Sferna geometrija na Lénártovoj sferi

Vedrana Mikulić Crnković[1] i Ivona Traunkar[2]

Sažetak

U članku su prikazani osnovni objekti geometrije na sferi: točke, dužine, pravci. Koristeći Lénártovu sferu dat će se poseban naglasak na odnos pravaca u sfernoj ravninskoj geometriji te usporedba sferne i euklidske ravninske geometrije.

Ključne riječi: *sferna ravnina, pravac, trokut*

Sferna geometrija jedna je od geometrija u kojoj ne vrijedi Aksiom o paralelama.

Neka je T točka koja ne pripada pravcu p. Tada postoji jedinstveni pravac q koji sadrži točku T i ima prazan presjek s pravcem p.

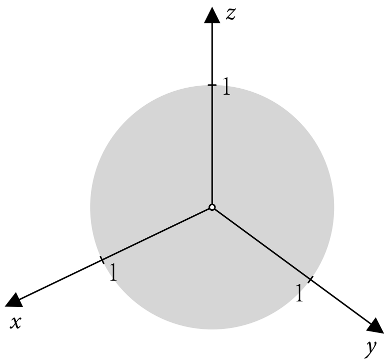
U sfernoj se ravnini svaka dva pravca sijeku. U nastavku rada ćemo uvesti model sferne ravnine u kojemu ćemo istražiti još neka svojstva sfrene ravnine te ih usporediti s tvrdnjama euklidske ravninske geometrije.

1. Osnovni pojmovi sferne ravninske geometrije i usporedba s euklidskom ravninskom geometrijom

Model u kojem prikazujemo točke, pravce i geometrijske likove u euklidskoj ravninskoj geometriji je Kartezijev ravninski koordinatni sustav. Točke, pravce, geometrijske likove u sfernoj ravninskoj geometriji prikazujemo na jediničnoj sferi[3] **S** u trodimenzijskome prostoru sa središtem u ishodištu koordinatnog prostornog sustava.

Točka sferne ravnine je točka sfere **S**.

Pravac sferne ravnine je takozvana velika kružnica na sferi, a to je kružnica polumjera duljine 1, odnosno kružnica čije je središte u središtu sfere.



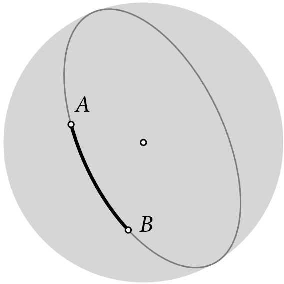
Slika 1. Jedinična sfera

[1]Vedrana Mikulić Crnković, Odjel za matematiku Sveučilišta u Rijeci
[2]Ivona Traunkar, Odjel za matematiku Sveučilišta u Rijeci
[3]Jedinična sfera je sfera polumjera duljine 1.

Kružnica sferne ravnine je kružnica polumjera duljine manje od 1, takozvana mala kružnica na sferi.

Primjer 1. Istaknemo li na površini Zemljine kugle paralele i meridijane, onda je ekvator pravac sferne ravnine, dok su sve ostale paralele kružnice. Svi meridijani su velike kružnice, dakle pravci sferne ravnine.

Kao i u euklidskoj ravnini, za svake dvije različite točke sferne ravnine A i B koje nisu simetrične s obzirom na ishodište (zovemo ih *antipodalne točke*), postoji jedinstveni pravac koji ih sadrži. Taj pravac (velika kružnica) na sferi određuje dva kružna luka između točaka A i B. *Dužina* $\overline{AB}$ je onaj kraći luk. *Udaljenost* točaka A i B duljina je dužine $\overline{AB}$, odnosno duljina kraćeg kružnog luka određenog točkama A i B.



Slika 2. Dužina u sfernoj ravinini

U sljedećoj tablici navedena je usporedba modela euklidske i sferne ravinske geometrije.

Euklidska ravnina	Sferna ravnina
točka (u koordintnom sustavu)	točka na sferi
pravac	velika kružnica na sferi
kružnica	mala kružnica na sferi
dužina $\overline{AB}$	kraći kružni luk između točaka A i B koji pripada pravcu određenom točkama A i B

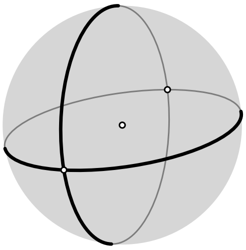
2. Odnos između dvaju pravaca u sfernoj ravnini

Znamo da u euklidskoj ravnini za dva različita pravca p i q vrijedi jedna od sljedeće dvije tvrdnje.

– Pravci p i q sijeku se u jedinstvenoj točki.

– Pravci p i q su paralelni.

U sfernoj ravnini svaka se dva različita pravca p i q sijeku u točno dvije antipodalne točke zato što se svake dvije velike kružnice sijeku u dvije antipodalne točke.



Slika 3. Odnos dvaju pravaca

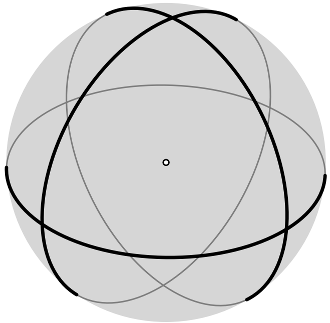
3. Zajednička okomica dvaju pravaca

U euklidskoj ravnini dva različita pravca imaju zajedničku okomicu ako i samo ako su oni paralelni te ih imaju beskonačno mnogo. U sfernoj ravnini svaka dva pravca imaju jedinstvenu zajedničku okomicu. Konstrukcija se temelji na sljedećih par koraka.

Neka su dani pravci sferne ravnine p i q koji se sijeku u točkama P i Q.

1. Točke P i Q dijele svaki od pravaca p i q na dva kružna luka jednakih duljina.
2. Za svaki od četiri kružna luka treba odrediti točku koja ga dijeli na dva dijela jednake duljine. Označimo te točke s A, B, C, D.
3. Tražena okomica velika je kružnica koja sadrži točke A, B, C, D.

Drugim riječima, tražena okomica na pravce p i q je ona velika kružnica koja sadrži sve točke koje su jednako udaljene od točaka P i Q.



Slika 4. Zajednička okomica dvaju pravaca

Primjer 2. Uzmimo za pravce p i q dva različita meridijana. Oni se sijeku u dvije točke: sjevernom i južnom polu. Zajednička okomica pravaca p i q velika je kružnica koja sadrži sve točke koje su jednako udaljene od sjevernog i južnog pola, odnosno ekvator.

4. Trokut i kut

Neka su A, B, i C točke sferne ravnine koje ne pripadaju jednom pravcu. Dužine $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ određuju trokut.

Svaka dva različita pravca sferne ravnine sijeku se i određuju četiri kuta.

Neka su p i q dva različita pravca sferne ravnine koja se sijeku u točki S. *Veličinu kuta* $\angle pSq$ računamo na sljedeći način.

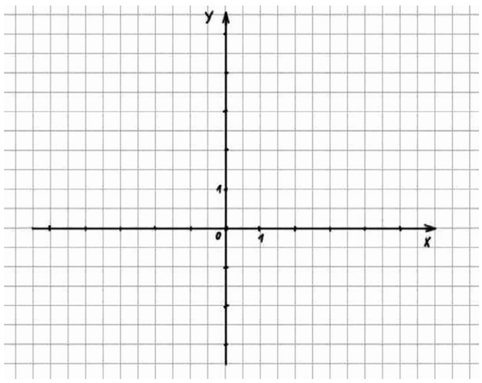
1. Odredimo zajedniču okomicu *r* pravaca *p* i *q*.
2. Označimo s *A* točku presjeka pravaca *r* i *p* i s *B* točku presjeka pravaca *r* i *q*.
3. Veličina kuta $\angle pSq$ u radijanima jednaka je duljini kraćeg kružnog luka od točke *A* do točke *B*.

5. Veza pravca sferne ravnine s ravninom u euklidskom prostoru

Kao što smo već rekli, sfernu ravninsku geometriju promatramo na jediničnoj sferi sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava u prostoru. Tada svakoj velikoj kružnici na sferi odgovara jedinstvena ravnina koja sadrži ishodište, određena s dvije različite točke kružnice *A* i *B* (koje nisu antipodalne) i ishodištem *O*. Uočimo da kada bi točke *A* i *B* bile antipodalne, tada bi *A*, *B* i *O* pripadale jednom pravcu pa tim točkama ne bi bila određena jedinstvena ravnina. Drugim riječima, antipodalne točke sferne ravnine ne određuju jedinstveni pravac sferne ravnine, već je svaki par andipodalnih točaka sadržan u beskonačno mnogo pravaca. Obratno, svaka ravnina koja sadrži ishodište siječe sferu u jedinstvenoj velikoj kružnici. Na taj način možemo uspostaviti bijekciju između pravaca sferne ravnine i ravnina u euklidskom prostoru koje sadrže ishodište, odnosno definirati još jedan model sferne ravnine.

6. Model sfere i alati za crtanje na sferi

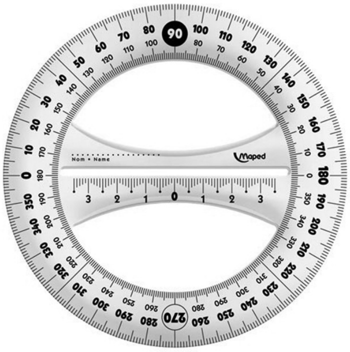
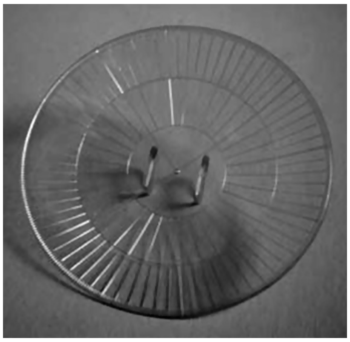
U ovom poglavlju opisat ćemo Lénártovu sferu i osnovne alate kojima se služimo kako bismo prikazali točke, pravce, geometrijske likove na njoj. Usporedit će se alati kojima se služimo za osnovne konstrukcije i mjerenja u euklidskoj ravnini i dati njihov ekvivalent za Lénártovu sferu.

Euklidska ravnina – koordinatni sustav	Sferna ravnina – Lénártova sfera
	

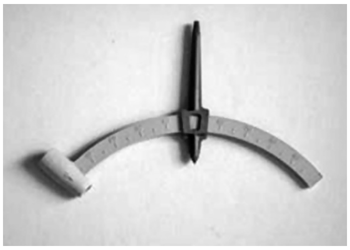
– ravnalo

Euklidska ravnina	Sferna ravnina
	 **Napomena:** Postavimo li točku *S* na sjeverni pol sfere, kružnica *q* će ocrtati ekvator. Točku *S* zovemo pol pravca *q*.

– kutomjer

Euklidska ravnina	Sferna ravnina
	

– šestar

Euklidska ravnina	Sferna ravnina
	

U nastavku dajemo primjer istaživačkog zadatka koji je moguće izvesti s učenicima (i osnovnih i srednjih škola) uz upotrebu Lénártove sfere (ili bilo kojeg sličnog pomagala) ili uz upotrebu nekog od besplatnih računalnih programa u kojima je moguće crtati u sfernoj ravnini: *GeoGebra 3D* (sfernu ravninu promatramo na sferi sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava, a pravce sferne ravnine prikazujemo pomoću ravnina u euklidskom prostoru, kao što je opisano u poglavlju 6.), *Cinderella* (http://www.cinderella.de/tiki-index.php), *Spherical Easel* (http://merganser.math.gvsu.edu/easel/)...

Zadatak 1. *Nacrtajte dva pravca sferne ravnine. Opišite njihov odnos!*

U euklidskoj ravnini dva se različita pravca sijeku najviše u jednoj točki. U sfernoj ravnini svaka dva pravca sijeku se u točno dvije antipodalne točke.

Zadatak 2. *Nacrtajte pravokutni trokut sferne ravnine i provjerite vrijedi li Pitagorin poučak. Obrazložite!*

Pravokutni trokut sferne ravnine je trokut koji ima najmanje jedan pravi kut (mogu biti i sva tri prava kuta). Trokut s dva prava kuta određen je s dva pravca i njihovom zajedničkom okomicom. Ukoliko se ta dva pravca sijeku pod pravim kutom, određen je trokut s tri prava kuta.

Nakon što smo nactrali pravokutni trokut, izmjerimo mu duljine stranica i vidimo da Pitagorin poučak ne vrijedi. Pitagorin poučak je tvrdnja ekvivalentna Aksiomu o paralelama, a kako on ne vrijedi u sfernoj ravnini, ne vrijedi ni Pitagorin poučak.

Zadatak 3. *Nacrtajte tri trokuta sferne ravnine i odredite zbroj veličina kutova u trokutu. Što zaključujete?*

Aksiom o paralelama ekvivalentan je tvrdnji da je zbroj veličina kutova u trokutu jednak 180°, a kako on ne vrijedi u sfernoj geometriji, ne vrijedi niti to da je zbroj veličina kutova u trokutu jednak 180°. U sfernoj geometriji zbroj veličina kutova u trokutu nije konstantan i uvijek iznosi više od 180°.

Radionicu o sfernoj geometriji izvele smo više puta učenicima različitih uzrasta koji su uvijek reagirali pozitivno i rado su sudjelovali u istraživanju svojstava sferne (ali i euklidske, projektivne i hiperboličke) geometrije uz pomoć Lénártove sfere. Odjel za matematiku Sveučilišta u Rijeci organizira i izvodi program cjeloživotnog obrazovanja Neeuklidske geometrije namijenjen prvenstveno nastavnicima matematike u kojemu se uvode različiti modeli neeuklidskih ravninskih geometrija te se uz pomoć Lénártove sfere ili računala istražuju njihova svojstva.