

PAVLE OPAVSKY

Fakultet za fizičko vaspitanje Univerziteta u Beogradu
Beograd

Izvorni znanstveni članak
UDC 519.237.5 : 577.3
Primljeno 26. 11. 1984.

MATEMATIČKI MODEL KOSOG HICA

kosi hitao/matematički model

Utvrđene su kvantitativne relacije između početne brzine, elevacionog ugla i razlike nivoa kod skoka u vis. Određena je konkretna vrednost elevacionog ugla za svaku početnu brzinu kao i za svaku razliku nivoa između tačke poleta i tačke pada, u aktuelnom rasponu. U principu, optimalni elevacioni ugao se tim više smanjuje što su vrednosti početne brzine i nivoa veće.

1. UVOD

U repertoaru složenih kretanja čoveka u svakodnevnom životu, u programu Opšte narodne odbrane, u sportu i slično, veliki broj kretanja izvodi se po principu kosog hica. Zanemarujući otpor vazduha, domet kosog hica u najvećoj meri zavisi od:

- početne brzine,
- elevacionog ugla,
- razlike nivoa između tačke izbačaja i tačke pada.

2. CILJ ISTRAŽIVANJA

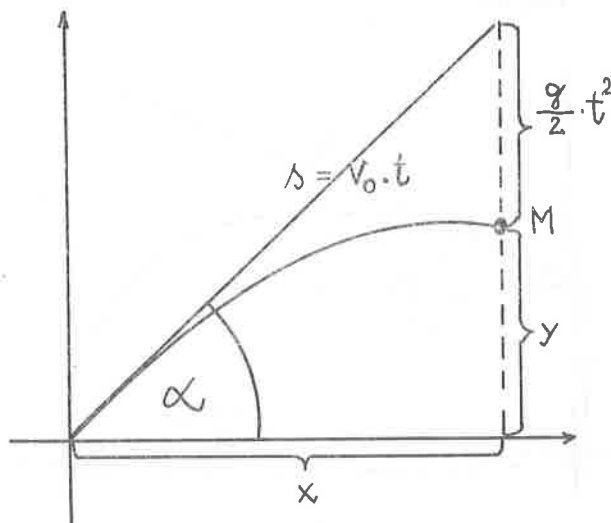
Pod pretpostavkom da je za složeno kretanje izvršena optimalna prostornovremenska parametrizacija, odnosno da će za date konstitucionalne uslove tehnika kretanja biti tako izvedena da se postigne uvek maksimalna početna brzina (nezavisna promenljiva), domet će zavistiti od razlike nivoa i elevacionog ugla (zavisne promenljive). Ovim istraživanjem bi trebalo da se ukaže na adekvatne kvantitativne relacije između navedenih varijabli, odnosno da se pre usvajanja konačne tehnike složenog kretanja unapred izračunaju vrednosti optimalnog elevacionog ugla i razlike nivoa za datu početnu brzinu. Poznavanje tih parametara odredilo bi izbor tehnike složenog kretanja, čime bi se izbeglo usvajanje neodgovarajućih navika složenog kretanja (dinamički stereotip), odnosno izbegao bi se negativni transfer u obučavanju novog složenog kretanja.

3. METOD RADA

Za konstrukciju matematičkog modela kosog hica neophodno je prethodno odrediti kinematičke, kibernetičke, informatičke, digitalne i analogne parametre kosog hica. Ovi se parametri određuju standardnim postupkom.

3.1. Elementarni kinematički obrasci za određivanje dometa kosog hica.

3.1.1. Kinematički obrazac za određivanje dometa (D) kod kosog hica bez razlike nivoa (prema skici na slici broj 1):



SL. 1. M – materijalna tačka; s – pređeni put; v_0 – početna brzina; t – vreme penjanja; g – ubrzanje sile teže; x – horizontalna projekcija pređenog puta; y – vertikalna projekcija pređenog puta; α – elevacioni ugao.

$$y + \frac{g}{2} \cdot t^2 = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha \tag{1}$$

$$y = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha - \frac{g}{2} \cdot t^2 \tag{2}$$

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha} \tag{3}$$

$$y = \frac{v_0 \cdot x \cdot \sin \alpha}{v_0 \cdot \cos \alpha} - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \tag{4}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \tag{5}$$

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \quad (6)$$

$$y = 0; x = D \quad (7)$$

$$\frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} = x \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (8)$$

$$g \cdot x^2 = x \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot 2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha \quad (9)$$

$$g \cdot x^2 = x \cdot v_0^2 \cdot 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (10)$$

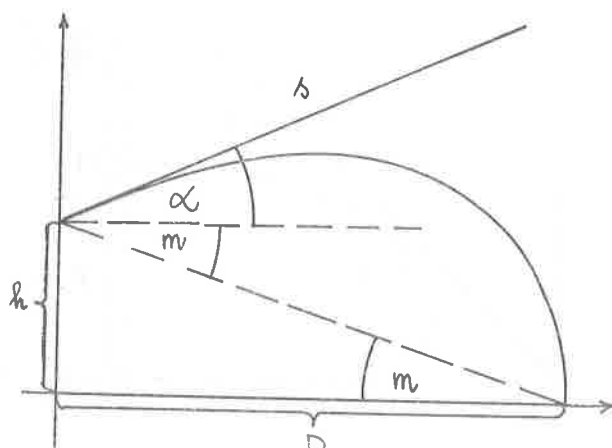
$$x = \frac{v_0^2 \cdot 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g} \quad (11)$$

$$\sin 2 \alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (12)$$

$$x = D = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2 \alpha}{g} \quad (13)$$

Na osnovu jednačine (13) utvrđuje se da će najveći domet kosog hica, bez razlike nivoa, biti postignut, ako je maksimalnom početnom brzinom hitac izvršen pod elevacionim uglom od 45°.

3.1.2. Kinematički obrazac za određivanje dometa kosog hica sa razlikom nivoa (prema skici na slici broj 2):



Sl. 2. b – tačka izbačaja; c – tačka pada; v₀ – početna brzina; D – domet; m – mesni ugao.

$$\text{Vrednost } y = -h \quad (14)$$

postavlja se u jednačinu parabole:

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \quad (6)$$

$$-h = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \quad (15)$$

$$g \cdot x^2 - x \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot 2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha + h \cdot 2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha = 0 \quad (16)$$

$$g \cdot x^2 - x \cdot v_0^2 \cdot \sin 2 \alpha + 2 \cdot h \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha = 0 \quad (17)$$

Kvadratna jednačina (17) rešava se po obrascu:

$$A \cdot x^2 + B \cdot x + C = 0 \quad (18)$$

gde su A, B, i C poznate vrednosti, dok nepoznata (x) ima dva rešenja:

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}{2 \cdot A} \quad (19)$$

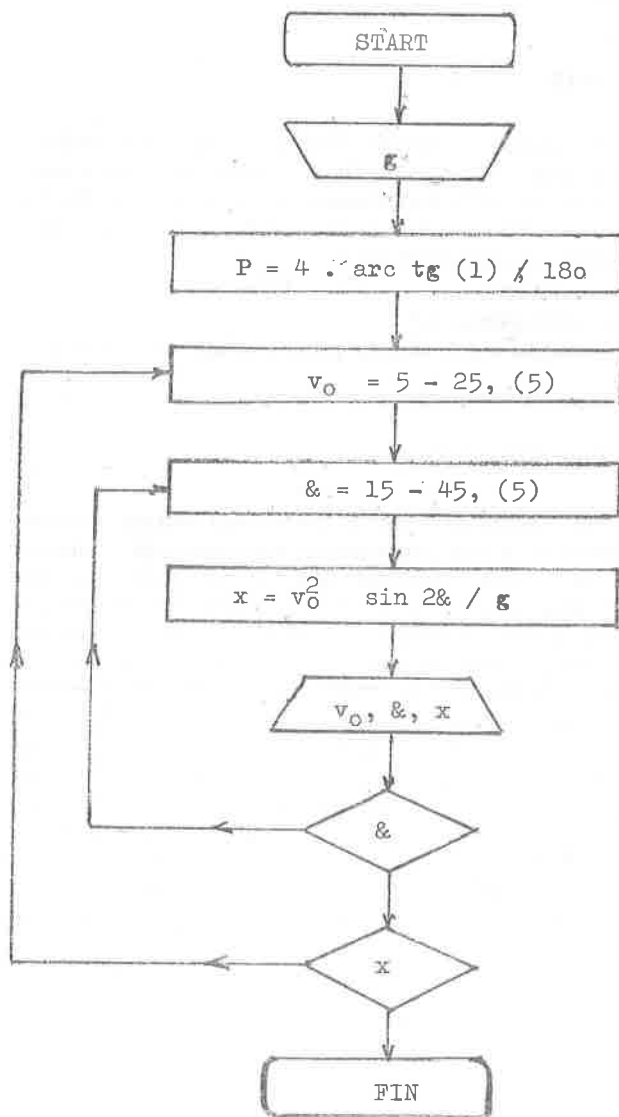
Unošenjem konkretnih vrednosti iz jednačine (17) u jednačinu (19), dobija se:

$$x_{1,2} = v_0^2 \cdot \sin 2 \alpha \pm v_0^2 \cdot \frac{\sqrt{v_0^2 \cdot \sin^2 2 \alpha + 8 \cdot g \cdot h \cdot \cos^2 \alpha}}{2 \cdot g} \quad (20)$$

gde realnu vrednost dometa predstavlja zbir vrednosti brojitelja ispred i ispod drugog korena (x₁).

3.2. Algoritam za sastavljanje programa za računar.¹⁾

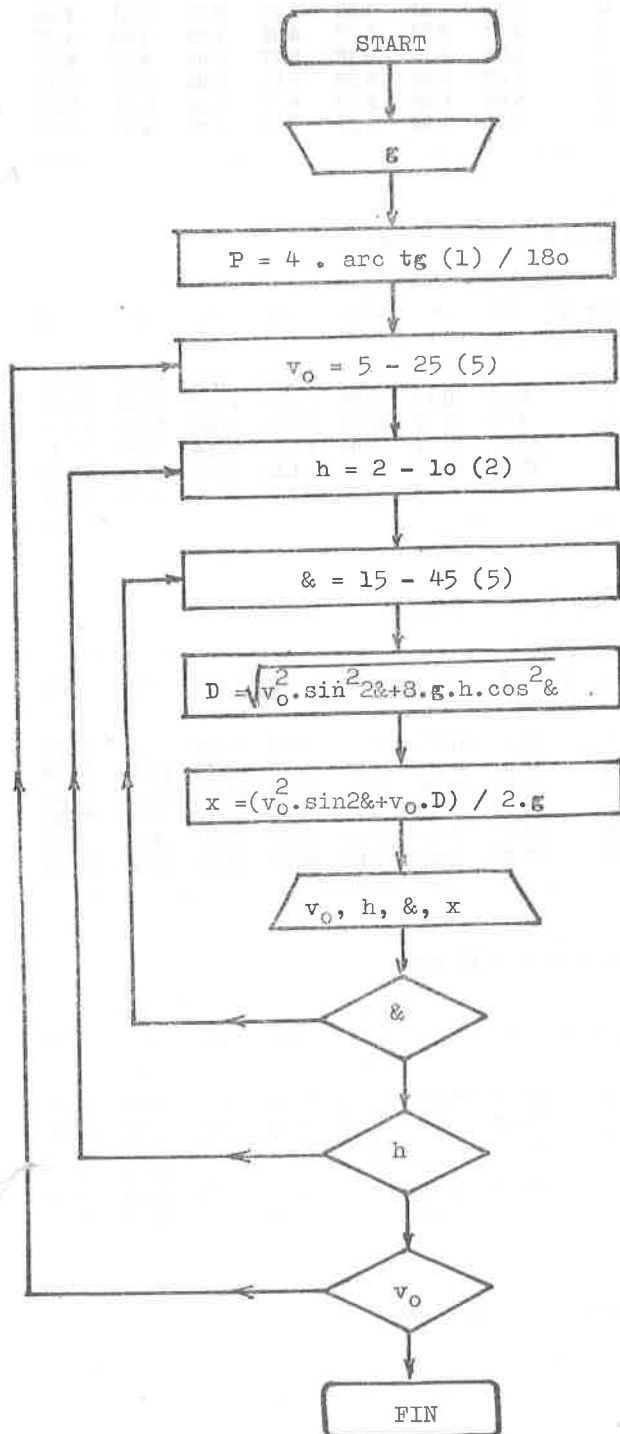
3.2.1. Na osnovu kinematičkog obrasca za horizontalni hitac bez razlike nivoa, a prema principima kibernetike, složen je odgovarajući algoritam (prema skici na slici 3)



Sl. 3. Algoritam za sastavljanje računarskog programa za kosi hitac bez razlike nivoa.

¹⁾ Algoritam, konvencija sa računskim jezikom i program za računar, izrađeni su za potrebe praktične nastave za studente Fakulteta za fizičko vaspitanje Univerziteta u Beogradu.

3.2.2. Na osnovu kinematičkog obrasca za kosi hitac sa razlikom nivoa, a prema principima kibernetike, složen je takođe odgovarajući algoritam (prema skici na slici 4)



Sl. 4. Algoritam za sastavljanje računarskog programa za kosi hitac sa razlikom nivoa.

3.3. Konvencija kinematičkog i informatičkog jezika.

3.3.1. Da bi se za računar na njegovom jeziku (basic)

mogao pripremiti odgovarajući program, bilo je neophodno da se utvrdi sledeća konvencija:

3.3.1.1. $G = g$ (ubrzanje sile teže) u metrima u sekundi na kvadrat.

3.3.1.2. $V = v_0$ (početna brzina kosog hica) u metrima u sekundi.

3.3.1.3. $H = h$ (razlika nivoa između tačke izbačaja i tačke pada) u metrima.

3.3.1.4. $A = \alpha$ (elevacioni ugao) u stepenima.

3.3.1.5. $X = x$ (domet) u metrima.

3.4. Program prema kojem će se izračunavati vrednosti relevantnih parametara kosog hica.

3.4.1. Na osnovu navedene konvencije, kinematičke jednačine za kosi hitac, bez razlike nivoa, i kibernetičkih principa, za računar TI 99/4A (basic) složen je sledeći program:

```

100 REM Izračunaj parametre kosog hica bez razlike nivoa
110 G = 9.81
120 P = (4 * ATN (1))/180
130 FOR V = 5 TO 25 STEP 5
140 PRINT »VELOCITAS =«; V
150 PRINT »—————«
160 FOR A = 15 TO 45 STEP 5
170 X = (V * 2 * (SIN (2 * (A * P))))/G
180 PRINT »ANGULUS =«; A, X
190 NEXT A
200 NEXT V
210 END
RUN
    
```

3.4.2. Na osnovu iste konvencije, kibernetičkih principa i kinematičkih jednačina za kosi hitac sa razlikom nivoa, za isti računar složen je odgovarajući program:

```

100 REM Izračunaj parametre kosog hica sa razlikom nivoa
110 G = 9.81
120 P = (4 * ATN (1))/180
130 FOR V = 5 TO 25 STEP 5
140 PRINT »VELOCITAS =«; V
150 PRINT »—————«
160 FOR H = 2 TO 10 STEP 2
170 PRINT »NIVO =«; H
180 FOR A = 15 TO 45 STEP 5
190 SOR (V*2*SIN (2* (A*P))2 + 8*G*H*COS (A*P)2)
200 X = (V*2*SIN (2* (A*P)) + (V*D))/(2*G)
210 PRINT »ANGULUS =«; A, X
220 PRINT
230 NEXT A
240 NEXT H
250 NEXT V
260 END
RUN
    
```

Na osnovu podataka u programu uočljivo je da se želi ukazati na način izbora optimalnog elevacionog ugla za različite brzine kretanja i za različite razlike nivoa.

4. REZULTATI ISTRAŽIVANJA

Nekoliko minuta bilo je potrebno računaru da na ekranu ispiše 210 desetdecimalnih brojeva kojima su prikazane vrednosti relevantnih parametara za kosi hitac bez i sa razlikom nivoa. Prikaz je izvršen na dva načina:

1. Digitalni izraz vrednosti dometa kosog hica u funkciji elevacionog ugla i razlike nivoa (Tablice broj 1, 2, 3, 4, i 5);

2. Analogni izraz vrednosti dometa kosog hica u funkciji elevacionog ugla i razlike nivoa (Grafikoni broj 1, 2, 3, 4, i 5).

5. ZAKLJUČCI

5.1. Opšti zaključci

5.1.1. Uz uslov da je početna brzina uvek ista, kod kosog hica bez razlike nivoa domet je najveći ako je elevacioni ugao jednak polovini pravog ugla.

5.1.2. Domet direktno proporcionalno zavisi od početne brzine i razlike nivoa.

5.1.3. Optimalni elevacioni ugao za postizanje maksimalnog dometa je sve manji, što je početna brzina manja a razlika nivoa veća.

5.2. Izvedeni zaključci.

5.2.1. Ukoliko maksimalni domet treba da se postigne dejstvom vlastitih mišića, osobe sa većom brzinom savladavanja velikog otpora (BLS-Pt) i sa većim telesnom visinom imaju prednost.

5.2.2. Uz standardnu razliku nivoa, domet raste proporcionalno povećanju elevacionog ugla do optimalne veličine, i povećanju kvadrata početne brzine do maksimuma.

5.2.3. Kako sile u biosistemima u ventralnom smeru mogu da razviju veću potisnu silu nego u vertikalnom smeru, elevacioni ugao kod hitaca koji se saopštavaju silama mišića, se još više smanjuje.

5.3. Generalni zaključak.

5.3.1. Aktuelnu muskulaturu kojom se saopštava početna brzina neophodno je razviti u smislu povećavanja brzine savladavanja velikog otpora. To se postiže individualnim sistemom vežbanja u pliometrijsko-balističkom režimu sa submaksimalnim opterećenjem.

Tab. 1. Digitalni prikaz dometa kosog hica za vrednosti elevacionog ugla od 15 stup. do 45 stup. (5) i razlike nivoa od 0 do 10 m. (2), pri početnoj brzini od 5 m/sec.

Tab. 2. Digitalni prikaz dometa kosog hica za vrednosti elevacionog ugla od 15 stup. do 45 stup. (5) i razlike nivoa od 0 do 10 m. (2), pri početnoj brzini od 10 m/sec.

Tab. 3. Digitalni prikaz dometa kosog hica za vrednosti elevacionog ugla od 15 stup. do 45 stup. (5) i razlike nivoa od 0 do 10 m. (2), pri početnoj brzini od 15 m/sec.

Tab. 4. Digitalni prikaz dometa kosog hica za vrednosti elevacionog ugla od 15 stup. do 45 stup. (5) i razlike nivoa od 0 do 10 m. (2), pri početnoj brzini od 20 m/sec.

Tab. 5. Digitalni prikaz dometa kosog hica za vrednosti elevacionog ugla od 15 stup. do 45 stup. (5) i razlike nivoa od 0 do 10 m. (2), pri početnoj brzini od 25 m/sec.

Tabela 1. $v_0 = 5$ m/sec.

h/m &°	15	20	25	30	35	40	45
0	1.27	1.64	1.95	2.21	2.39	2.51	2:55
2	3.79	3.93	4.03	4.08	4.04	4.00	3:87
4	5.04	5.14	5.18	5.17	5.09	4.93	4:71
6	6.02	6.08	6.08	6.02	5.88	5.67	5:39
8	6.84	6.88	6.85	6.74	6.56	6.30	5:97
10	7.56	7.58	7.52	7.38	7.17	6.87	6:48

Tabela 2. $v_0 = 10$ m/sec.

h/m &°	15	20	25	30	35	40	45
0	5.10	6.55	7.81	8.83	9.58	10.04	10:19
2	9.22	10.11	10.89	11.49	11.88	12.03	11:91
4	11.64	12.37	12.97	13.39	13.60	13.51	13:27
6	13.53	14.17	14.66	14.96	15.04	14.87	14:43
8	15.14	15.72	16.12	16.32	16.30	16.02	15:47
10	16.57	17.09	17.42	17.54	17.43	17.0	16:41

Tabela 3. $v_0 = 15$ m/sec.

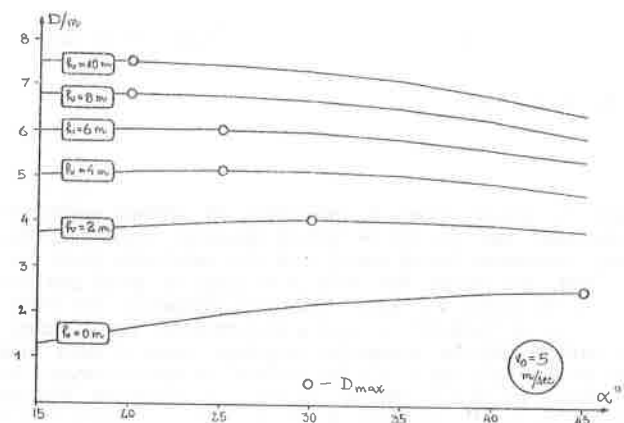
h/m &°	15	20	25	30	35	40	45
0	11.47	14.74	17.51	19.86	21.55	22.59	22:94
2	16.62	19.01	21.14	22.87	24.11	24.76	24:79
4	20.02	22.08	23.88	25.30	26.24	26.63	26:41
6	22.75	24.62	26.20	27.40	28.12	28.30	27:87
8	25.11	26.82	28.24	29.27	29.81	29.81	29:22
10	27.20	28.81	30.09	30.97	31.36	31.21	30:46

Tabela 4. $v_0 = 20$ m/sec

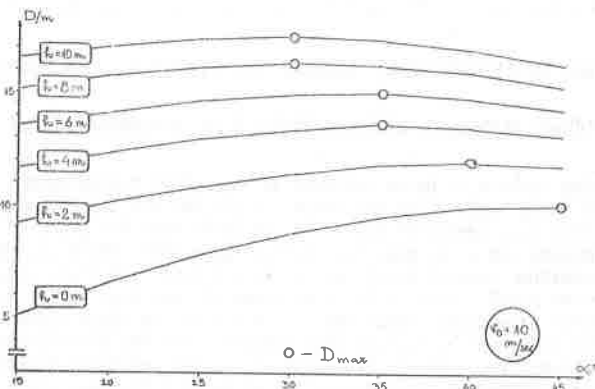
h/m &°	15	20	25	30	35	40	45
0	20.39	26.21	31.24	35.31	38.32	40.16	40:77
2	26.20	30.88	35.06	38.49	40.99	42.41	42:69
4	30.40	34.56	38.24	41.24	43.36	44.46	44:44
6	33.84	37.68	41.03	43.71	45.53	46.35	46:08
8	36.89	40.45	43.54	45.96	47.53	48.11	47:62
10	39.60	42.97	45.85	48.04	49.39	49.77	49:08

Tabela 5. $v_0 = 25$ m/sec.

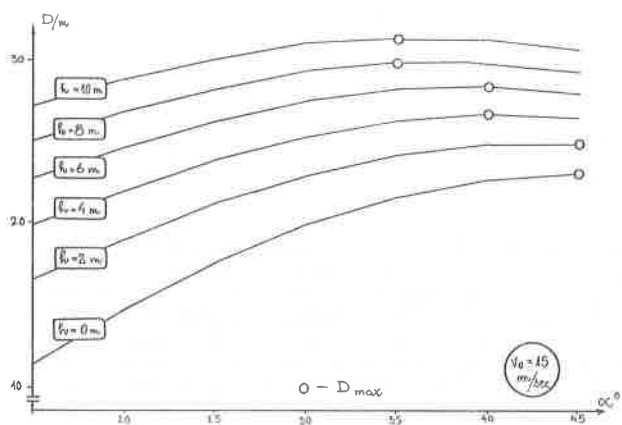
h/m &°	15	20	25	30	35	40	45
0	31.86	40.95	48.81	55.17	59.87	62.74	63:71
2	38.10	45.86	52.77	58.45	62.60	65.04	65:65
4	42.93	49.96	56.25	61.40	65.12	67.19	67:49
6	47.02	53.56	59.38	64.12	67.47	69.22	69:23
8	50.64	56.80	62.25	66.65	69.68	71.15	70:90
10	53.91	59.78	64.93	69.02	71.78	72.98	72:50



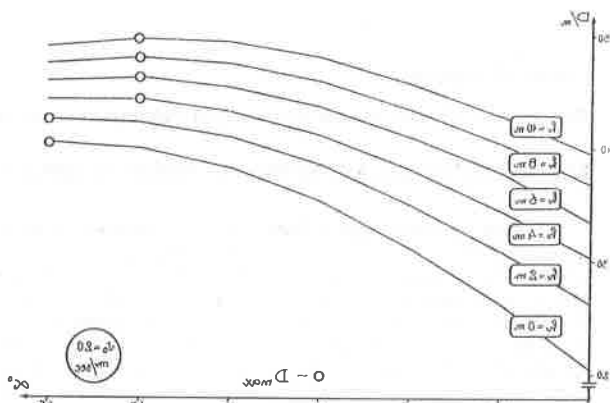
Graf. 1. Analogni prikaz dometa kosog hica prema parametrima na tablici 1.



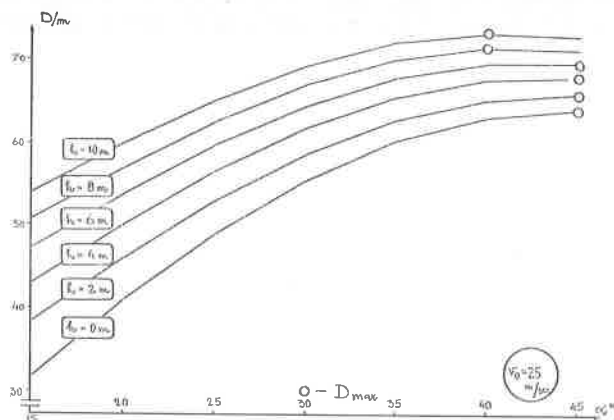
Graf. 2. Analogni prikaz dometa kosog hica prema parametrima na tablici 2.



Graf. 3. Analogni prikaz dometa kosog hica prema parametrima na tablici 3.



Graf. 4. Analogni prikaz dometa kosog hica prema parametrima na tablici 4.



Graf. 5. Analogni prikaz dometa kosog hica prema parametrima na tablici 5.

Pavle Opavsky
The Faculty for Physical Culture, University of Belgrade

UDC 519.237.5:577.3

THE MATHEMATICAL MODEL OF OBLIQUE TRAJECTORY OF BODY FLIGHT

oblique trajectory of body flight / mathematical model

Man solves a large number of complex movements, particularly in sports, using the principles of oblique trajectory of body flight. The maximum reach of the oblique trajectory depends upon the initial speed, elevation angle and the difference between the point of dash and the point of fall. Since maximum initial speed and the maximum level difference on one, and the optimal elevation angle on the other hand, are sought for, it is necessary to point out the relations among these three parameters, and their quantitative values which for each individual determine his maximum result. Since a large number of complex mathematical operations is involved, an appropriate program for the computer was done. After the classification of data (algorithm, convention with the computer language, input of data into the computer program) the obtained results, shown digitally and analogously, point out the optimal relations among the relevant parameters of oblique trajectory of body flight. On the basis of these results, quantitative relations among initial speed, elevation angle and level difference were established. In this study was determined the concrete value of elevation angle for each initial speed as well as for each level difference between the point of dash and the point of fall, in the actual range. Generally speaking, the optimal elevation angle decreases as the values of initial speed and level differences increase.

Павле Опавски

Факультет физической культуры Белградского университета

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОСОГО БРОСКА

Человек совершает большое число комплексных движений, в частности в спорте, используя принципы косо́го броска. Максимальная дальность полета при косом броске зависит от начальной скорости, угла подъема и от разницы уровней точки начала полета (выброс) и точки падения. Так как требуются максимальная начальная скорость и максимальная разница в уровнях, с одной стороны, и оптимальный угол подъема, с другой, необходимо указать на взаимоотношения между этими тремя параметрами и на их количественные значения, обуславливающие максимальные результаты для каждого спортсмена. Так как речь идет об объемных и комплексных вычислениях для настоящей работы, которая имеет феноменологический характер, составлена соответствующая программа для ЭВМ. На основе анализа данных получены результаты, которые в работе приводятся в цифровой и аналоговой формах и которые указывают на оптимальные взаимоотношения между рассматриваемыми параметрами косо́го броска. Таким образом, определены количественные взаимоотношения между начальной скоростью, углом подъема и разницей в уровнях. В работе приводятся конкретные величины угла подъема при различной начальной скорости и при различных расстояниях между точками начала полета и падения в актуальных пределах. В принципе угол подъема становится меньше, если повышается начальная скорость и увеличивается расстояние между уровнями.