odrediti x i y koordinatu točke na koju će se preslikati neki prirodan broj n?

Tražena funkcija opisana je na više načina. Graham, Knuth i Patashnik su u knjizi *Concrete Mathematics* dali eksplicitno rješenje za obje koordinate [2], dok u *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* nalazimo rekurzivno rješenje Seppa Mustonena za određivanje traženih koordinata [3]. Ovdje ćemo pak predstaviti rješenje Adama Gouchera koje je opisao Dan Pearcy [4].

Ukoliko promotrimo ponašanje koordinata točaka u koje se Cantorovim namotavanjem preslikavaju prirodni brojevi, uočit ćemo neku vrstu ciklusa. Promotrimo, na primjer, niz x-koordinata:

$$0,1,1,0,-1,-1,-1,0,1,2,2,2,2,1,0,-1,-2,-2,-2,-2,-2,-1,\ldots$$

Vidimo da, dok se spirala namotava paralelno s x-osi, x-koordinate rastu ili padaju za 1. No kada se spirala namata paralelno s y-osi, x-koordinata ostaje nepromijenjena.

Označimo (redom) te linijske segmente namotaja s p. Tako sa Slike 1. možemo vidjeti kako je sa $p=1$ označen prvi linijski segment koji se kreće od $n=1$, $p=2$ označava drugi linijski segment koji se kreće od $n=2$, $p=3$ označava treći linijski segment koji se kreće od $n=3$ do $n=4$, i tako dalje. Primjerice, sa $p=7$ označen je linijski segment koji se kreće od $n=13$ do $n=16$. Funkcija koja određuje linijski segment za zadani n dana je s:

$$p(n)=\left\lfloor \sqrt{4n-1} \right\rfloor \tag{1}$$

Primjerice, ukoliko stavimo $n = 14$, slijedi $p = \lfloor \sqrt{53} \rfloor = 7$, u što se možemo uvjeriti na Slici 1. Nadalje, uvedemo i funkciju:

$$q(n) = n - 1 - \left\lfloor \frac{p^2}{4} \right\rfloor \tag{2}$$

Veličina *q* govori nam koja je po redu točka *n* na linijskom segmentu *p*, krećući od nule. Ilustrirajmo to na primjeru točke $n = 14$. Već smo vidjeli kako se ta točka nalazi na sedmom linijskom segmentu spirale, a sa Slike 1. možemo vidjeti kako je ta točka druga po redu na sedmom linijskom segmentu, tj. ako prvu točku označimo s nula, vrijednost od *q* trebala bi biti jedan. I uistinu, $q(14) = 14 - 1 - \left\lfloor \frac{49}{4} \right\rfloor = 13 - \lfloor 12.25 \rfloor = 1$.

Funkcija za određivanje položaja u ravnini točke *n* prilikom namatanja polupravca prirodnih brojeva u kvadratnu spiralu dana je u kompleksnom obliku:

$$z(n) = \left(\left\lfloor \frac{p+2}{4} \right\rfloor + \left(q - \left\lfloor \frac{p+1}{4} \right\rfloor \right) \cdot i \right) \cdot i^{p-2} \tag{3}$$

Kod konstrukcije funkcije $z(n)$ izraz unutar zagrade predstavlja pozicioniranje točke na desnom (vertikalnom) rubu kvadrata odgovarajuće razine; naime, izraz $\left\lfloor \frac{p+2}{4} \right\rfloor$ predstavlja udaljenost *p*-tog linijskog segmenta od ishodišta, odnosno razinu kvadratne spirale na kojoj treba smjestiti točku *n*. S drugom koordinatom točke krenemo od $-\left\lfloor \frac{p+1}{4} \right\rfloor$ (korekcija se ovdje pojavljuje kako ne bi dolazilo do preklapanja rubnih točaka na različitim linijskim segmentima), dodajući joj vrijednost *q*, budući da nam upravo *q* govori koja je po redu ta točka na pripadnom linijskom segmentu. Konačno, budući da se sa svakim novim linijskim segmentom smjer kvadratne spirale zarotira za $90°$, izraz pomnožimo s i^{p-2} jer množenje s imaginarnom jedinicom u geometriji kompleksnih brojeva predstavlja upravo rotaciju za pravi kut (u smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu), a samim kretanjem od desnog vertikalnog linijskog segmenta napravili smo prve dvije rotacije.

Na taj je način jednadžbom (3) dana funkcija koja prirodnom broju *n* pridružuje kompleksni broj *z(n)* čiji su realni i imaginarni dio cjelobrojni, te predstavljaju koordinate točke *n* na Cantorovoj kvadratnoj spirali:

$$x(n) = \mathrm{Re}\left(\left\lfloor \frac{p(n)+2}{4} \right\rfloor \cdot i^{p(n)-2} + \left(q(n) - \left\lfloor \frac{p(n)+1}{4} \right\rfloor \right) \cdot i^{p(n)-1} \right),$$

$$y(n) = \mathrm{Im}\left(\left\lfloor \frac{p(n)+2}{4} \right\rfloor \cdot i^{p(n)-2} + \left(q(n) - \left\lfloor \frac{p(n)+1}{4} \right\rfloor \right) \cdot i^{p(n)-1} \right),$$

gdje su funkcije $p(n)$ i $q(n)$ zadane jednadžbama (1) i (2). Vizualizaciju ove formule u Geogebri (s manjim razlikama budući da je prilagođena kvadratnoj spirali koja kreće u pozitivnom smjeru osi ordinata) možete naći na sljedećoj adresi: https://www.geogebra.org/m/Z6dSZFva

Za kraj provjerimo formulu za $n=32$. Prema Slici 1. ta bi se točka spirale trebala preslikati na točku $(2,3)$. Računamo vrijednosti dane formulama (1) i (2):

$$p(32)=\left\lfloor\sqrt{4\cdot 32-1}\right\rfloor=11, \quad q(32)=32-1-\left\lfloor\frac{121}{4}\right\rfloor=1.$$

Odavde slijedi:

$$z(32)=\left\lfloor\frac{11+2}{4}\right\rfloor\cdot i^9+\left(1-\left\lfloor\frac{11+1}{4}\right\rfloor\right)\cdot i^{10}=2+3i.$$

Sada je $x(32)=\mathrm{Re}(2+3i)=2$, $y(32)=\mathrm{Im}(2+3i)=3$, što je upravo traženi rezultat.

Literatura:

1. Davis, M. *The universal computer: the road from Leibniz to Turing*
2. Graham, R. L., Knuth, D. E., Patashnik, O. *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, chapter 3, Integer Functions, str. 99 (1989.).
3. Mustonen, S., *List of x-coordinates of point moving in clockwise square spiral*, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (2010.), https://oeis.org/A174344
4. Pearcy, D., *An intro to infinite sets: programming in Geogebra*, Teaching Mathematics blog (2012.)
5. Seshia, S., Walrand, J., *Infinity and Countability*, Lecture notes for Discrete Mathematics and Probability Theory at UC Berkeley (2016.)