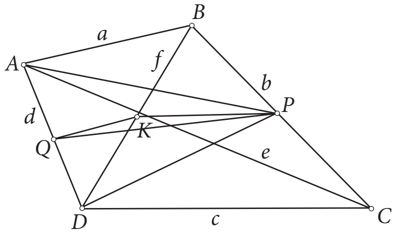
Tri teorema za konveksne četverokute

Šefket Arslanagić[1], Daniela Zubović[2]

U ovom radu ćemo dokazati tri zanimljiva teorema koji vrijede za konveksne četverokute. Pri tome ćemo za dokaz drugog teorema koristiti prvi. Prvi teorem glasi:
Teorem 1. Neka je *ABCD* konveksni četverokut čije su duljine stranica *a*, *b*, *c*, *d* i duljine dijagonala *e* i *f*. Tada vrijedi nejednakost:

$$e^2+f^2 \le b^2+d^2+2ac\ . \tag{1}$$

Dokaz: Neka su točke *P* i *Q* središta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$.



Promatrajmo trokute ΔABC i ΔBCD čije su težišnice $\overline{AP}$ i $\overline{DP}$. Imamo poznate formule za duljine težišnica trokuta:

$$\left|AP\right| \ =-\left(2a^2+2e^2-b^2\right) \tag{2}$$

i

$$\left|DP\right|^2=\frac{1}{4}\left(2c^2+2f^2-b^2\right). \tag{3}$$

Slično, za težišnicu $\overline{PQ}$ trokuta ΔPAD imamo:

$$\left|PQ\right|^2=\frac{1}{4}\left[2\left|AP\right|^2+2\left|PD\right|^2-d^2\right],$$

a odavde zbog (2) i (3):

$$4\left|PQ\right|^2=a^2+c^2-\left(b^2+d^2\right)+e^2+f^2\ . \tag{4}$$

Neka je točka K središte dijagonale $\overline{BD}$; imamo $\left|KP\right|=\frac{c}{2}$ i $\left|KQ\right|=\frac{a}{2}$.

Za trokut ΔKPQ vrijedi da je $\left|KP\right|+\left|KQ\right|\ge\left|PQ\right|$, tj.

[1]Šefket Arslanagić, Sarajevo
[2]Daniela Zubović, Sarajevo

$$|PQ| \le \frac{a+c}{2},$$

a odavde je

$$4|PQ|^2 \le (a+c)^2 = a^2 + 2ac + c^2 . \qquad (5)$$

Sada iz (4) i (5) dobivamo:

$$a^2 + c^2 - \left(b^2 + d^2\right) + e^2 + f^2 \le a^2 + 2ac + c^2 ,$$

a odavde je

$$e^2 + f^2 \le b^2 + d^2 + 2ac ,$$

što je nejednakost (1), q.e.d.

Drugi teorem odnosi se na tetivni četverokut. Napomenimo da su u tetivnom četverokutu nasuprotni kutovi suplementarni i da za njega vrijedi Ptolemejev teorem:

$$ac + bd = ef . \qquad (6)$$

Teorem 2. Za tetivni četverokut $ABCD$ vrijedi nejednakost:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \ge e^2 + f^2 + \left(e - f\right)^2 . \qquad (7)$$

Dokaz: U Teoremu 1. dokazali smo da vrijedi nejednakost

$$b^2 + d^2 + 2ac \ge e^2 + f^2 .$$

Potpuno analogno dokazuje se da vrijedi i nejednakost:

$$a^2 + c^2 + 2bd \ge e^2 + f^2 .$$

Nakon zbrajanja ovih dviju nejednakosti dobivamo zbog (6):

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\left(ac + bd\right) \ge 2\left(e^2 + f^2\right), \text{ tj.}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \ge e^2 - 2ef + f^2 + e^2 + f^2$$

ili

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \ge e^2 + f^2 + \left(e - f\right)^2 ,$$

a ovo je nejednakost (7), q.e.d.

Teorem 3. (Eulerov teorem). Za konveksni četverokut *ABCD* vrijedi sljedeća jednakost:

$$4|EF|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 - |AC|^2 - |BD|^2 , \qquad (8)$$

gdje su točke *E* i *F* središta dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$.

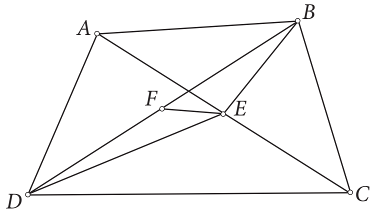
Dokaz: Dužine $\overline{DE}$, $\overline{BE}$ i $\overline{EF}$ težišnice su trokuta ΔADC, ΔABC i ΔDEB. Imamo poznate formule:

$$|DE|^2 = \frac{1}{4}\left(2|DA|^2 + 2|CD|^2 - |AC|^2\right),$$

$$|BE|^2 = \frac{1}{4}\left(2|AB|^2 + 2|BC|^2 - |AC|^2\right),$$

i

$$|EF|^2 = \frac{1}{4}\left(2|BE|^2 + 2|DE|^2 - |BD|^2\right).$$



Uvrštavanjem formula za $|DE|^2$ i $|BE|^2$ u $|EF|^2$ dobivamo:

$$|EF|^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\left(2|AB|^2 + 2|BC|^2 - |AC|^2\right) + \frac{1}{2}\left(2|DA|^2 + 2|CD|^2 - |AC|^2\right) - |BD|^2\right], \text{ tj.}$$

$$4|EF|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 - |AC|^2 - |BD|^2,$$

a ovo je jednakost (8), q.e.d.

Posljedica: Budući da je $|EF|^2 \geq 0$, slijedi iz (9):

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 \geq |AC|^2 + |BD|^2.$$

Ako je $E \equiv F$, tj. ako se dijagonale četverokuta $ABCD$ raspolavljaju, tada je četverokut $ABCD$ paralelogram. Budući da je tada $|EF| = 0$, dobivamo iz (8):

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = |AC|^2 + |BD|^2.$$

Napomena: Može se pokazati da ovaj teorem vrijedi i za nekonveksne četverokute.

Literatura:

1. Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
2. A. Marić, *Planimetrija - Zbirka riješenih zadataka*, Element, Zagreb, 1996.
3. O.T. Pop, N. Minculete, M. Bencze, *An introduction to quadrilateral geometry*, Editura Didactica si Pedagogica, Bucuresti (Romania), 2013.