Zadaci i rješenja Kantonalnog natjecanja iz matematike u Sarajevu 2019. godine

Amar Bašić[1], Aida Rizvanović[2], Belma Alihodžić[3]

U ožujku 2019. godine u prostorijama Maarif škola održano je 24. natjecanje učenika srednjih škola Sarajevskog kantona. Na natjecanju su sudjelovala 184 učenika. U ovom broju donosimo zadatke za prvi i drugi razred, dok ćemo zadatke za treći i četvrti razred pokazati u idućem broju.
Napominjemo da je ponuđeno i više rješenja jednog zadatka.

Zadaci za I. razred

1. Neka su x, y i z realni brojevi koji zadovoljavaju uvjet $x+y+z=xyz$. Treba dokazati da vrijedi:

$$x\left(1-y^2\right)\left(1-z^2\right)+y\left(1-z^2\right)\left(1-x^2\right)+z\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)=4xyz$$

2. Neka su a, b, p i q prirodni brojevi takvi da su a i b relativno prosti, a je paran i $p,q\geq 3$. Treba dokazati da broj

$$2a^pb-2ab^q$$

nije potpun kvadrat.

3. Neka je $ABCD$ konveksan četverokout koji nije trapez. Simetrale stranica $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ sijeku se u točki P, a simetrale stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ sijeku se u točki Q. Ukoliko se točke P i Q nalaze u unutrašnjosti četverokuta $ABCD$ i vrijedi $|\angle APD|=|\angle BPC|$, treba dokazati da je $|\angle AQB|=|\angle CQD|$.

4. Na svakom polju tablice $n\times n$ $(n\geq 2)$ nalazi se žeton. U jednom koraku možemo pomaknuti svaki žeton na jedno od njemu dijagonalnih polja (na nekom polju može se nalaziti i više žetona). Koliki je najveći mogući broj polja na kojima nema žetona, pri navedenim operacijama?

[1]Amar Bašić, II. gimnazija, Sarajevo, BIH
[2]Aida Rizvanović, Prosvjetno-pedagoški zavod Kantona Sarajevo, BIH
[3]Belma Alihodžić, Prva bošnjačka gimnazija, Sarajevo, BIH

Rješenja zadataka za prvi razred:

Zadatak 1.:

Rješenje: Koristeći se danim uvjetom dobivamo:

$$
\begin{aligned}
& x\left(1-y^2\right)\left(1-z^2\right)+y\left(1-z^2\right)\left(1-x^2\right)+z\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right) \\
&= x\left(1-y^2-z^2+y^2z^2\right)+y\left(1-z^2-x^2+x^2z^2\right)+z\left(1-x^2-y^2+x^2y^2\right) \\
&= x+y+z-xy^2-yx^2-xz^2-zx^2-yz^2-zy^2+xy^2z^2+yx^2z^2+zx^2y^2 \\
&= xyz-xy\left(x+y\right)-xz\left(x+z\right)-yz\left(y+z\right)+xy^2z^2+yx^2z^2+zx^2y^2 \\
&= xyz-xy\left(xyz-z\right)-xz\left(xyz-y\right)-yz\left(xyz-x\right)+xy^2z^2+yx^2z^2+zx^2y^2 \\
&= xyz-zx^2y^2+xyz-yx^2z^2+xyz-xy^2z^2+xyz+xy^2z^2+yx^2z^2+zx^2y^2 \\
&= 4xyz\,,
\end{aligned}
$$

što je i trebalo dokazati.

Zadatak 2.:

Rješenje: Pretpostavimo suprotno tvrdnji zadatka, tj. da postoje prirodni brojevi a, b, p i q koji zadovoljavaju sve uvjete zadatka, i za koje je broj

$$2a^pb-2ab^q$$

potpun kvadrat.

Najprije uočimo da vrijedi jednakost:

$$2a^pb-2ab^q=2ab\left(a^{p-1}-b^{q-1}\right)$$

Budući da je prema pretpostavci zadatka a paran prirodan broj, zaključujemo da postoji prirodan broj c takav da je $a=2c,\ c\in\mathbb{N}$. Tada su b i c također relativno prosti i imamo da je

$$2ab\left(a^{p-1}-b^{q-1}\right)=4cb\left[\left(2c\right)^{p-1}-b^{q-1}\right]$$

potpun kvadrat.

Da bi ovaj izraz bio potpun kvadrat, $cb\left[\left(2c\right)^{p-1}-b^{q-1}\right]$ mora biti potpun kvadrat. Brojevi c, b i $\left(2c\right)^{p-1}-b^{q-1}$ su u parovima relativno prosti, pa kako je njihov produkt potpun kvadrat, to svaki od njih mora biti potpun kvadrat.

No, kako je b neparan broj i potpun kvadrat, mora biti $b\equiv 1\left(mod\ \ 4\right)$, odakle slijedi (ovdje koristimo uvjet $p,q\geq 3$)

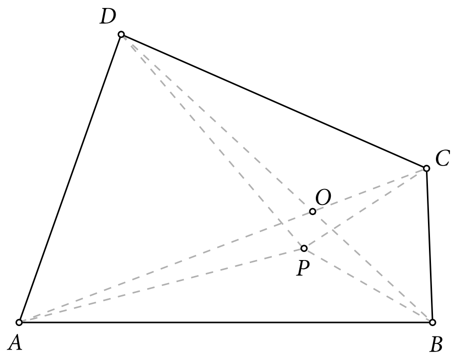
$$\left(2c\right)^{p-1}-b^{q-1}\equiv 0-1\equiv 3\left(mod\ 4\right)$$

pa broj $\left(2c\right)^{p-1}-b^{q-1}$ ne može biti potpun kvadrat, kontradikcija.

Dakle, tvrdnja zadatka je točna, tj. broj $2a^pb-2ab^q$ ne može biti potpun kvadrat.

Zadatak 3.:

Rješenje:



Neka je točka O presjek dijagonala četverokuta $ABCD$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da se točka P nalazi u ΔABC. Kako je $|\angle APD| = |\angle BPC|$, to je

$$180° > |\angle APC| = |\angle APD| + |\angle CPD| = |\angle BPC| + |\angle CPD|,$$

pa je točka P u trokutu ΔAOB, i vrijedi $|\angle APC| = |\angle BPD|$.

Kako je točka P na simetrali dužine $\overline{AD}$ to je $|AP| = |DP|$, i kako je P na simetrali dužine $\overline{BC}$, to je $|BP| = |CP|$, pa su trokuti ΔAPC i ΔDPB sukladni i vrijedi $|AC| = |BD|$.

Sada, kako je $|CQ| = |DQ|$ (jer je točka Q na simetrali dužine $\overline{CD}$) i $|AQ| = |BQ|$ (jer je Q na simetrali dužine $\overline{AB}$), to su i trokuti ΔAQC i ΔBQD sukladni.

Pretpostavimo sada da se točka Q nalazi u trokutu ΔAOB ili ΔCOD. Kako je $|\angle AQC| = |\angle BQD|$, tada je $|\angle AQD| = |\angle BQC|$, a kako je $|AQ| = |BQ|$ i $|DQ| = |CQ|$, to su trokuti ΔAQD i ΔBQC sukladni. Međutim, tada je

$$|\angle DAB| = |\angle DAQ| + |\angle QAB| = |\angle CBQ| + |\angle QBA| = |\angle ABC|,$$

i analogno je $|\angle ADC| = |\angle BCD|$, pa je četverokut $ABCD$ trapez, kontradikcija.

Dakle, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je točka Q u trokutu ΔAOD, pa je

$$|\angle AQB| = |\angle AQC| - |\angle BQC| = |\angle BQD| - |\angle BQC| = |\angle CQD|,$$

što je i trebalo dokazati.

Zadatak 4.:

Rješenje: Obojimo ploču na šahovski način crno – bijelo. Onda svaki žeton ne mijenja boju pri pomicanju. Dokažimo da na svakoj od boja ostaju bar 2 žetona.

Numerirajmo vertikale rednim brojevima od 1 do n. U svakom koraku žeton koji se nalazi na crnom polju na vertikali s neparnim brojem prijeđe na crno polje vertikale s parnim rednim brojem. Također, vrijedi i obrnuto. Kako se u početku žetoni nalaze na crnim poljima i parnih i neparnih vertikala, to će u svakom koraku biti bar 2 zauzeta crna polja.

Isto se tako dobiva da će u svakom koraku biti zauzeta bar 2 bijela polja, pa su u svakom trenutku zauzeta bar 4 polja tablice.

Dokažimo da je ovu vrijednost moguće postići. Pomičimo žetone u svakom koraku ka prozivoljno odabranoj podtablici 2 × 2 u jednom od kutova. Ako se neki žeton već nalazi u njoj, mi ga možemo ostaviti u njoj odgovarajućim dijagonalnim pomicanjem. Samim time poslije konačno mnogo koraka samo će 4 polja na tablici biti zauzeta, što znači da je najveći mogući broj slobodnih polja točno $n^2 - 4$.

Zadaci za II. razred

1. Treba odrediti sve vrijednosti realnog parametra k takvog da rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe

$$(k-1)x^2 - 2kx + 4 = 0$$

zadovoljavaju relaciju $x_1^2 - 3x_2^2 = 4$.

2. Neka je a prirodan broj i M skup ostataka dobivenih pri dijeljenju broja a svakim od prirodnih brojeva koji su manji od a (ukoliko se neki ostatak pojavljuje više puta kao npr. u slučaju $a = 7$ kada se ostatak 1 pojavljuje pri dijeljenju broja a s 2, ali također i pri dijeljenju broja a s 3 i 6, tada takav ostatak u skup M ubrajamo samo jedanput, pa tako za $a = 7$ imamo $M = \{0, 1, 2, 3\}$. Treba naći sve $a > 1$ za koje je zbroj elemenata skupa M jednak a.

3. Zajednička tangenta kružnica k_1 i k_2 dodiruje kružnicu k_1 u točki P, a kružnicu k_2 u točki Q. Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u točkama M i N, pri čemu je točka N bliže pravcu PQ nego točka M. Pravac PN siječe kružnicu k_2 još u jednoj točki R. Treba dokazati da je MQ simetrala kuta $|\angle PMR|$.

4. U polja tablice 100×100 upisani su brojevi. U svakom retku ima bar 10 različitih brojeva, ali u svaka tri uzastopna retka ima najviše 16 različitih brojeva. Koliko se najviše različitih brojeva može nalaziti u tablici?

Rješenja zadataka za drugi razred:

Zadatak 1.:

Prvo rješenje: Prema Vieteovim formulama imamo da vrijedi

$$x_1 + x_2 = \frac{2k}{k-1} \text{ i } x_1 \cdot x_2 = \frac{4}{k-1}.$$

Primjetimo da vrijedi

$$4 = x_1^2 - 3x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 4x_2^2$$

$$= \left(\frac{2k}{k-1}\right)^2 - \frac{8}{k-1} - 4x_2^2 = \frac{4k^2 - 8k + 8}{(k-1)^2} - 4x_2^2 =$$

$$= \frac{4(k-1)^2 + 4}{(k-1)^2} - 4x_2^2 = 4 + \frac{4}{(k-1)^2} - 4x_2^2,$$

a ovo je dalje ekvivalentno sa

$$0 = \frac{1}{(k-1)^2} - x_2^2 = \left(\frac{1}{k-1} - x_2\right)\left(\frac{1}{k-1} + x_2\right)$$

Sada mogu nastupiti dva slučaja:

$$x_2 = \frac{1}{k-1} \text{ ili } x_2 = -\frac{1}{k-1}$$

Pretpostavimo prvo da je $x_2 = \frac{1}{k-1}$. Kako je x_2 rješenje zadane jednadžbe, slijedi da je

$$(k-1)\left(\frac{1}{k-1}\right)^2 - \frac{2k}{k-1} + 4 = 0,$$

što se svodi na $\frac{1-2k+4k-4}{k-1} = 0$ tj. $2k - 3 = 0$, odakle dobivamo $k = \frac{3}{2}$. Dalje dobivamo

$$x_2 = \frac{1}{\frac{3}{2} - 1} = 2 \text{ i } x_1 = \frac{2k}{k-1} - x_2 = \frac{2 \cdot \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} - 1} - 2 = 4,$$

pa se izravno provjerava da su na ovaj način zaista zadovoljeni uvjeti zadatka.

Sada promatrajmo slučaj $x_2 = -\frac{1}{k-1}$. Slično imamo

$$(k-1)\left(-\frac{1}{k-1}\right)^2 + \frac{2k}{k-1} + 4 = 0,$$

što se svodi na $\frac{1+2k+4k-4}{k-1} = 0$, tj. $6k - 3 = 0$, odakle dobivamo $k = \frac{1}{2}$.

Dalje dobivamo

$$x_2 = \frac{-1}{\frac{1}{2}-1} = 2 \text{ i } x_1 = \frac{2k}{k-1} - x_2 = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} - 2 = -4,$$

pa se izravno provjerava da su na ovaj način zaista zadovoljeni uvjeti zadatka.

Dakle, odgovor je $k \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$.

Drugo rješenje: Riješimo danu jednadžbu:

$$x_{1,2} = \frac{2k \pm \sqrt{(2k)^2 - 16(k-1)}}{2(k-1)} = \frac{2k \pm \sqrt{4k^2 - 16k + 16}}{2(k-1)} = \frac{2k \pm \sqrt{4(k-2)^2}}{2(k-1)}$$
$$= \frac{2k \pm 2(k-2)}{2(k-1)}$$

Dakle, jedno rješenje dane jednadžbe je $\frac{2k+2(k-2)}{2(k-1)} = \frac{4k-4}{2(k-1)} = 2$, a drugo $\frac{2k-2(k-2)}{2(k-1)} = \frac{2}{k-1}$. Ako je $x_1 = 2$ i $x_2 = \frac{2}{k-1}$, uvjet $x_1^{\,2} - 3x_2^{\,2} = 4$ svodi se na $3x_2^{\,2} = 0$, ali ovo je nemoguće.

Dakle, mora biti $x_1 = \frac{2}{k-1}$ i $x_2 = 2$. Tada se uvjet $x_1^{\,2} - 3x_2^{\,2} = 4$ svodi na $\frac{4}{(k-1)^2} - 12 = 4$, tj. $\frac{1}{(k-1)^2} = 4$, pa imamo da je $k-1 = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$. Slučaj $k-1 = \frac{1}{2}$ daje rješenje $k = \frac{3}{2}$, a slučaj $k-1 = -\frac{1}{2}$ daje rješenje $k = \frac{1}{2}$. Kao i u prethodnom rješenju, izravno se provjerava da obje ove vrijednosti za k zaista zadovoljavaju uvjete iz postavke.

Zadatak 2.:

Rješenje: Razmotrit ćemo dva moguća slučaja:

- Neka je broj a paran. Tada je $a = 2k,\ k \in \mathbb{N}$.

Uočimo da dijeljenjem broja a brojevima $\{k,\ k+1, \ldots, 2k-1\}$ dobivamo skup ostataka $\{0,\ 1,\ 2, \ldots,\ k-1\}$. Za svaki od brojeva $x < k$ pri dijeljenju broja a s x dobivamo ostatak koji nije veći od $x-1 \leq k-1$, pa odavde zaključujemo da je u ovom slučaju $M = \{0,\ 1,\ 2, \ldots,\ k-1\}$.

Zbroj elemenata skupa *M* jednak je $\frac{k(k-1)}{2}$, pa imamo jednadžbu

$$\frac{k(k-1)}{2}=2k$$

odakle slijedi $\frac{k-1}{2}=2$ odnosno $k=5\Rightarrow a=10$, i ovo je jedino rješenje u ovom slučaju.

- Neka je broj *a* neparan. Tada je $a=2k+1,\ k\in\mathbb{N}$.

Na sličan način kao u prvom slučaju nalazimo da je $M=\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k\}$ i imamo jednadžbu

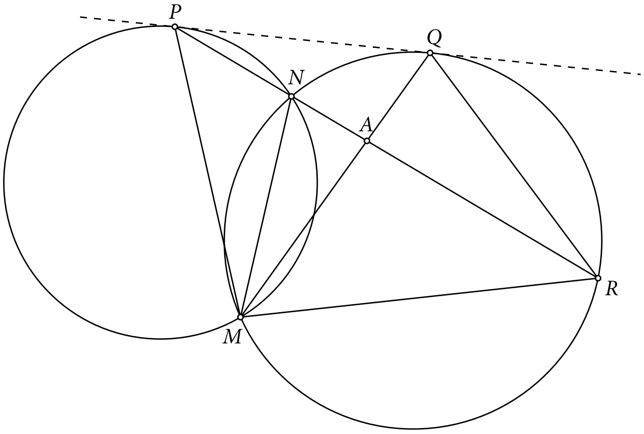
$$\frac{k(k+1)}{2}=2k+1$$

koja nema cjelobrojnih rješenja.

Dakle, jedini prirodan broj *a* koji zadovoljava sve uvjete zadatka je broj 10.

Zadatak 3.:

Rješenje:



Označimo sljedeće kutove sa: $|\angle RMA|=x$, $|\angle QMN|=y$, $|\angle NRM|=z$ i $|\angle MNR|=t$, pa odavde zaključujemo da je

$$x+y+z+t=180^\circ \qquad (1)$$

Imamo da je

$$|\angle MAR|=|\angle QAP|=y+t \qquad (2)$$

kao vršni kutovi, i zbog toga što je kut $|\angle MAR|$ vanjski kut trokuta ΔMAN. Četverokut $MRQN$ je tetivni, pa imamo da je $|\angle QRN|=|\angle QMN|=y$ jer su to obodni kutovi nad tetivom $\overline{QN}$, te

$$|\angle MQP|=y+z \qquad (3)$$

jer je kut između tetive $\overline{QM}$ i tangente iz točke Q na kružnicu k_2 jednak obodnom kutu nad tetivom $\overline{QM}$.

Kombinirajući sada relacije (1), (2) i (3) dobivamo da je

$$|\angle QPA| = x - y \quad \Rightarrow \quad |\angle PMN| = x - y \qquad (4)$$

jer je kut između tetive $\overline{PN}$ i tangente iz točke P na kružnicu k_1 jednak obodnom kutu nad tetivom $\overline{PN}$. Sada konačno iz (1) i (4) zaključujemo da je $|\angle PMQ| = x = |\angle QMR|$, pa je MQ simetrala $|\angle PMR|$, što smo trebali i dokazati.

Zadatak 4.:

Rješenje: Ako se u jednom retku nalazi bar 10 različitih brojeva, onda se u sljedeća dva pojavljuje najviše 6 novih brojeva.

Razbijmo tablicu na 50 parova uzastopnih redaka. U prvom paru ima najviše 16 različitih brojeva, a u svakom od sljedećih 49 ima najviše 6 novih brojeva, što daje ukupno najviše $16 + 49 \cdot 6 = 310$ različitih brojeva.

Primjer tablice s 310 različitih brojeva konstruiramo na sljedeći način. Za $k = 1, 2, \ldots, 50$, unesimo u $(2k-1)$-vi redak sve prirodne brojeve od $6k-5$ do $6k+4$, a u $(2k)$-ti redak sve prirodne brojeve od $6k+1$ do $6k+10$. Ova tablica ispunjava uvjete zadatka, a u njoj se nalaze brojevi od 1 do 310.

Nastavak u sljedećem broju Poučka