O 370. obljetnici dokaza divergencije harmonijskoga reda

Ivica Vuković[1], Anđa Valent[2], Tonko Pale[3]

Harmonijska sredina

Vjerojatno nema učenika ili studenta koji barem jednom nije računao svoju srednju ocjenu koju kolokvijalno nazivamo „prosjekom", a riječ je o aritmetičkoj sredini. Općenito, ako su a_1, a_2 ..., a_n pozitivni brojevi, izraz

$$A(a_1, a_2, ..., a_n) = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

naziva se aritmetičkom sredinom tih brojeva.

Ovaj izraz toliko je u svakodnevnoj uporabi da se pojam *sredina* često poistovjećuje s aritmetičkom sredinom, što ponekad dovodi do netočnog zaključka. Primjerice, uz pretpostavku da su mjesta A i B međusobno udaljena 180 km i da vozač iz A u B vozi brzinom od 90 km/h, a pri povratku iz B u A istim putom brzinom od 60 km/h, postavlja se pitanje kolika je srednja brzina vozača na cjelokupnom putu od A do B i natrag u A. Mnogima bi prvi odgovor bio (90 + 60)/2 km/h odnosno 75 km/h. Pogrješno! Prema zadanim podatcima, vozač je iz mjesta A u B vozio 2 sata, a pri povratku 3 sata. Ukupni put od 360 km prevalio je za 5 sati, što daje srednju brzinu od 72 km/h. Srednja brzina na cijelom putu je omjer duljine prevaljenoga puta i ukupnog vremena vožnje, odnosno

$$\frac{2 \cdot 180}{\frac{180}{90} + \frac{180}{60}} = \frac{2}{\frac{1}{90} + \frac{1}{60}}.$$

Ovaj se izraz naziva harmonijskom sredinom brojeva 90 i 60. Općenito se za dva pozitivna broja a_1 i a_2 harmonijskom sredinom tih brojeva naziva broj

$$H = \frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}}.$$

[1]Ivica Vuković, Tehničko veleučilište u Zagrebu
[2]Anđa Valent, Tehničko veleučilište u Zagrebu
[3]Tonko Pale, Tehničko veleučilište u Zagrebu

Harmonijska sredina od n pozitivnih brojava a_1, a_2 ..., a_n definirana je izrazom:

$$H(a_1, a_2, ..., a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}.$$

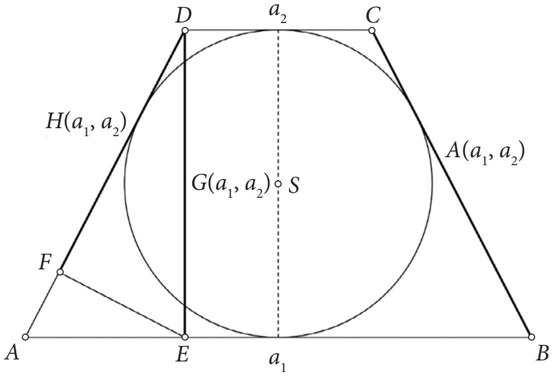
Uz ove dvije sredine, aritmetičku i harmonijsku, uvodi se i geometrijska sredina od n pozitivnih brojava a_1, a_2 ..., a_n:

$$G(a_1, a_2, ..., a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}.$$

Odnos među ovim sredinama je $A(a_1, a_2, ..., a_n) \geq G(a_1, a_2, ..., a_n) \geq H(a_1, a_2, ..., a_n)$, pri čemu znak jednakosti vrijedi ako i samo ako su svi brojevi a_1, a_2 ..., a_n međusobno jednaki. Dokaz ove važne tvrdnje uvršten je u većinu udžbenika o nejednakostima.

Aritmetička, geometrijska i harmonijska sredina dvaju pozitivnih brojeva $a_1 > a_2 > 0$ daju se zorno geometrijski predočiti pomoću tangencijalnog istokračnog trapeza čije su duljine osnovica a_1 i a_2.

Aritmetička sredina duljina osnovica jednaka je duljini kraka toga trapeza, što je očita posljedica činjenice da je u svakom tangencijalnom četverokutu zbroj duljina nasuprotnih stranica jednak.



Slika 1. Geometrijski prikaz aritmetičke, geometrijske i harmonijske sredine dvaju brojeva

Geometrijska sredina osnovica jednaka je promjeru upisane kružnice, što se jednostavno pokaže primijeni li se Pitagorin poučak na trokut AED, odakle je

$$(d(D,E))^2 = (d(A,D))^2 - (d(A,E))^2 = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 = a_1 a_2.$$

Dakle, $d(D,E) = 2r = \sqrt{a_1 a_2}$.

Pokažimo sada da je harmonijska sredina duljina osnovica jednaka projekciji visine trapeza na krak.

Trokuti *AED* i *FED* međusobno su slični pa za duljine njihovih stranica vrijedi:

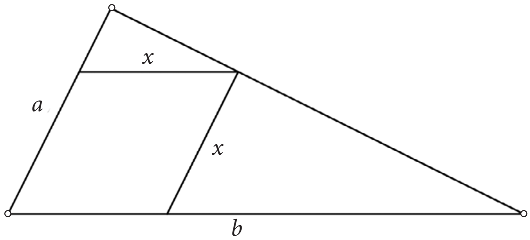
$$d(A,D):d(D,E) \quad d(D,E):d(F,D)\,.$$

Odatle je

$$d(F,D)=\frac{(d(D,E))^2}{d(A,D)}=\frac{\left(\sqrt{a_1a_1}\right)^2}{\frac{a_1+a_2}{2}}=\frac{2a_1a_2}{a_1+a_2}=\frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}.$$

Dakle, duljina projekcije $\overline{FD}$ visine $\overline{DE}$ na krak $\overline{AD}$ jednaka je harmonijskoj sredini osnovica trapeza.

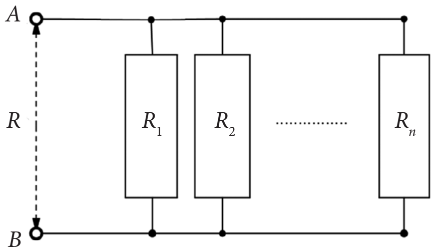
Navedimo nekoliko primjera u kojima se javlja harmonijska sredina. U trokutu sa susjednim stranicama a i b upisan je romb stranice x. Poluopseg toga romba jednak je harmonijskoj sredini stranica a i b.



Slika 2. Romb upisan u trokut

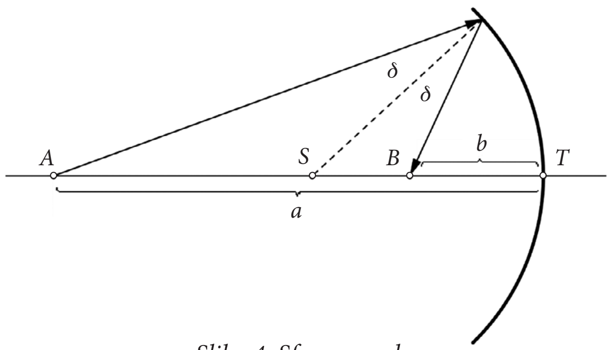
U sustavu paralelno spojenih otpornika ukupni otpor R jednak je

$R=\dfrac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\ldots+\frac{1}{R_n}}$, tj. iznosi $1/n$ njihove harmonijske sredine.



Slika 3. Sustav paralelno spojenih otpornika

Promotrimo sferno zrcalo na slici. Za polumjer r vrijedi $r=H(a,b)=\dfrac{2ab}{a+b}$.



Slika 4. Sferno zrcalo

Harmonijski niz brojeva

Aritmetički niz realnih brojeva je niz u kojemu je svaki član, osim prvoga, jednak zboju prethodnog člana i konstante d koja se naziva diferencija niza. Geometrijski niz je niz u kojemu je svaki član, osim prvoga, jednak umnošku prethodnog člana i konstante q koja se naziva kvocijent niza. Ekvivalentno se oba niza mogu definirati i pomoću aritmetičke, odnosno geometrijske sredine. Niz u kojemu je svaki član, osim prvoga, jednak aritmetičkoj sredini prethodnog i sljedećeg člana, tj. $a_n = (a_{n-1} + a_{n+1})/2,\ n > 1$, naziva se aritmetičkim nizom. Slično se geometrijski niz može uvesti kao niz u kojemu je svaki član, osim prvoga, jednak geometrijskoj sredini prethodnog i sljedećag člana, tj. $a_n = \sqrt{a_{n-1}\,a_{n+1}},\ n > 1$.

Ovo je motivacija za uvođenje pojma harmonijskog niza s odgovarajućim svojstvom. Za zadane pozitivne brojeve $a > b$, niz $a_1 = a,\ a_2 = b,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$ za koji vrijedi

$$a_n = \frac{2}{\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}},\ n > 1,$$

naziva se harmonijskim nizom. Uz ove oznake dobiva se

$$a_3 = \frac{ab}{2a-b},\ a_4 = \frac{ab}{3a-2b},\ a_5 = \frac{ab}{4a-3b},\ \ldots,\ a_n = \frac{ab}{(n-1)a-(n-2)b},\ \ldots \tag{1}$$

Za $a = 1$ i $b = \frac{1}{2}$ dobiva se najpoznatiji harmonijski niz $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots,$ koji se obično koristi kao model konvergentnog niza pri uvođenju pojma granične vrijednosti niza.

Neka su $\frac{1}{n},\ \frac{1}{n+1}$ i $\frac{1}{n+2}$ tri uzastopna člana harmonijskog niza. Lako je provjeriti da je $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+1} = \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$. Iz ove jednakosti neposredno slijedi da je

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}>\frac{2}{n+1} \text{ ili } \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}>\frac{3}{n+1}.$$

Dakle, zbroj bilo koja tri uzastopna člana harmonijskog niza veći je od trostrukog srednjeg člana. Ovo svojstvo vrijedi i za svaki harmonijski niz oblika (1).

Harmonijski red

Beskonačnim redovima zanimali su se još starogrčki matematičari. No njihova su se razmatranja doticala samo geometrijskih redova. Primjerice, Zenonov paradoks dihotomije povezan je s beskonačnim redom

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots,$$

a Arhimed je našao ploštinu paraboličkog segmenta sumiranjem reda

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots=\frac{4}{3}.$$

Prvi primjer beskonačnoga reda, a da nije geometrijski, javlja se tek u srednjem vijeku. U svojoj knjizi *Liber calucationum*, pisanoj oko 1350., Richard Swineshead[4], ne bez razloga prozvan *Calculator*, pokazao je (tada uobičajenom, duljom verbalnom i ponešto zakučastom argumentacijom, bez matematičke notacije) da vrijedi

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\ldots=2.$$

Redovima se bavio i francuski filozof i prirodoslovac Nicole Oresme[5] (Nikola iz Oresmea ili latinizirano Nicolaus Oresmius, oko 1320. – 1382.). Geometrijskim je postupkom i sam pokazao spomenuti Swinesheadov rezultat. Danas ga se pamti po tome što je prvi pokazao divergenciju harmonijskog reda $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$

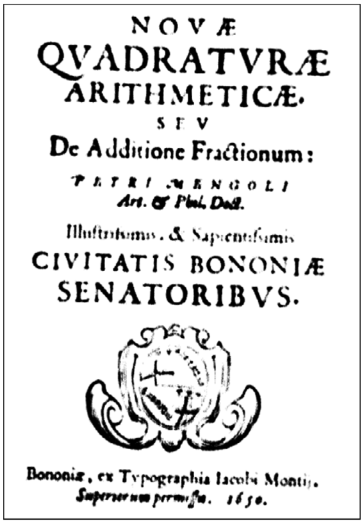
Njegov je postupak identičan onomu koji je kasnije dao Leibniz i koji se prikazuje u ovome članku.

Mengolijev dokaz

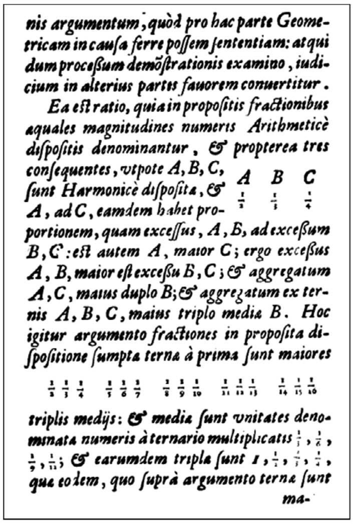
Talijanski matematičar Pietro Mengoli (1626. – 1686.) u knjizi *Novae quadraturae arithmeticae* (Nove aritmetičke kvadrature), objavljenoj u Bologni 1650., dao je prvi sustavni matematički dokaz divergencije harmonijskog reda. Osim toga, pokazao je da odgovarajući alternirani red konvergira, i to broju ln 2, a prvi je upotrijebio

[4]Richard Swineshead (također poznat kao Suiseth) engleski je matematičar i prirodoslovac iz XIV. stoljeća. Jedan je od prvih učenjaka koji je primijenio matematiku u fizici. Vrlo je malo pouzdanih podataka o njegovu životu.
[5]Osim bavljenja matematikom, Nicole Oresme prevodio je Aristotelova etička, politička i prirodoslovna djela, a poznat je i kao ekonomski teoretičar. Zbog svoje učenosti imenovan je biskupom u Lisieuxu.

termin *prirodni logaritam*. O njegovu prodrijetlu ne zna se gotovo ništa, a ni godina rođenja nije pouzdana – negdje se navodi da je rođen 1625. Mengoli je bio Cavalierijev učenik na sveučilištu u Bologni, na kojem je postigao dva doktorata, iz filozofije te iz građanskog i kanonskog prava. Nakon Cavalierijeve smrti naslijedio ga je na istom sveučilištu gdje ostaje do kraja života. Predavao je aritmetiku, mehaniku i matematiku, a uz to je bio i župnik u crkvi svete Marije Magdalene u Bologni. Suvremeni povjesničari matematike ocjenjuju da je Mengoli utjecao na Newtona, a posebno na Leibniza, koji je čitao njegova djela.



Slika 5. Naslovnica Mengolijeve knjige



nis argumentum, quòd pro hac parte Geometricam in causa ferre possem sententiam: atqui dum processum demõstrationis examino, iudicium in alterius partis fauorem conuertitur.

Ea est ratio, quia in propositis fractionibus æquales magnitudines numeris Arithmeticè dispositis denominantur, & propterea tres consequentes, vtpote A, B, C, sunt Harmonicè disposita, & A, ad C, eamdem habet proportionem, quam excessus, A, B, ad excessum B, C: est autem A, maior C; ergo excessus A, B, maior est excessu B, C; & aggregatum A, C, maius duplo B; & aggregatum ex ternis A, B, C, maius triplo mediæ B. Hoc igitur argumento fractiones in proposita dispositione sumpta terna à prima sunt maiores

$$A\ \tfrac{1}{2}\quad B\ \tfrac{1}{3}\quad C\ \tfrac{1}{4}$$

$$\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{4}\quad \tfrac{1}{5}\ \tfrac{1}{6}\ \tfrac{1}{7}\quad \tfrac{1}{8}\ \tfrac{1}{9}\ \tfrac{1}{10}\quad \tfrac{1}{11}\ \tfrac{1}{12}\ \tfrac{1}{13}\quad \tfrac{1}{14}\ \tfrac{1}{15}\ \tfrac{1}{16}$$

triplis medijs: & media sunt vnitates denominata numeris à ternario multiplicatis $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}$; *& earumdem tripla sunt* $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, *quæ eodem, quo suprà argumento terna sunt ma-*

Slika 6. Stranica na kojoj Mengoli pojašnjava osnovnu ideju svoga dokaza

Mengolijev dokaz divergencije temelji se na svojstvu harmonijskog reda po kojemu je zbroj triju uzastopnih članova veći od trostrukog srednjeg člana. Promatramo sljedeću parcijalnu sumu harmonijskoga reda:

$$1+\underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{3\,\check{c}lana}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{13}\right)}_{9\,\check{c}lanova}+\underbrace{\left(\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{40}\right)}_{27\,\check{c}lanova}$$

Zbroj članova u prvoj zagradi veći je od 1:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>3\cdot\frac{1}{3}=1\,. \tag{2}$$

Promatramo sada zboj članova u drugoj zagradi. Iz

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}>3\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2} \tag{3}$$

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}>3\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{3} \tag{4}$$

$$\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}>3\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{4} \tag{5}$$

zbrajanjem nejednakosti (3), (4) i (5) dobiva se

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{13}>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1\,. \tag{6}$$

Ovim se postupkom pokazuje i sljedeća nejednakost:

$$\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{30}>\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{13}>1 \tag{7}$$

Označimo sa S_m parcijalnu sumu prvih m članova harmonijskoga reda. Prema (2), (6) i (7) vrijedi $S_{1+3}>2$, $S_{1+3+9}>3$, $S_{1+3+9+27}>4$. Može se pokazati da $S_{1+3+3^2+\ldots+3^n}>n+1$.

Prema tome, niz parcijalnih suma S_m neograničeno raste kad $m\to\infty$, iz čega slijedi da je harmonijski divergentan.

Zapravo je divergentan svaki harmonijski red oblika čiji su članovi oblika (1):

$$a+b+\frac{ab}{2a-b}+\frac{ab}{3a-2b}+\ldots+\frac{ab}{(n-1)a-(n-2)b}+\ldots,\ \text{gdje je}\ a>b>0.$$

Parcijalnu sumu prvih n članova reda ovoga reda pišemo u obliku:

$$\begin{aligned}S_n&=a+b+\frac{ab}{2a-b}+\frac{ab}{3a-2b}+\ldots+\frac{ab}{(n-1)a-(n-2)b}\\&=a+b+\frac{b}{2-\frac{b}{a}}+\frac{b}{3-2\frac{b}{a}}+\ldots+\frac{b}{(n-1)-(n-2)\frac{b}{a}}\end{aligned}$$

Očito vrijedi

$$\frac{1}{2-\frac{b}{a}} > \frac{1}{2},\ \frac{1}{3-\frac{b}{a}} > \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{(n-1)-(n-2)\frac{b}{a}} > \frac{1}{n-1}.$$

Dakle, $S_n > a + b\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)}\right)$. Kako je pokazano, izraz u zagradi neograničeno raste kad $n \to \infty$.

Mengolijev dokaz uvrstio je u svoj udžbenik *Uvod u višu analizu* Ž. Marković. Osim metodičke vrijednosti, pa i umjetničke razine jezika, ovaj udžbenik obiluje nizom povijesnih podataka o razvoju matematičkih pojmova i shvaćanja. Uz ovaj dokaz, Marković navodi:

To je odkriće Mengolia palo u zaborav, pa je Jakob Bernoulli objavio dva nova dokaza g. 1689., od kojih prvi potječe od brata mu Ivana, No čini se iz bilježaka filozofa i matematika G. W. Leibniza, jednoga od osnivača više analize, da je on g. 1673. znao za divergenciju toga reda. (*Uvod u višu analizu*, Zagreb 1945., str. 86.)

Neki autori smatraju da je Mengolijevu *padanju u zaborav* pridonio i njegov teško razumljivi stil pisanja na latinskom jeziku.

Dokaz divergencije na osnovi definicije

Prema definiciji, red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentan ako je konvergentan pripadni niz parcijalnih suma: $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, ..., $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, ...

Pretpostavimo sada da je niz parcijalnih suma harmonijskoga reda konvergentan, tj. da postoji $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, gdje je S konačan pozitivan broj.

Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji n_0 tako da za svaki $n > n_0$ vrijedi $S - S_n < \varepsilon$. Uzmimo bilo koji $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Tada iz očite nejednakosti $S_{2n} < S$ (niz S_n je rastući) imamo $S_{2n} - S_n < S - S_n$, odnosno $S_{2n} - S_n < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

Međutim, vrijedi

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Dobivena kontradikcija opovrgava pretpostavku o konvergenciji niza parcijalnih suma S_n i time je pokazano da harmonijski red nije konvergentan, tj. da je divergentan.

Ovaj se dokaz mogao provesti na isti način uzme li se da $\varepsilon < \frac{k-1}{k}$, gdje je k bilo koji prirodni broj veći od 1. Tada bismo imali $S_{kn} - S_n < \varepsilon < \frac{k-1}{k}$.

Međutim,

$$S_{kn} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{k\cdot n} > \underbrace{\frac{1}{k\cdot n} + \frac{1}{k\cdot n} + \ldots + \frac{1}{k\cdot n}}_{(k-1)n} = (k-1)n\cdot\frac{1}{k\cdot n} = \frac{k-1}{k}.$$

Opet dolazi do kontradikcije koja opovrgava početnu pretpostavku o konvergenciji.

Leibnizov dokaz divergencije

Nakon što je stoljećima Oresmeov rezultat glede harmonijskoga reda bio zaboravljen, Leibniz je dao svoj dokaz koji je u osnovi jednak onome Oresmeovom. Osnovna ideja je sljedeća. Promatra se zbroj od n uzastopnih članova harmonijskoga reda:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}. \tag{8}$$

Niti jedan od pribrojnika u (8) nije manji od $\frac{1}{2n}$, vrijedi

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > n\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \tag{9}$$

Na osnovi (9), za svaku parcijalnu sumu harmonijskoga reda koja sadrži prvih 2^{n+1} članova, vrijedi

$$S_{2^{n+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^n+1} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}}\right) > (n+2)\cdot\frac{1}{2}.$$

Iz dobivenog je očito da niz parcijalnih suma neograničeno raste kad n raste. Time je pokazana divergencija harmonijskoga reda.

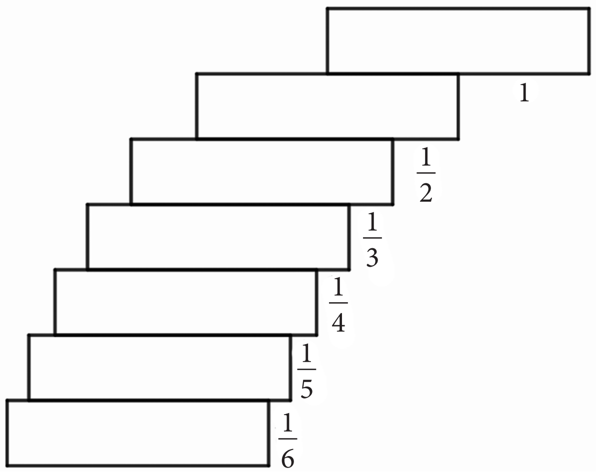
Danas je ovaj dokaz, iz metodičkih razloga obično malo više *raspisan*, standardni dio gotovo svakog uvodnog udžbenika više matematike.

Pomnije uvođenje harmonijskoga reda ima svoje metodičko opravdanje. Na ovom pojmu, kao svojevrsnom modelu, učenik će razumjeti koncept nužnog uvjeta konvergencije reda (opći član harmonijskoga reda očito teži nuli) i nedovoljnost toga istog uvjeta (harmonijski red ipak divergira). Osim toga, harmonijski se red može i zorno vizualizirati.

Isto tako, harmonijski je red zoran primjer u kojemu dva standardna postupka ispitivanja konvergencije redova s pozitivni članovima, D'Alembertov i Cauchyjev kriterij, ne daju odgovor.

Ispitivanje *sporosti* divergencije reda može se predočiti i pomoću računala, programske petlje. Štoviše, u mnogim se udžbenicima osnova programiranja među uvodnim zadatcima nalazi i onaj o računanju najmanjeg broja n za koji je $1+1/2+1/3+...+1/n>a$, gdje je a unaprijed zadani pozitivan broj. Tako se pokaže da je potrebno zbrojiti prvih 12 367 članova harmonijskog reda da bi njihov zbroj premašio 10.

Divergencija harmonijskog reda može se ilustrirati još jednim zornim primjerom. Slažu li se homogene i identične domino pločice, kao na Sl. 7., može se postići luk po volji velikoga raspona jer će težište takvoga sustava pločica padati unutar najdonje pločice.



Slika 7. Luk sastavljen od domino pločica

Uvijek je u nastavi matematike korisno odškrinuti vrata prema otvorenim, još uvijek neriješenim problemima. Ovdje je to moguće napomenom kako je Euler (1635. ili 1640.) pokazao da $S_n = 1+1/2+1/3+...+1/n$ raste kao ln n u smislu da postoji konstanta γ takva da $S_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$, gdje ε_n teži nuli kad $n \to \infty$. Broj γ naziva se *Eulerova* ili *Euler-Mascheronijeva konstanta* i iznosi $\gamma = 0{,}577...$ Još uvijek je ovoreno pitanje je li γ iracionalan broj.