

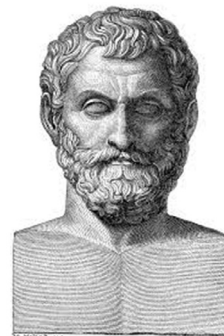
Filozofija i matematika

SANJA SRUK¹

Filozofija matematike grana je filozofije koja postavlja pitanja što je matematika i kako se koristi, te istražuje metodologiju matematike i ulogu matematike u ljudskome životu. Još od davnih vremena matematika i filozofija usko su povezane i međusobno se isprepliću. Filozofske ideje često su pokretale razvoj matematičkih disciplina ili usmjeravale istraživanja u određenom pravcu, dok je matematika bila izvor mnogih filozofskih pitanja i ideja. Mnogi filozofi bili su i matematičari, mnogi matematičari zadužili su filozofiju.

Sve je počelo u Grčkoj

Talesa iz Mileta (6. st. pr. Krista) smatra se prvim filozofom i ocem znanosti. Postavio je temeljno filozofsko pitanje: *Što je prapočelo svijeta, što nadživljuje svaku promjenu, iz čega sve proizlazi i u što se sve vraća?* U svojim pokušajima racionalne interpretacije isključuje nadnaravna i božanska bića i Aristotel ga smatra utemeljiteljem filozofije prirode. Ništa od njegovih radova nije sačuvano, ali je poznato da je za boravka u Egiptu primjenom sličnosti izmjerio visinu Keopsove piramide te bogata egipatska znanja iz geometrije prenio u Grčku. Poznat je i po poučku o obodnom kutu nad promjerom kružnice, iako ga nije formalno dokazao.



Slika 1. Tales

Ni od **Pitagorinih** (6. st. pr. Kr.) radova ništa nije sačuvano, no njega se smatra prvim pravim matematičarom. Najpoznatiji je po Pitagorinom poučku, iako je taj poučak bio poznat Babiloncima gotovo 1000 godina prije Pitagore. Osnivač je poznate Pitagorejske škole čije je djelovanje bilo obavijeno velom tajnovitosti. Za matematiku ga je zainteresirao upravo Tales, a temeljno područje njegova interesa bio je pojam broja, i to prirodnoga broja. Tvrdio je da se svi odnosi u prirodi mogu prikazati pomoću omjera prirodnih brojeva. Zbog toga je pitagorejcima prilično šokantno bilo otkriće nesumjerljivih dužina i iracionalnih brojeva. Njegovo i pitagorejsko filozofsko poimanje svijeta vodilo se načelom suprotnosti od kojih je sastavljen svijet. Smatra da duša ima samostalnost, da se pokreće i reinkarnira dok ne dođe do potpunog očišćenja.

¹Sanja Sruck, I. gimnazija, Zagreb

U 5. st. pr. Kr. **Platon**, Sokratov učenik i Aristotelov učitelj, osniva *Akademiju*, jednu od prvih organiziranih škola koja je radila sve do 529. godine. U toj visokoj filozofskoj školi osim filozofije poučavala se i geometrija koju je Platon iznimno cijenio, te aritmetika, trigonometrija i astronomija; školovanje se plaćalo i trajalo je deset godina. U svom najznačajnijem djelu *Država* opisuje svoje učenje o idejama. Prema njemu, svijet osjetila je slika ili sjena svijeta ideja, a najveća od svih je ideja dobra. Na njegovim shvaćanjima temelji se matematički realizam (platonizam), pravac u filozofiji matematike prema kojemu matematika postoji odvojeno od našega svijeta, a ljudi je nisu izumili, nego ju samo otkrivaju i istražuju pokretanjem sjećanja na svijet ideja u kojemu su boravili između ljudskih inkarnacija.

Na prijelazu iz 4. u 3. st. pr. Kr., u vrijeme kada je **Euklid** napisao svoje *Elemente*, geometrija je bila na svom vrhuncu, pa su se počeli pojavljivati i prvi filozofski problemi geometrije. Geometrija opisuje svijet u kojemu živimo, a Euklid definira točku kao „ono što nema dijelova”. Međutim, svijet se ne može sastojati od nečega što nema dijelova. Jesu li točke samo ideje u našoj svijesti? Ili su točke predmeti koji se ne mogu opažati? Ta pitanja, koja su zapravo pitanja o istinitosti geometrije, ponovo su postala aktualna pojavom neeuklidskih geometrija. Je li istinita svaka geometrija koja je neproturječna? Slična pitanja pojavljivala su se i u drugim granama matematike, preispitivalo se značenje i istinitost matematičkih iskaza, postavljalo se pitanje prirode matematičkoga znanja i utjecaja toga znanja na stvarnost. Matematičar, dakako, može odlučiti ne zamarati se tim pitanjima i nastaviti svoj rad, ali pitanja ostaju. Filozofi ih ne mogu dokazati kao teoreme, niti ih mogu empirijski potvrđivati, već su filozofska stajališta zapravo opredjeljenja za koja postoje ljudski razlozi, racionalni ili emocionalni.

17. i 18. stoljeće

Nagli razvoj matematike započinje u 17. stoljeću. **René Descartes** (1596. – 1650.), francuski filozof i matematičar, u svojoj *Raspravi o metodi* kritizira dotadašnju filozofiju i znanstvene misli. Navodi metode pravilnog spoznavanja:

1. Sve promatrati kritički i kao istinu uzeti samo ono što se jasno i razgovjetno uočava (*clare et distincte*).
2. Svaki problem podijeliti u više dijelova da bi se lakše došlo do rješenja.
3. Zaključke izvoditi od jednostavnog prema složenom.
4. Uvijek provjeriti nije li nešto izostavljeno.



Slika 2. René Descartes

Kao uspješan primjer primjene tih metoda navodi upravo geometriju koja se temelji na najjednostavnijim i očiglednim istinama. U filozofskim gledištima zastupa racionalizam, smatra da se objektivna stvarnost može spoznati samo mišljenjem i da je istina neovisna o osjetilnim opažanjima (poznata je njegova izreka: *Mislim, dakle*

jesam), a u matematici je značajan kao utemeljitelj analitičke geometrije koja geometrijske probleme svodi na algebarske. On je uveo koordinatni sustav, pojam varijable, a poznao je i Eulerovu formulu o vezi između broja vrhova, bridova i strana poliedra, samo ju nije dokazao.

Neovisno o Descartesu, analitičku je geometriju otkrio i **Pierre de Fermat** (1601. – 1665.), zbog čega su se njih dvojica posvađali, naročito oko problema nalaženja tangente na krivulju u zadanoj točki te određivanja minimuma i maksimuma. Fermat, koji je poznat po tome da je svoje izračune pisao po marginama knjiga, poznat je i po tzv. „Posljednjem (velikom) Fermatovom teoremu”, gdje tvrdi da ne postoje tri prirodna broja a , b i c koji bi zadovoljili jednadžbu $a^n + b^n = c^n$ ako je n prirodan broj veći od 2. Zanimljivost je u tome da je na margini Diofantove *Aritmetike* napisao kako ima dokaz ovog teorema, ali zbog opsežnosti on ne stane na marginu. Matematičari su stoljećima tražili dokaz i u traženju došli do nekih drugih važnih matematičkih otkrića. Neke parcijalne slučajeve dokazali su Euler, Lamé, Dirichlet, Legendre i Marie Sophie Germain, jedna od rijetkih znamenitih matematičarki, a tek je 1995. potpuni dokaz pomoću eliptičkih krivulja, modularnih formi i Galoisovih reprezentacija dao britanski matematičar Andrew Wiles.



Slika 3. Blaise
Pascal

Blaise Pascal (1623. – 1662.), francuski filozof, matematičar i fizičar, protivi se Descartesovom razmišljanju i naglašava kako tek na području osjećaja nestaju granice između sumnje i sigurnosti koje muče racionalnog čovjeka. U matematici je najznačajniji kao začetnik teorije vjerojatnosti, kada je riješio problem koji mu je postavio prijatelj, kockar De Méré, a koji glasi: *Isplati li se kladiti da će u 24 bacanja para kocaka bar jednom pasti dvostruka šestica?*, ali također se bavio i teorijom brojeva, konusnim presjecima, infinitezimalnim računom, itd., dok njegovo ime nosi i trokut binomnih koeficijenata.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646. – 1716.) još jedno je u nizu imena ljudi koji su se istakli i u filozofiji i u matematici. Razvija teoriju *monada* koju su začeli pitagorejci, a po kojoj se čitav svemir sastoji od beskonačnog broja jednostavnih čestica (*monada*) koje su suština svega. Veliki je vjernik i smatra da je Bog prapočelo svega, *monas monadum*, apsolutno savršeno biće, čije je postojanje „dokazao” principom dovoljnog razloga koji govori da sve mora imati neki uzrok. Njegovo pitanje: *Zašto postoji nešto, a ne ništa?* Heidegger je nazvao temeljnim pitanjem metafizike jer je to pitanje bitka. Zajedno s Isaacom Newtonom začetnik je diferencijalnog i integralnog računa. I njih dvojica žestoko su se sukobila oko prvenstva toga otkrića i krađe ideja, a kasnije se taj sukob pretvorio u rat njihovih sljedbenika.



Slika 4. Gottfried
Wilhelm Leibniz

Immanuel Kant (1724. – 1804.) jedan je od najznačajnijih filozofa koji su obilježili 18. stoljeće. Bio je veoma zainteresiran za fiziku i metafiziku, posebno za Newtonova djela. Temelj Newtonove fizike je pretpostavka po kojoj prostor nije svojstvo materije, već joj prethodi. Kant prihvaća tu ideju, ali ne prihvaća postojanje praznoga beskonačnog euklidskog prostora. Kant govori i o razlici analitičkoga i sintetskoga znanja, a to su upravo najčešće dvije vrste pristupa matematičkim problemima. Kod analitičkih iskaza samo njihovo razumijevanje dovoljno je da se utvrdi istinitost, dok je kod sintetskih potrebno još nešto treće (*tertium quid*) što tu sintezu omogućuje, a to je iskustvo. O tome govori u svojoj *Kritici čistog uma* koja, uz *Kritiku praktičnog uma* i *Kritiku rasudne snage*, čini trilogiju koja daje odgovore na pitanja *Što mogu znati?*, *Što trebam činiti?* i *Čemu se mogu nadati?*, odnosno *Što je čovjek?*

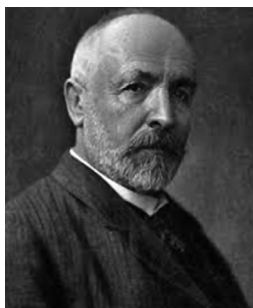
Svakako treba spomenuti i Dubrovčanina **Ruđera Boškovića** (1711. – 1787.). Bio je matematičar, astronom, fizičar, geodet, filozof i isusovac, a Werner Heisenberg, fizičar i nobelovac, nazvao ga je hrvatskim Leibnizom. Područje njegova interesa beskonačno su male veličine, logaritmi, trigonometrija, a u fizici sile i kretanje. Izveo je četiri osnovne jednačbe diferencijalne trigonometrije, razvija teoriju čunjosječnica (konika), smatra se začetnikom teorije fraktala, a u svojoj raspravi *De aestu maris* prvi govori o neeuklidskoj geometriji. Prethodnik je relativističkog pogleda na svijet jer smatra da apsolutni prostor i vrijeme ne možemo spoznati, već možemo govoriti samo o relativnom prostoru i vremenu. Najznačajnije Boškovićevo djelo je *Teorija prirodne filozofije*; on u filozofiju uvodi koncept determinizma prije Laplacea, govori o sveznajućem duhu koji zna svu prošlost, sadašnjost i budućnost.



Slika 5. Josip Ruđer Bošković

19. i 20. stoljeće

U 19. stoljeću počinje se razvijati matematička logika čiji je utemeljitelj **George Boole** (1815. – 1864.). Značajna imena u ovom području su i Augustus de Morgan, Richard Dedekind, Ernst Schröder i mnogi drugi. **Frank P. Ramsey** (1903. – 1930.) britanski je filozof, matematičar i ekonomist koji je unatoč veoma kratkom životu dao veliki doprinos u svim područjima kojima se bavio. S austrijskim filozofom **Ludwigom Wittgensteinom** (1889. – 1951.) diskutira o matematici i filozofiji. Wittgenstein je jedan od najutjecajnijih filozofa 20. stoljeća, najviše proučava filozofiju jezika, a temelj svega nalazi upravo u logici. Filozofsko gledište da se matematika može izvesti iz logike naziva se logicizam. To gledište zastupaju i **Bertrand Russell** (1872. – 1970.) i **Alfred North Whitehead** (1861. – 1947.). U svome zajedničkom djelu *Principia Mathematica* govore da se zakoni logike prema zakonima matematike odnose kao aksiomi prema teoremima. Osim filozofijom, logikom i matematikom, Russell se bavio i poviješću, a 1950. godine dobio je Nobelovu nagradu za književnost. Poznat je njegov paradoks o skupu svih skupova koji nisu svoji elementi. To je samo jedan



Slika 6. Georg Cantor

u nizu paradoksa teorije skupova, čiji je utemeljitelj **Georg Cantor** (1845. – 1918.). On je dokazao da je skup \mathbb{R} brojniji od skupa \mathbb{N} i uveo transfinitne brojeve (ili alef-brojeve), brojeve koji označavaju veličinu nekog beskonačnog skupa. Postojanje takvih brojeva potpuno odbacuju pristaše teorije intuicionizma (primjerice **Henry Poincaré** (1854. – 1912.), čija su filozofska stajališta prilično bliska Kantovim), kao što su brojni paradoksi teorije skupova poljuljali realističko shvaćanje matematike koje je, između ostalih, zastupao i **Gottlob Frege** (1848. – 1925.), pa se počinju razvijati novi pravci u filozofiji matematike, kao što su formalizam (predstavnik ove struje je **David Hilbert** (1862. – 1943.), konvencionalizam, strukturalizam, konstruktivizam i njegov ekstremni oblik finitizam, koji prihvaća samo konačne matematičke objekte, dakle ne prihvaća ideju beskonačnih skupova (glavni je predstavnik je **Leopold Kronecker** (1823. – 1891.)) te razne spoznajne teorije. Zbog razlike u shvaćanjima Kronecker se sukobio s Cantorom i odbio objaviti Cantorove radove u časopisu *Crelle's Journal* u kojemu je bio jedan od urednika, tako da su Cantorovi radovi objavljeni tek nakon intervencije njegovog prijatelja, njemačkog matematičara Richarda Dedekinda. Kroneckerov učenik, filozof **Edmund Husserl** (1859. – 1938.), utemeljio je filozofski pravac fenomenologiju, učenje o strukturama iskustva i svijesti. Studirao je matematiku, fiziku i astronomiju, a u svome djelu *Filozofija aritmetike* analizira temelje matematike s psihološkog stajališta, uz tezu da se svijet konstruira u aktima namjerne svijesti. Njegovo učenje nastavio je **Martin Heidegger** (1889. – 1976.) koji je zbog svoje filozofije egzistencijalizma postao jedan od najhvaljenijih filozofa 20. stoljeća, ali zbog sklonosti nacizmu i jedan od najkritiziranijih.

Budućnost filozofije matematike

Jedno je sigurno – filozofske ideje i shvaćanja svijeta i matematike mijenjale su se kroz povijest, a mijenjat će se i dalje. Jednom dokazani, matematički teoremi i matematičke istine ostaju zauvijek. Ali u prirodi čovjeka je da propituje, promišlja i istražuje, pa će matematika i filozofija i dalje biti povezane.

Osim što je u nastavi matematike vrlo važno učenicima ukazivati na prisutnost i konkretnu upotrebu matematike u drugim prirodnim predmetima, korisno je istaknuti i povezanost s umjetnošću i filozofijom. Te male digresije neće nam oduzeti dragocjeno vrijeme, nego oplemeniti nastavu i obogatiti znanje učenika.

Literatura:

1. Brückler, F. M., *Matematički dvoboji*, Školska knjiga, Zagreb, 2011.
2. Gleizer, G.I., *Povijest matematike za školu*, Školske novine i HMD, Zagreb, 2003.
3. Kron, A., *Filozofija matematike*, Beograd, Matematika broj 4 (1972.) i Matematika broj 3 (1973.)
4. Šikić, Z., *Filozofija matematike*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.
5. https://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page, biografski podaci o filozofima i matematičarima