Primjena Cauchy-Bunjakovski-Schwarzove nejednakosti u radu s nadarenim učenicima

Belma Alihodžić [1]

Zašto neki učenici vole matematiku, a drugi ne vole? Zašto su neki pažljivi na satu, a drugi nisu? Kada bi nastavnik znao odgovore na ova i slična pitanja, mogao bi i utjecati na ponašanje učenika, predvidjeti, spriječiti ili izazvati određeno ponašanje.

Međutim, teško je objasniti ponašanje svakog učenika jer ono ovisi o mnogočemu. Poticanje i motiviranje učenika najznačajniji su faktori koji utječu na njihov odnos prema nastavi matematike.

Interes za učenje matematike potaknut je:

- pravom motivacijom,
- osmišljenim odgojnim metodama,
- primjenom matematike u raznim područjima,
- raznovrsnim i zanimljivim sadržajima,
- aktivnim metodama rada,
- upotrebom nastavnih i tehničkih sredstava te
- stavom i kvalitetom nastavnika.

Nastavnik, njegov stil rada i prije svega njegove ljudske osobine sigurno su među najvažnijim faktorima koji utječu na uspjeh učenika u nastavi matematike.

Navedimo karakteristike dobrog nastavnika:

- voli svoj poziv i ima razvijen interes za matematiku,
- dobro poznaje matematiku kao nastavni predmet i metodiku nastave matematike,
- zna pronaći najbolje metode za obradu pojedinih nastavnih sadržaja,
- shvaća teškoće učenika i zna ih motivirati za učenje,
- nastoji učenike zainteresirati i kod njih razviti stvaralačko matematičko mišljenje,

[1] Alihodžić, Belma, Prva bošnjačka gimnazija, Sarajevo, BIH

- kod učenika pobuđuje i razvija inventivnost u rješavanju zadataka,
- nastoji učenike naučiti i naviknuti da dokazuju tvrdnje,
- na osnovi rješavanja konkretnog zadatka pronalazi i otkriva opću metodu,
- dovoljno je strpljiv kako bi učenicima omogućio da samostalno otkriju što više činjenica,
- pravilno se koristi pločom, piše i crta pregledno i uredno,
- prati i proučava stručno-metodičku literaturu.

Sposobnosti i sklonosti za matematiku počinju se pokazivati uglavnom u višim razredima osnovne škole. U nižim se razredima osnovne škole ne bi još moglo govoriti o talentima, već samo o više ili manje izraženim posebnim sposobnostima i sklonostima.

Identifikacija nadarenih učenika za matematiku otkriva se:

- procjenjivanjem osobina učenika (nastavnik, roditelj, voditelji klubova),
- procjenjivanjem duhovnih i materijalnih uradaka učenika (originalni radovi, praktični radovi, nagrade na natjecanjima, članstvo u znanstvenim udruženjima i sl.).

Rad s nadarenom djecom podrazumijeva posebne programe i aktivnosti usklađene s njihovim potrebama i potencijalima.

> *"Malo odluka o obrazovanju koje utječu na program za rad s matematički nadarenim učenicima ima toliku važnost kao što je odluka o izboru nastavnika za ovaj posao."*
>
> (Clark, 1983.)

Dokazivanje nejednakosti zahtijeva dobro znanje iz elementarne matematike i poznavanje što većeg broja poznatih nejednakosti, jer u dokazu jedne nejednakosti često treba primijeniti više poznatih nejednakosti.

Mnoge nejednakosti koje se pojavljuju na natjecanjima različitih razina iz matematike mogu se relativno lako dokazati primjenom Cauchy-Bunjakovski-Schwarzove nejednakosti. Nejednakost Cauchy-Bunjakovski-Schwarz[2], koju nije teško objasniti učenicima, tema je ovoga članka. Nakon što nastavnik formulira ovu nejednakost i pokaže njenu primjenu, sposobniji i snalažljiviji učenici moći će je primjenjivati već u sljedećem zadatku.

Nejednakost oblika

$$\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)^2\le\left(a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+\ldots+a_n^{\,2}\right)\cdot\left(b_1^{\,2}+b_2^{\,2}+\ldots+b_n^{\,2}\right),$$

odnosno

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\le\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^{\,2}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^{\,2}\right),$$

[2] Ubuduće ćemo ovu nejednakost kraće nazivati CBS nejednakost.

gdje su $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ i $b=(b_1,b_2,...,b_n)$ nizovi realnih brojeva, s jednakošću ako i samo ako su nizovi a i b proporcionalni, zove se **Cauchy-Bunjakovski-Schwarzova nejednakost.** U [1] je dano šest dokaza CBS nejednakosti s tri posljedice.

Poznato je da CBS nejednakost igra važnu ulogu u različitim granama moderne matematike, uključujući i funkcionalnu analizu, vjerojatnost i statistiku, realnu i kompleksnu analizu, numeričku analizu, teoriju diferencijalnih jednadžbi i slično. Posvetit ću se primjeni CBS nejednakosti u algebri, geometriji, trigonometriji, jednadžbama i sustavima jednadžbi, kao i u određivanju ekstremnih vrijednosti u algebri i geometriji.

Primjena Cauchy-Bunjakovski-Schwarzove nejednakosti u algebri za dvije i tri varijable

Zadatak 1. Neka su x i y realni brojevi, takvi da je $4x+5y=1$. Treba pokazati da je tada

$$x^2+y^2\geq\frac{1}{41}.$$

Rješenje: Pomoću CBS nejednakosti za $n = 2$ dobit ćemo

$$1=(4x+5y)^2\leq(4^2+5^2)\cdot(x^2+y^2)=41\cdot(x^2+y^2),$$

a odavde

$$x^2+y^2\geq\frac{1}{41}.$$

Jednakost vrijedi za $x=\frac{4}{41}$ i $y=\frac{5}{41}$, što se dobije rješavanjem sustava jednadžbi:

$$\frac{4}{x}=\frac{5}{y},$$
$$4x+5y=1.$$

Zadatak 2. Neka su $a,b,c\in[-\frac{1}{4},\infty)$ takvi da je $a+b+c=1$. Treba dokazati da vrijedi nejednakost

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\leq\sqrt{21}.$$

Rješenje: Pomoću CBS nejednakosti dobit ćemo:

$$\begin{aligned}\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} &\leq \sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{4a+1}\right)^2+\left(\sqrt{4b+1}\right)^2+\left(\sqrt{4c+1}\right)^2}\\ &= \sqrt{3}\cdot\sqrt{4a+4b+4c+3}\\ &= \sqrt{3}\cdot\sqrt{3+4(a+b+c)}\\ &= \sqrt{3}\cdot\sqrt{7} = \sqrt{21}.\end{aligned}$$

Jednakost vrijedi za $a = b = c = 1/3$.

Primjena Cauchy-Bunjakovski-Schwarzove nejednakosti u geometriji

Kod primjene Cauchy-Bunjakovski-Schwarzove nejednakosti u geometriji pristupi rješenjima su različiti, a temelje se na mnogim bitnim činjenicama iz geometrije kao što su sukladnost, sličnost, površina trokuta, Pitagorin teorem itd.

Zadatak 1. Neka su *a, b* duljine kateta, a *c* duljina hipotenuze pravokutnog trokuta. Treba dokazati da vrijedi nejednakost

$$ab+bc+ca<2c^2.$$

Rješenje: Prema CBS nejednakosti i činjenici da je $c^2=a^2+b^2$, dobivamo:

$$(ab+bc+ca)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+a^2)$$

$$=(a^2+b^2+c^2)=(c^2+c^2)^2=(2c^2)^2,$$

odakle slijedi da je $ab+bc+ca\leq 2c^2$. Primijetimo da u prethodnoj nejednakosti ne može stajati znak jednakosti jer trojke (a,b,c) i (b,c,a) nisu proporcionalne. Naime, kada bi one bile proporcionalne, postojao bi neki realan broj m takav da je

$$a = mb, \qquad b = mc, \qquad c = ma.$$

Tada bismo imali

$$c^2=m^2a^2=m^2\left(m^2b^2\right)=m^4b^2=m^4\left(m^2c^2\right)=m^6c^2.$$

Odatle bi slijedilo da je $m = 1$, a onda c = a, što bi bilo u kontradikciji s Pitagorinim teoremom. Dakle, vrijedi stroga nejednakost.

Zadatak 2. Neka su *a,b,c* duljine stranica, a t_a,t_b,t_c redom duljine težišnica trokuta ΔABC. Treba dokazati da vrijedi nejednakost

$$at_a+bt_b+ct_c\leq\frac{\sqrt{3}}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Rješenje: Prema CBS nejednakosti je

$$\left(at_a+bt_b+ct_c\right)^2\leq\left(a^2+b^2+c^2\right)\left({t_a}^2+{t_b}^2+{t_c}^2\right).$$

Budući da vrijedi

$${t_a}^2+{t_b}^2+{t_c}^2=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right),$$

onda je

$$\left(at_a+bt_b+ct_c\right)^2\leq\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2,$$

odakle slijedi

$$at_a+bt_b+ct_c\leq\frac{\sqrt{3}}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\frac{a}{t_a}=\frac{b}{t_b}=\frac{c}{t_c}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, a to je ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

Primjena Cauchy-Bunjakovski-Schwarzove nejednakosti u trigonometriji

Kako trigonometrija ima vrlo veliku primjenu u pojedinim granama matematike, nismo je mogli zaobići ni kod Cauchy-Bunjakovski-Schwarzove nejednakosti.

Zadatak 1. Ako su α, β, y kutovi trokuta ΔABC, treba dokazati da vrijedi nejednakost:

$$\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\sin\beta}+\sqrt{\sin\gamma}\le 3\cdot\sqrt[4]{\frac{3}{4}}.$$

Rješenje: Koristeći CBS nejednakost dobivamo:

$$\left(1\cdot\sqrt{\sin\alpha}+1\cdot\sqrt{\sin\beta}+1\cdot\sqrt{\sin\gamma}\right)^2\le\left(1^2+1^2+1^2\right)\cdot\left[\left(\sqrt{\sin\alpha}\right)^2+\left(\sqrt{\sin\beta}\right)^2+\left(\sqrt{\sin\gamma}\right)^2\right],$$

odnosno

$$\left(\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\sin\beta}+\sqrt{\sin\gamma}\right)^2\le 3\cdot\left(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\right)$$

ili

$$\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\sin\beta}+\sqrt{\sin\gamma}\le\sqrt{3\left(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\right)}.$$

S obzirom da je

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

dobivamo:

$$\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\sin\beta}+\sqrt{\sin\gamma}\le\sqrt{3\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}}=3\cdot\sqrt[4]{\frac{3}{4}}.$$

Zadatak 2. (Mađarska, 1963.) Treba dokazati da za $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ vrijedi nejednakost

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)>5.$$

Rješenje: Pomoću nejednakosti CBS za $n = 2$, stavljajući da je

$$a_1=1,\ a_2=\frac{1}{\sqrt{\sin\alpha}},\ b_1=1,\ b_2=\frac{1}{\sqrt{\cos\alpha}},$$

zbog $0<\sin 2\alpha<1$, tj. $\frac{1}{\sin 2\alpha}>1$, imamo:

$$\left(1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{\sin\alpha}}\right)^2\right)\cdot\left(1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{\cos\alpha}}\right)^2\right) \ge \left(1+\frac{1}{\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha}}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{\sqrt{\frac{\sin 2\alpha}{2}}}\right)^2$$

$$\ge \left(1+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)^2 = \left(1+\sqrt{2}\right)^2 > 5.$$

Napomena: Iz dokaza se vidi da je broj $3+2\sqrt{2}$ minimum danog izraza. Jednakost $\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)=3+2\sqrt{2}$ vrijedi za $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

Primjena Cauchy-Bunjakovski-Schwarzove nejednakosti kod rješavanja jednadžbi i sustava jednadžbi

Ovdje ćemo pokazati kako se pomoću CBS nejednakosti mogu uspješno riješiti razne jednadžbe te sustavi jednadžbi, koji bi se mnogo teže riješili na neki drugi način. Evo tih zadataka.

Zadatak 1. Treba naći sva realna rješenja sustava

$$x^2+y^2=1$$

$$z^2+t^2=4$$

$$xt+yz\ge 2\,.$$

Rješenje: Koristeći nejednakost Cauchy-Bunjakovski-Schwarza za n = 2, tj.

$$\left(a_1b_1+a_2b_2\right)^2\le\left(a_1{}^2+a_2{}^2\right)\left(b_1{}^2+b_2{}^2\right),$$

gdje su $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$, imamo:

$$4\le\left(xt+yz\right)^2\le\left(x^2+y^2\right)\left(t^2+z^2\right)=4.$$

Odavde slijedi da mora vrijediti jednakost. U nejednakosti CBS vrijedi jednakost ako je $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$, tj. u našem slučaju:

$$\frac{t}{x}=\frac{z}{y}=k\,,\quad \text{tj. } t=kx,\ z=ky.$$

Sada iz jednakosti dobivamo:

$$k\left(x^2+y^2\right)=2$$

pa je $k = 2$. Dakle, (x, y, z, t) rješenja su danog sustava ako i samo ako imaju oblik $(x, y, 2y, 2x)$, pri čemu je $x^2 + y^2 = 1$. To su rješenja oblika

$$\left(x, y, z, t\right) = \left(\cos\alpha, \sin\alpha, 2\sin\alpha, 2\cos\alpha\right),$$

gdje je $\alpha \in \left[0, 2\pi\right]$. Zaista,

$$x^2 + y^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$

$$z^2 + t^2 = 4\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha = 4\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) = 4,$$

$$xt + yz = 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha = 2\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) = 2\ .$$

Napomena 1: Gore navedeni zadatak bio je na kantonalnom natjecanju (Kanton Sarajevo) za učenike srednjih škola 2010. godine u kategoriji četvrtih razreda.

Zadatak 2. Treba naći sva realna rješenja sustava jednadžbi

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14$$

$$x + 2y + 3z = 14\ .$$

Rješenje: Ovdje se radi o rješavanju sustava dviju nelinearnih jednadžbi s tri nepoznanice. Upotrijebit ćemo nejednakost CBS za $n = 3$. Stavljajući da je

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, b_1 = x, b_2 = y, b_3 = z,$$

dobivamo da je

$$\left(1\cdot x + 2\cdot y + 3\cdot z\right)^2 \le \left(1^2 + 2^2 + 3^2\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right),$$

odnosno

$$\left(x + 2y + 3z\right)^2 \le 14\left(x^2 + y^2 + z^2\right),$$

te zbog uvjeta $x + 2y + 3z = x^2 + y^2 + z^2 = 14$ imamo

$$14^2 \le 14^2.$$

Kako jednakost u CBS vrijedi ako i samo ako su nizovi proporcionalni, slijedi da je $\frac{1}{x} = \frac{2}{y} = \frac{3}{z}$, što iz uvjeta $x + 2y + 3z = 14$ daje $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, što je i rješenje danog sustava jednadžbi.

Primjena Cauchy-Bunjakovski-Schwarzove nejednakosti u algebarskim nejednakostima za određivanje minimuma i maksimuma u algebri i geometriji

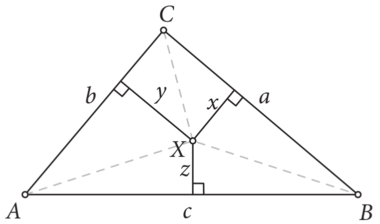
Problemi maksimuma i minimuma ne javljaju se samo u znanosti i tehnologiji te njihovim primjenama, nego i u svakodnevnom životu. Raznolikost ovih problema najčešće je geometrijske prirode. Naći najkraći put između dvaju objekata koji zadovoljavaju neki uvjet ili naći figuru minimalnog opsega, površine ili obujma tipični su problemi koje često susrećemo. Nije neobično da čujemo da su neki ljudi bili zaokupljeni nekim ovakvim problemom duže vremena.

Na primjer, Heronovo je otkriće da zraka svjetlosti u prostoru koja polazi iz točke A i dolazi u točku B poslije refleksije od ogledala α prijeđe najkraći mogući put od A do B imajući zajednički položaj s α.

Slijedeći problem je tzv. problem figura jednakog opsega, koji je razmatrao Descartes[3]: npr. od svih ravnih figura sa zadanim opsegom, potrebno je naći onu s najvećom površinom. Ta „perfektna figura" koja je rješenje problema bila je kružnica, što je Descartes znao, moguće i mnogo ranije. Međutim, točan dokaz ovog problema prvi je dao Jakob Steiner u 19. stoljeću.

Malo drugačiji problem figura zadanog opsega pripisuje se Didoni, legendarnoj kraljici Kartage. Njoj je lokalno stanovništvo dopustilo da kupi zemljište na obali Afrike, „ne veće od onoga što volovska koža može okružiti." Rezanjem volovske kože na uske trake ona je napravila dugi niz kojim je trebala okružiti što veću površinu na morskoj obali. Kako ovo napraviti na optimalan način? Jedno od rješenja lako je naći ako znamo maksimalan opseg kruga.

Zadatak 1. Za bilo koju točku X unutar trokuta ΔABC neka su x, y i z udaljenosti točke X od pravaca BC, AC i AB redom. Treba naći položaj točke X za koji je zbroj $x^2+y^2+z^2$ minimalan.



Slika 1.

Rješenje: Označimo s $|BC|=a, |CA|=b, |AB|=c$. Tada je površina trokuta ΔABC jednaka zbroju površina trokuta ΔAXB, ΔAXC, ΔBXC, tj. $P_1=\frac{ax}{2}, P_2=\frac{by}{2}, P_3=\frac{cz}{2}$, odnosno,

$$P=P_1+P_2+P_3=\frac{ax}{2}+\frac{by}{2}+\frac{cz}{2} \,/\cdot 2$$

$$2P=ax+by+cz$$

$$4P^2=(ax+by+cz)^2\leq\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right),$$

zbog nejednakosti CBS. Odatle je

$$x^2+y^2+z^2\geq\frac{(ax+by+cz)^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{4P^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

[3]René Decartes, 1596. – 1650.

Prema tome, zbroj $x^2+y^2+z^2$ biti će minimalan za svaku točku X za koju vrijedi $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$. Dakle,

$$\min\left(x^2+y^2+z^2\right)=\frac{4P^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Zadatak 2. Odredi najveću i najmanju vrijednost funkcije $f(x)=x\left(2009+\sqrt{2011-x^2}\right)$ u njenoj prirodnoj domeni.

Rješenje: Dana funkcija definirana je na intervalu $\left[-\sqrt{2011},\sqrt{2011}\right]$, tj. za

$$-\sqrt{2011}\le x\le\sqrt{2011}.$$

Da bismo odredili maksimalnu vrijednost, pretpostavimo da je $x > 0$. Koristeći nejednakost CBS i AG nejednakost, dobivamo:

$$f(x)=x\left(\sqrt{2009}\cdot\sqrt{2009}+1\cdot\sqrt{2011-x^2}\right)$$

$$\le x\left(\sqrt{2010}\sqrt{2009+2011-x^2}\right)$$

$$\le\sqrt{2010}\,\frac{x^2+4020-x^2}{2}=2010\cdot\sqrt{2010}.$$

Jednakost vrijedi za $x=\sqrt{2010}$, tako da je

$$\max f(x)=2010\cdot\sqrt{2010}\quad\text{i}\quad\min f(x)=-2010\cdot\sqrt{2010}.$$

Cilj ovoga članka bio je Cauchy-Bunjakovski-Schwarzovu nejednakost što više približiti nadarenim učenicima, ali i njihovim profesorima koji se do sada možda nisu susretali s njom u ovom obliku. Iako ova nejednakost omogućava da se na jednostavan i elegantan način riješi veliki broj zadataka, u praksi se pokazalo da vrlo malo profesora srednjih škola obrađuje ovu temu na satima dodatne nastave matematike. Nadam se da će ovaj članak o Cauchy-Bunjakovski-Schwarzovoj nejednakosti i njenoj širokoj primjeni pokazati da je opravdano ovaj sadržaj izabrati kao temu za intenzivnu obradu s učenicima srednje škole koji pokazuju veći interes za matematiku i sudjeluju na raznim matematičkim natjecanjima.

Literatura:

1. Alihodžić, B., *Nejednakosti u nastavi matematike za nadarene učenike: Koši-Bunjakovski-Švarcova nejednakost*, Sarajevo, 2013.
2. Andreescu, T., Mushkarov, O., Stoyanov, L., *Geometric Problems on Maxima and Minima*, Birkhäuser Basel-Boston-Berlin, 2006.

3. Arslanagić, Š., *Aspekti nastave matematike za nadarene učenike srednjoškolskog uzrasta*, Udruženje matematičara Bosne i Hercegovine, Sarajevo, 2001.
4. Arslanagić, Š., *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.
5. Arslanagić, Š., Bencze, M., *A mathematical problem book*, Grafičar promet
6. Arslanagić, Š., Glogić, I., *Zbirka riješenih zadataka sa takmičenja iz matematike učenika srednjih škola u Federaciji BiH (1995. – 2008.)*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2009.
7. Arslanagić, Š., Milošević, D., *Neki problemi i napomene o nejednakostima trougla*, Zbornik radova, Građevinski fakultet Mostar, 2/1998, 56-57.
8. Bottema, O., Đorđević, R.Ž., Janić, R.R., Mitrinović, D.S.,Vasić, P.M., *Geometric inequalities*, Wolters - Noordhoff Publishing, Groningen, The Netherlands, 1969.
9. Ilišević, I., *Primjena Cauchy-Shwarz-Buniakowskyjeve nejednakosti u geometriji*, Osječki matematički list 5(2005.),77-84.
10. Kadelburg, Z., Đulić, D., Lukić, M., Matić, I., *Nejednakosti*, Materijali za mlade matematičare, Sveska 42, Beograd, 2003.
11. Krečmar, V. A., *Zadačnik po algebre*, Moskva, 1964.
12. Kurepa, S., *On the Buniakowsky-Cauchy-Schwarz inequality*, Glasnik Matematički, serija III, 1 (21), 147-158, 1966.
13. Mitrinović, D.S., *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1970.
14. Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E., Fink, A.M., *Classical and New inequalities in Analysis*, Kluwer Academica Publishers, Dordrecht, The Natherlands, 1993.
15. Moiseev, E. G., *Zadač M. 1150*, Časopis „Kvant", SSSR, 7, 1989, 34.
16. Nelson, D., *Dictionary of mathematics edited by David Nelson*, New edition, 1989.
17. Pečarić, J.E., *Nejednakosti, Hrvatsko matematičko društvo*, Mala matematička biblioteka, Br. 6, Element, Zagreb, 1996.
18. Polya, G., *Kako ću riješiti matematički zadatak*, Školska knjiga, Zagreb, 1966.
19. Steele, J. M., *The Cauchy-Schwarz Master Class*, Cambridge University press, 2004.
20. Titu Andreescu and Harazi, *Notes on algebraic inequalities*, Birkhäuser, 2000.