Osječki matematički list 21 (2021), 1–18

Primjene gama funkcije

Toni Milas[*], Mihaela Ribičić Penava[†], Kristian Sabo[‡]

Sažetak

U ovom je radu ukratko opisana gama funkcija te je stavljen naglasak na neke njezine primjene u različitim područjima matematike. Opisane su primjene u geometriji, vjerojatnosti (momenti nekih neprekidnih slučajnih varijabli te gama distribucija) te u teoriji Laplaceovih transformacija.

Ključne riječi: *gama funkcija, primjene, vjerojatnost, Laplaceova transformacija*

The applications of the gamma function

Abstract

In this paper, the gamma function is shortly described, with emphasis placed on some of its applications in various fields of mathematics. Applications in geometry, probability (the gamma distribution and moments of some continuous random variables) and the Laplace transform theory are described.

Keywords: *gamma function, applications, probability, Laplace transform*

[*] Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, email: toni.milas@gmail.com
[†] Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email: mihaela@mathos.hr
[‡] Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, email:ksabo@mathos.hr

Leonhard Euler (1707.–1783.) švicarski matematičar i fizičar

Daniel Bernoulli (1700.–1782.) švicarski matematičar i fizičar

Carl Friedrich Gauss (1777.–1855.) njemački matematičar i fizičar

1 Povijesni pregled i osnovna svojstva gama funkcije

Gama funkcija svoje začetke ima u ranom 18. stoljeću, a ideja koja je dovela do uvođenja gama funkcije bila je generaliziranje pojma faktorijela. Kako su u to vrijeme živjeli mnogi od danas najpoznatijih matematičara i međusobno razmjenjivali ideje, iz pisama Leonharda Eulera i Daniela Bernoullija (vidi npr. [6] i [13]) saznajemo kako je Bernoulli prvi uspio u ovom naumu te je definirao funkciju koja bi proširila faktorijele korištenjem beskonačnog produkta. Nakon Bernoullija takvu je funkciju definirao i Euler, no pomoću integrala. Zanimljivo je kako gama funkcija nosi još i naziv *Eulerov integral druge vrste*, iako se danas najčešće koristi izraz koji nije Eulerova definicija, nego ona Adriena-Marie Legendrea. Čak i današnja notacija $\Gamma(\cdot)$ nije Eulerova, već se zasluge za nju pripisuju Carlu Friedrichu Gaussu.

Definicija 1.1. Funkciju $\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definiranu izrazom

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

zovemo **gama funkcija**.

Prethodna je definicija zapravo dobivena supstitucijom u prvotnoj Eulerovoj definiciji koju je predložio Christianu Goldbachu. Eulerova definicija glasila je

$$\Gamma(x) = \int_0^1 (-\ln t)^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

Legendre je uveo supstituciju $u = -\ln t$ (vidi [10], str. 477., 485., 490.), čime je Eulerova definicija svedena na definiciju koju danas pretežno susrećemo u literaturi. Dokaz dobre definiranosti gama funkcije za sve pozitivne realne brojeve može se naći u [11]. Osnovna je ideja dokaza zapisati gama funkciju u obliku

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

te pokazati da su oba integrala koja se pojavljuju kao sumandi apsolutno konvergentna.

Gama funkcija ima mnoga zanimljiva svojstva koja se mogu pronaći u npr. [1], [3] i [15], kao i dokazi tih svojstava. Kako je ovaj rad usmjeren ka primjenama, u nastavku navodimo isključivo ona svojstva koja će biti korištena u daljnjim razmatranjima.

Teorem 1.1. *Za gama funkciju vrijede sljedeće tvrdnje:*

(i) $\Gamma(1) = 1$,

(ii) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$,

(iii) $\Gamma(0)$ *nije definirano,*

(iv) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\forall x > 0$,

(v) $\Gamma(x+1) = x!$, $\forall x \in \mathbb{N}_0$.

Uočimo kako identitet $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ vrijedi za vrijednosti $x > 0$. Prethodno je spomenuto kako integral kojim je gama funkcija definirana konvergira za pozitivne vrijednosti argumenta, međutim moguće je proširiti domenu gama funkcije korištenjem teorema 1.1 (vidi npr. [3]). Preciznije, koristimo formulu

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1). \tag{1}$$

Lijeva strana jednakosti (1) dobro je definirana za $x > 0$, no desna je strana dobro definirana za vrijednosti argumenta $x + 1 > 0$, odnosno za $x > -1$. To znači da možemo definirati lijevu stranu za $x > -1$ korištenjem desne strane jednakosti (1). Tako dolazimo do toga da je $\Gamma(x)$ definirano za $x > -1$. Međutim, ako smo $\Gamma(x)$ definirali za $x > -1$, onda je desna strana u (1) sada definirana za $x > -2$. Tu činjenicu možemo iskoristiti da bi za $x > -2$ definirali i lijevu stranu u (1). Slično možemo definirati $\Gamma(x)$ za (gotovo) sve negativne vrijednosti argumenta. Treba promotriti što se događa za $x \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$, gdje je $\mathbb{Z}_{\leq 0} = \{k \in \mathbb{Z} : \; k \leq 0\}$.

Teorem 1.2. $\Gamma(x)$ *nije definirano za* $x \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

Dokaz. Prema teoremu 1.1 znamo da $\Gamma(0)$ nije definirano. Iz relacije (1) vidimo kako je

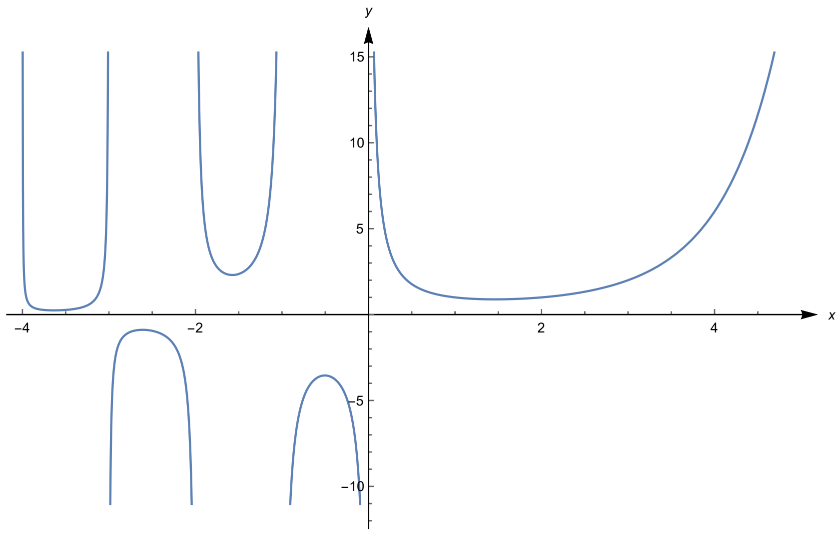
$$\Gamma(-1) = -\Gamma(0).$$

Budući da desna strana prethodne jednakosti nije definirana, to povlači da niti $\Gamma(-1)$ nije definirano. Nadalje, budući da sad znamo kako $\Gamma(-1)$ nije definirano, a iz (1) je

$$\Gamma(-2) = -\frac{1}{2}\Gamma(-1),$$

to znači da ni $\Gamma(-2)$ nije definirano. Nastavimo li analogno ovaj postupak, zaključujemo da $\Gamma(x)$ nije definirano za $x \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$. $\square$

Sad kada smo gama funkciju proširili na prethodni način, u nastavku je na slici 1 prikazan graf grama funkcije.



Slika 1. Graf gama funkcije

2 Primjene

U ovom ćemo dijelu rada prikazati nekoliko različitih primjena gama funkcije. Prvo ćemo pokazati kako se gama funkcija pojavljuje kao faktor u formulama za volumen kugle i elipsoida u n dimenzija te detaljno izvesti formule za volumene tih objekata. Zatim ćemo ukratko opisati gama distribuciju, koja se pojavljuje u području vjerojatnosti, a nastavno na područje vjerojatnosti, pokazat ćemo kako se gama funkcija može koristiti i pri izračunu momenata nekih neprekidnih slučajnih varijabli. Zadnja primjena bit će u području diferencijalnih jednadžbi, odnosno preciznije, u računanju Laplaceovih transformata nekih funkcija.

2.1 Volumen n-dimenzionalne kugle i elipsoida

Gama funkcija pojavljuje se u formulama za volumen n-dimenzionalne kugle i n-dimenzionalnog elipsoida. U nastavku ćemo dokazati formule za volumene navedenih objekata. Prvo ćemo iskazati i dokazati teorem o volumenu n-dimenzionalne kugle. Dokaz koji navodimo može se naći u [9], a drugačiji dokaz koji koristi beta funkciju može se naći primjerice u [2]. Beta funkcija je funkcija $B : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definirana izrazom

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t,$$

a više detalja o beta funkciji može se pronaći u [15].

Teorem 2.1. *Volumen n-dimenzionalne kugle polumjera r jednak je*

$$V_n(r) = \frac{r^n \pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo metodom matematičke indukcije. Bazu indukcije provodimo za slučajeve $n = 1$ i $n = 2$. Za $n = 1$ dobivamo

$$V_1(r) = \frac{r\pi^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)} = \frac{r\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}.$$

Korištenjem $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ iz teorema 1.1 imamo da je $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, iz čega slijedi

$$V_1(r) = \frac{r\sqrt{\pi}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = 2r.$$

Možemo primijetiti kako je jednodimenzionalna kugla sa središtem u ishodištu zapravo dužina s krajnjim točkama $-r$ i r na x-osi te je duljina te dužine jednaka $2r$. Dakle, formula je zaista točna u slučaju $n = 1$. Provjerimo li dodatno i slučaj kruga, imamo

$$V_2(r) = \frac{r^2\pi}{\Gamma(2)} = \frac{r^2\pi}{1!} = r^2\pi,$$

što je također poznata formula za njegovu površinu. Sada prelazimo na korak indukcije. Iskoristit ćemo činjenicu da $\mathbb{R}^n$ možemo shvatiti kao $\mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^2$. Točka $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ element je kugle $K_n(r)$ ako vrijedi

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq r^2.$$

Prethodni uvjet možemo zapisati u obliku.

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-2}^2 \leq r^2 - x_{n-1}^2 - x_n^2.$$

Korištenjem prethodnog uvjeta, volumen možemo računati kao

$$\begin{aligned} V_n(r) &= \int_{K_n(r)} \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n \\ &= \int_{K_2(r)} \left(\int_{K_{n-2}\left(\sqrt{r^2-x_{n-1}^2-x_n^2}\right)} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n-2} \right) \mathrm{d}x_{n-1}\,\mathrm{d}x_n. \end{aligned}$$

Sada možemo primijeniti pretpostavku indukcije na unutarnji integral pa dobivamo

$$V_n(r) = \frac{\pi^{(n-2)/2}}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+1\right)} \int_{K_2(r)} \left(r^2 - x_{n-1}^2 - x_n^2\right)^{(n-2)/2} \mathrm{d}x_n\,\mathrm{d}x_{n-1}.$$

U nastavku rješavanja gornjeg integrala prelazimo na polarne koordinate i dobivamo

$$V_n(r) = \frac{\pi^{(n-2)/2}}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+1\right)} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^r (r^2-t^2)^{(n-2)/2} t\,\mathrm{d}t.$$

Uočimo kako je integral po varijabli θ jednak 2π. U integralu po varijabli t možemo uvesti supstituciju $u = r^2 - t^2$, iz čega slijedi $\mathrm{d}u = -2t\,\mathrm{d}t$. Ta supstitucija dovodi do promjena granica integracije po varijabli u od r^2 do 0 te integral postaje

$$V_n(r) = -\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int_{r^2}^{0} u^{(n-2)/2}\,\mathrm{d}u = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} u^{n/2}\Big|_0^{r^2} = \frac{\pi^{n/2}}{\frac{n}{2}\Gamma(n/2)} r^n.$$

Kako bi dovršili dokaz, primijenimo još teorem 1.1 na izraz u nazivniku te dobivamo

$$V_n(r) = \frac{r^n \pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

□

Kako bi odredili volumen n-dimenzionalnog elipsoida, promatrat ćemo ga u specijalnom obliku. Stoga za početak definiramo Mahalanobis kvazimetričku funkciju (za više detalja vidi npr. [12] i [16]) $d_M : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ izrazom

$$d_M(u, v; S) = (u - v)S^{-1}(u - v)^T,$$

gdje je $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitivno definitna matrica. Pomoću Mahalanobis kvazimetričke funkcije elipsoid možemo definirati kao krug u Mahalanobis kvazimetrici, odnosno kao skup

$$\{x \in \mathbb{R}^n : d_M(x, c; S) \leq r^2\},$$

gdje je $c \in \mathbb{R}^n$ središte, a $r > 0$ polumjer. Matrica S određuje duljine poluosi te orijentaciju elipsoida. Prvo promatramo jediničnu n-dimenzionalnu kuglu sa središtem c, tj. skup točaka u n-dimenzionalnom prostoru zadanih uvjetom

$$(x - c)(x - c)^T \leq 1,$$

čiji je volumen jednak $V_n(1)$. Tada n-dimenzionalni elipsoid sa središtem u c i poluosima $a_1, \ldots, a_n$ možemo dobiti kao transformaciju

$$\sqrt[n]{detS}(x - c)S^{-1}(x - c)^T \leq 1. \tag{2}$$

Primijenimo li sada u nastavku spektralnu dekompoziciju matrice S (vidi npr. [7]) te ju zapišemo u obliku $S = U\Lambda U^T$, gdje je $\Lambda =$diag$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ te $UU^T = U^T U = I$, zatim svojstva operatora inverza te svojstvo simetričnosti ortogonalne matrice U, matricu S^{-1} možemo zapisati kao

$$S^{-1} = \left(U\Lambda^{-1/2}\right)\left(U\Lambda^{-1/2}\right)^T.$$

Iz ovoga dobivamo da n-dimenzionalni elipsoid možemo prikazati u obliku

$$\sqrt[n]{detS}\left((x - c)U\Lambda^{-\frac{1}{2}}\right)\left((x - c)U\Lambda^{-\frac{1}{2}}\right)^T \leq 1.$$

Definiramo li sada linearni operator $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izrazom $T(y) = yU\Lambda^{-1/2}$, onda slijedi da volumen n-dimenzionalnog elipsoida možemo računati kao

$$\begin{aligned}
V &= \left(\sqrt[n]{detS}\right)^n \left|det\left(U\Lambda^{-1/2}\right)\right| V_n(1) \\
&= detS\,|detU| \left|det\left(\Lambda^{-1/2}\right)\right| V_n(1) \\
&= \lambda_1 \cdots \lambda_n \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \cdots \lambda_n}} \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \\
&= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \sqrt{\lambda_1 \cdots \lambda_n}.
\end{aligned}$$

Prethodnim smo računom dokazali zapravo sljedeći teorem:

Teorem 2.2. *Volumen n-dimenzionalnog elipsoida* $\sqrt[n]{detS}(x-c)S^{-1}(x-c)^T \leq 1$ *jednak je*

$$\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\sqrt{\lambda_1\cdots\lambda_n}.$$

2.2 Gama distribucija

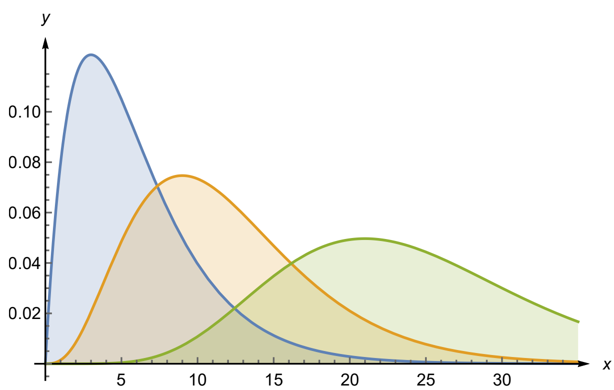
Jedna od važnih distribucija u teoriji vjerojatnosti je gama distribucija, a ima mnoge primjene u različitim znanostima. Može se koristiti primjerice u financijskom sektoru prilikom modeliranja životnog osiguranja pri računanju očekivane dobi doživljenja (vidi npr. [5]), u onkologiji dobna distribucija incidencije raka prati gama distribuciju (vidi npr. [14]), a pojavljuje se i u modelima u neuroznanosti, telekomunikacijama i sl.

Definicija 2.1. Slučajna varijabla X ima gama distribuciju s parametrima $\alpha > 0$ te $\theta > 0$ ako ima funkciju gustoće danu izrazom

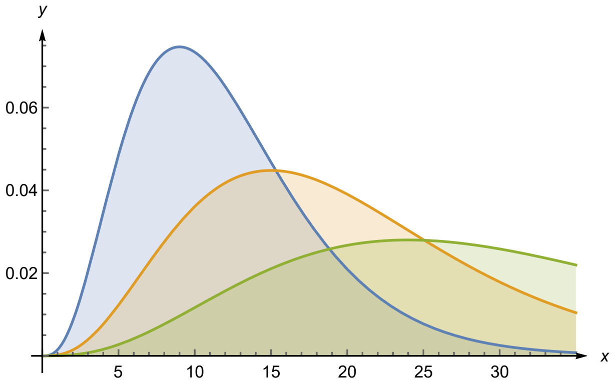
$$f_X(x) = \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbb{I}_{\{x>0\}}(x)$$

i u tom slučaju pišemo $X \sim \Gamma(\alpha, \frac{1}{\theta})$.

Parametar α određuje oblik funkcije gustoće, dok parametar θ određuje skalu. Na slici 2 može se vidjeti kako se graf funkcije gustoće gama distribucije mijenja s promjenom parametra α, a na slici 3 kako se graf mijenja s promjenom parametra θ.



Slika 2. Funkcija gustoće gama distribucije s parametrima $\alpha \in \{2, 4, 8\}$ i $\theta = \frac{1}{3}$



Slika 3. Funkcija gustoće gama distribucije s parametrima $\alpha = 4$ i $\theta \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}\right\}$

Dodatno, funkcija distribucije, koja će nam biti potrebna u sljedećem primjeru, dana je formulom

$$F(x) = \frac{\gamma\left(\alpha, \frac{x}{\theta}\right)}{\Gamma(\alpha)},$$

gdje je γ donja nepotpuna gama funkcija, tj.

$$\gamma(s,x) = \int\limits_0^x t^{s-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Primjer 2.1. *Neka je slučajan pokus kojeg promatramo potrošnja materijala u proizvodnom procesu. Pretpostavimo da se svaki dan u prosjeku troši* 50 *komada potrošnog materijala, a da se svakoga mjeseca nabavlja* 1550 *komada. Prethodni brojevi, iako empirijski opravdani, samo su pretpostavljeni budući da je primjer ilustrativne prirode. Neka slučajna varijabla X modelira vrijeme koje je potrebno da bi se potrošile zalihe. Ovakav proces modelira se gama distribucijom, a možemo dobiti odgovore na sljedeća pitanja:*

a) Kolika je vjerojatnost da u mjesec dana ponestane potrošnog materijala?

b) Kolika bi trebala biti mjesečna nabava da bi vjerojatnost nestašice bila 0.01*?*

Rješenje. Slučajna varijabla X ima gama distribuciju s parametrima $\alpha = 1550$ i $\theta = \frac{1}{50}$, tj. $X \sim \Gamma(1550, 50)$.

a) Vjerojatnost da ponestane potrošnog materijala, tj. da se u manje od jednog mjeseca potroše sve zalihe iznosi

$$P(X \leq 30) = F(30) = \frac{\gamma\,(1550, 30 \cdot 50)}{\Gamma(1550)} = 0.1011.$$

b) Iz uvjeta $P(X \leq 30) = F(30) = 0.01$, uz nepoznati parametar α, slijedi da je vrijednost parametra $\alpha = 1592$, odnosno mjesečno bi bilo potrebno nabaviti 1592 komada potrošnog materijala kako bi se osigurala vjerojatnost nestašice 0.01. ◀

2.3 Momenti neprekidnih slučajnih varijabli

Gama funkcija često se koristi pri računanju momenata neprekidnih slučajnih varijabli, od kojih su u praksi najčešće korišteni momenti očekivanje i varijanca. Za početak ćemo definirati r-ti moment neprekidne slučajne varijable.

Definicija 2.2. Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f_X. Ako je integral

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^r f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

konačan, onda kažemo da slučajna varijabla X ima r-ti moment i broj

$$EX^r = \int_{\mathbb{R}} x^r f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

zovemo **r-ti moment neprekidne slučajne varijable** X.

Specijalno, za $r = 1$, prvi moment nazivamo očekivanje slučajne varijable.

Definicija 2.3. Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f_X. Ako postoji $E(X - EX)^2$, onda kažemo da slučajna varijabla X ima varijancu i broj

$$VarX = \int_{\mathbb{R}} (x - EX)^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

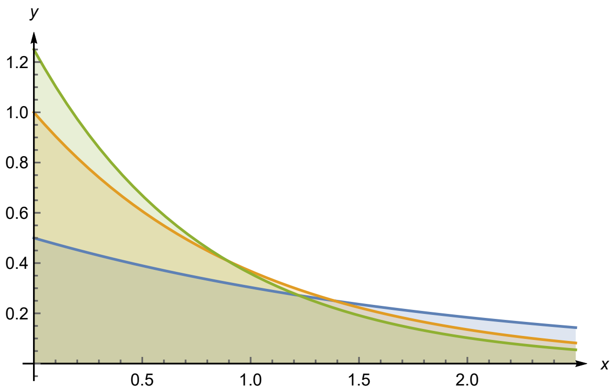
zovemo **varijanca neprekidne slučajne varijable** X.

Važno je spomenuti kako se varijancu, osim po definiciji, može računati i pomoću identiteta $VarX = EX^2 - (EX)^2$, što je u određenim situacijama vrlo korisno. U kontekstu ovog rada promotrit ćemo primjere računanja očekivanja i varijance eksponencijalne i normalne slučajne varijable, u kojima se prilikom računanja integrala pojavljuje gama funkcija.

Definicija 2.4. Eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom $\lambda > 0$ je slučajna varijabla s funkcijom gustoće

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{I}_{\{x\geq 0\}}(x).$$

Na slici 4 može se vidjeti utjecaj parametra λ na izgled grafa funkcije gustoće.



Slika 4. Funkcija gustoće eksponencijalne distribucije s parametrom $\lambda \in \{\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}\}$

U nastavku računamo očekivanje i varijancu eksponencijalne slučajne varijable.

$$EX = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \lambda x \\ \mathrm{d}t = \lambda\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty t e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\Gamma(2) = \frac{1}{\lambda}.$$

Kako je ranije spomenuto, ponekad je jednostavnije varijancu izračunati pomoću relacije $VarX = EX^2 - (EX)^2$ pa ćemo u slučaju eksponencijalne slučajne varijable iskoristiti tu relaciju. Stoga u nastavku računamo EX^2:

$$\begin{aligned} EX^2 &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \lambda x \\ \mathrm{d}t = \lambda\,\mathrm{d}x \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty t^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda^2}\Gamma(3) = \frac{2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

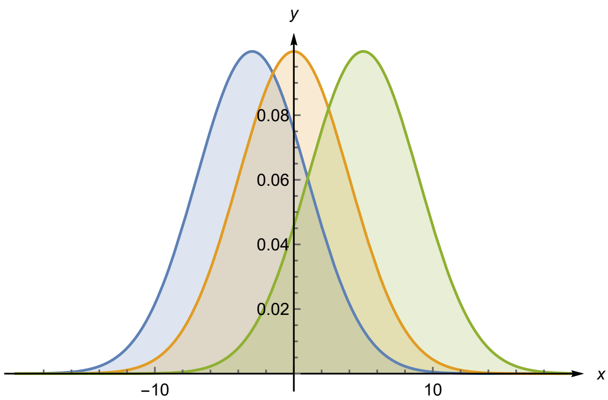
Slijedi da je

$$VarX = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

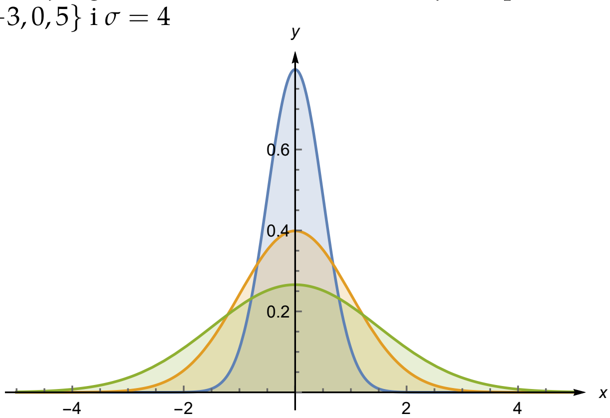
Definicija 2.5. Normalna slučajna varijabla s parametrima $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$ ima funkciju gustoće

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Slika 5 prikazuje kako se graf funkcije gustoće normalne distribucije mijenja s promjenom parametra μ, a slika 6 kako se mijenja s promjenom parametra σ.



Slika 5. Funkcija gustoće normalne distribucije s parametrima $\mu \in \{-3, 0, 5\}$ i $\sigma = 4$



Slika 6. Funkcija gustoće normalne distribucije s parametrima $\mu = 0$ i $\sigma \in \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right\}$

Očekivanje normalne slučajne varijable računamo kao

$$
\begin{aligned}
EX &= \int\limits_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \left| \begin{aligned} t &= \frac{x-\mu}{\sigma} \\ \mathrm{d}t &= \frac{1}{\sigma}\,\mathrm{d}x \end{aligned} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} (\sigma t + \mu) e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sigma \int\limits_{\mathbb{R}} t e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t + \mu \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{2\mu}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \left| \begin{aligned} u &= \frac{t^2}{2} \\ \mathrm{d}u &= t\,\mathrm{d}t \end{aligned} \right| \\
&= \frac{2\mu}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2u}} e^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty u^{-\frac{1}{2}} e^{-u}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \Gamma(1/2) = \mu.
\end{aligned}
$$

Varijancu ćemo u ovome slučaju računati po definiciji, tj. kao $VarX = E(X - EX)^2$:

$$
\begin{aligned}
VarX &= \int\limits_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \left| \begin{aligned} t &= \frac{x-\mu}{\sigma} \\ \mathrm{d}t &= \frac{1}{\sigma}\,\mathrm{d}x \end{aligned} \right| = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \left| \begin{aligned} u &= \frac{t^2}{2} \\ \mathrm{d}u &= t\,\mathrm{d}t \end{aligned} \right| \\
&= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty u^{\frac{1}{2}} e^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \Gamma(3/2) \\
&= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \Gamma(1/2) = \sigma^2.
\end{aligned}
$$

2.4 Laplaceove transformacije

Posljednja primjena koju ćemo obraditi, a o kojoj se više može naći u [8], je primjena gama funkcije kod računanja nekih Laplaceovih transformacija. Laplaceove transformacije koriste se pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi kako bi ih se svelo na algebarske jednadžbe koje se mogu jednostavnije riješiti. Detaljnije o diferencijalnim jednadžbama općenito, kao i o Laplaceovim transformacijama, može se naći u [4]. Za početak ćemo definirati Laplaceovu transformaciju te navesti tri primjera u kojima se pri računanju Laplaceova transformata pojavljuje gama funkcija, a na kraju ćemo prikazati i primjer diferencijalne jednadžbe koja se može riješiti na prethodno spomenuti način.

Definicija 2.6. Neka je dana funkcija $f : [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$. Ako za funkciju f konvergira integral

$$\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st}\, \mathrm{d}t,\ s \in \mathbb{R},$$

onda se funkcija $\mathcal{L}(f) = F$ zove *Laplaceov transformat* funkcije f, a preslikavanje $\mathcal{L}$ *Laplaceova transformacija*.

Funkciju f naziva se još i *original*. U nastavku navodimo primjere izvoda Laplaceova transformata za tri funkcije.

Primjer 2.2. *Odredimo Laplaceov transformat funkcije* $f(t) = e^{at}, s > a, a \in \mathbb{R}$.

Rješenje. Prema definiciji 2.6 imamo

$$\mathcal{L}\left(e^{at}\right) = F(s) = \int_0^\infty e^{at} e^{-st}\, \mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, \mathrm{d}t.$$

Uvedemo li supstituciju $u = (s-a)t$, to uz nepromijenjene granice integracije (zbog $s > a$) te $\mathrm{d}u = (s-a)\,\mathrm{d}t$ daje

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-u} \frac{1}{s-a}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{s-a} \int_0^\infty e^{-u}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{s-a}\Gamma(1) = \frac{1}{s-a}.$$

◀

Primjer 2.3. *Odredimo Laplaceov transformat funkcije* $f(t) = \sin \omega t e^{at}, s > a, a \in \mathbb{R}$.

Rješenje. Prema definiciji 2.6 je

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\sin \omega t e^{at}\right) = F(s) &= \int_0^\infty \sin \omega t e^{at} e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) e^{-(s-a)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2i}\int_0^\infty \left(e^{i\omega t-(s-a)t} - e^{-i\omega t-(s-a)t}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2i}\int_0^\infty e^{-((s-a)-i\omega)t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2i}\int_0^\infty e^{-((s-a)+i\omega)t}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Prethodna dva integrala riješit ćemo primjenom metode supstitucije. Za prvi integral supstitucija koju koristimo je $u = ((s-a) - i\omega)\,t$, iz čega slijedi da je $\mathrm{d}u = ((s-a) - i\omega)\ \mathrm{d}t$. Za drugi integral koristimo supstituciju $v = ((s-a) + i\omega)\,t$ pa je $\mathrm{d}v = ((s-a) + i\omega)\ \mathrm{d}t$. U integralima ne dolazi do promjena granica integracije pa slijedi

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{2i}\int_0^\infty e^{-u}\frac{1}{(s-a)-i\omega}\,\mathrm{d}u - \frac{1}{2i}\int_0^\infty e^{-v}\frac{1}{(s-a)+i\omega}\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{(s-a)-i\omega}\int_0^\infty e^{-u}\,\mathrm{d}u - \frac{1}{(s-a)+i\omega}\int_0^\infty e^{-v}\,\mathrm{d}v\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{(s-a)-i\omega}\Gamma(1) - \frac{1}{(s-a)+i\omega}\Gamma(1)\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{(s-a)-i\omega} - \frac{1}{(s-a)+i\omega}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\cdot\frac{(s-a)+i\omega-[(s-a)-i\omega]}{(s-a)^2-(i\omega)^2} \\
&= \frac{1}{2i}\cdot\frac{2i\omega}{(s-a)^2+\omega^2} \\
&= \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}.
\end{aligned}$$

◀

Sljedeći primjer vrlo je sličan prethodnom, no navodimo ga jer će nam taj rezultat koristiti u posljednjem primjeru.

Primjer 2.4. *Odredimo Laplaceov transformat funkcije* $f(t) = \cos \omega t e^{at}$, $s > a$, $a \in \mathbb{R}$.

Rješenje. Primjenom definicije 2.6 i sličnim razmatranjem kao u prethodnom primjeru dobijemo

$$\mathcal{L}\left(\cos \omega t e^{at}\right) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-((s-a)-i\omega)t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2i}\int_0^\infty e^{-((s-a)+i\omega)t}\,\mathrm{d}t = \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}.$$

◀

Pokažimo sada na primjeru kako se Laplaceove transformacije mogu koristiti pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi.

Primjer 2.5. *Riješimo Cauchyjevu zadaću*

$$\begin{cases} y'' + 4y' = e^t \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}.$$

Rješenje. Prije nego li počnemo sa samim problemom, bitno je navesti oznake i Laplaceove transformacije koje ćemo koristiti u nastavku. Označimo s $Y(p)$ Laplaceovu transformaciju funkcije $y(t)$, tj. $\mathcal{L}(y(t)) = Y(p)$. Prema teoremu o deriviranju originala (vidi [4], str. 300.) je

$$\mathcal{L}(y'(t)) = pY(p) - y(0),\ \mathcal{L}(y''(t)) = p(pY(p) - y(0)) - y'(0).$$

Dodatno, kako je pokazano u primjeru 2.2, vrijedi

$$\mathcal{L}(e^t) = \frac{1}{p-1},\ t \geq 0.$$

Djelujemo li operatorom $\mathcal{L}$ na diferencijalnu jednadžbu $y'' + 4y' = e^t$, dobit ćemo algebarsku jednadžbu

$$p^2Y(p) - py(0) - y'(0) + 4Y(p) = \frac{1}{p-1}.$$

Iskoristimo li uvjete Cauchyjeve zadaće $y(0) = 2$ i $y'(0) = 1$, dobivamo

$$p^2Y(p) - 2p - 1 + 4Y(p) = \frac{1}{p-1}.$$

Sređivanjem prethodne jednadžbe te izražavanjem $Y(p)$ dobivamo izraz

$$Y(p) = \frac{2p^2 - 2p}{(p-1)(p^2+4)},$$

koji zatim rastavimo na parcijalne razlomke te dobijemo

$$Y(p) = \frac{\frac{1}{5}}{p-1} + \frac{\frac{9}{5}p + \frac{4}{5}}{p^2+4}.$$

Prethodni ćemo izraz zapisati na malo drugačiji način kako bismo uočili neke poznate Laplaceove transformate. Izraz pišemo u obliku

$$Y(p) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{p-1} + \frac{9}{5} \cdot \frac{p}{p^2+4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{p^2+4}.$$

Konačno, u prethodnom izrazu uočimo da se pojavljuju Laplaceovi transformati funkcija koje smo prikazali u prethodnim primjerima:

$$\mathcal{L}(e^t) = \frac{1}{p-1},\ \mathcal{L}(\cos 2t) = \frac{p}{p^2+4},\ \mathcal{L}(\sin 2t) = \frac{2}{p^2+4},\ t \geq 0.$$

Iskoristimo li prethodno napisano, dolazimo do toga da je rješenje početne Cauchyjeve zadaće funkcija

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{5}e^t + \frac{9}{5}\cos 2t + \frac{2}{5}\sin 2t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

◀

3 Literatura

[1] G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special functions,* Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[2] J. Azose, *On the gamma function and its applications,* (javno dostupno: `https://sites.math.washington.edu/~morrow/336_10/papers/joel.pdf`)

[3] W. W. Bell, *Special functions for Scientists and Engineers,* D. Van Nostrand Company Ltd, Reinhold, New York, 1969.

[4] W. E. Boyce, R. C. Diprima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, 7th edition,* John Wiley & Sons, 2000.

[5] H. U. Gerber, *Life Insurance Mathematics,* Springer Verlag and Swiss Association of Actuaries, 1990.

[6] M. Godefroy, *La fonction Gamma; Theorie, Histoire, Bibliographie,* Gauthier-Villars, Paris, 1901.

[7] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis (Second edition),* Cambridge University Press, 2013.

[8] M. M. Iddriu, K. J. Tetteh, *The Gamma Function and Its Analytical Applications,* Journal of Advances in Mathematics and Computer Science, **23**(3), 1-16, 2017.

[9] M. Jorgensen, *Volumes of n-dimensional spheres and ellipsoids*, 2014., (javno dostupno: `https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/2014/jorgenmd.pdf`)

[10] A. M. Legendre, *Memoires de la classe des sciences mathematiques et physiques de l'Institut de France,* Pariz, 1809.

[11] T. Milas, *Gama funkcija i primjene,* Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, diplomski rad, 2019.

[12] A. Morales-Esteban, F. Martínez-Álvarez, S. Scitovski, R. Scitovski, *A fast partitioning algorithm using adaptive Mahalanobis clustering with application to seismic zoning,* Computers & Geosciences, **73**(2014), 132-141

[13] N. Nielsen *Handbuch der Theorie der Gammafunktion,* Leipzig, 1906.

[14] N. Rajbongshi, D. C. Nath, L. B. Mahanta, *Exploring Age Distribution Pattern of Female Breast Cancer Patients in Assam, India Using Gamma Probability Distribution Model,* Journal of Applied Sciences, 496-503, 2016.

[15] M. Ribičić Penava, D. Škrobar, *Gama i beta funkcije,* Osječki matematički list, **15**(2), 93-111, 2015.

[16] H. Späth, *Cluster-Formation und Analyse,* R. Oldenburg Verlag, München, 1983.