Dr. sc. Vedran Kojić
Docent
Sveučilište u Zagrebu
Ekonomski fakultet
Katedra za matematiku
E-mail: vkojic@efzg.hr
Orcid: https://orcid.org/0000-0002-6802-1719

Dr. sc. Mira Krpan
Docentica
Sveučilište u Zagrebu
Ekonomski fakultet
Katedra za ekonomsku teoriju
E-mail: moraic@net.efzg.hr
Orcid: https://orcid.org/0000-0002-2574-0617

PRIMJENA TEŽINSKE AG-NEJEDNAKOSTI U PROBLEMU MAKSIMIZACIJE PROFITA: SLUČAJ COBB-DOUGLASOVE FUNKCIJE PROIZVODNJE S DVA FAKTORA PROIZVODNJE

UDK / UDC: 519.865:330.13
JEL klasifikacija / JEL classification: C60, C65, D21, D24
DOI: 10.17818/EMIP/2021/1.10
Pregledni rad / Review
Primljeno / Received: 23. ožujka 2021. / March 23, 2021
Prihvaćeno za tisak / Accepted for publishing: 25. svibnja 2021. / May 25, 2021

Sažetak

Model maksimizacije profita u uvjetima savršene konkurencije zauzima središnje mjesto u mikroekonomskoj analizi ponašanja poduzeća. U uvjetima proizvodnje jednog proizvoda u teorijskim i empirijskim istraživanjima tehnologiju poduzeća često opisuje Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje. U literaturi je problem maksimizacije profita uz Cobb-Douglasovu tehnologiju gotovo uvijek riješen primjenom diferencijalnog računa. Stoga je cilj ovoga rada pokazati kako se primjenom težinske AG-nejednakosti problem maksimizacije profita uz Cobb-Douglasovu funkciju proizvodnje s dva faktora proizvodnje može riješiti na alternativni, novi način, bez derivacija. U usporedbi s diferencijalnim računom, primjena težinske AG-nejednakosti zaobilazi netrivijalnu provjeru nužnih i dovoljnih uvjeta za optimalno rješenje problema. Elegantnost novog načina za izračun maksimalnog profita proizlazi iz izravne primjene težinske AG-nejednakosti te same definicije strogog globalnog maksimuma, čime se otvara pogled na ovaj problem iz sasvim nove perspektive. Ipak, treba istaknuti da *primjenu težinske AG-nejednakosti, koja spada u alate elementarne matematike, ne treba shvatiti kao superiorniji, već kao komplementaran način diferencijalnom računu u rješavanju i boljem razumijevanju ovog mikroekonomskog problema.*

Ključne riječi: teorija poduzeća, maksimizacija profita, Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje, težinska AG-nejednakost.

1. UVOD

Mikroekonomski model maksimizacije profita poduzeća koje posluje u uvjetima savršene konkurencije jedan je od temeljnih problema u analizi ponašanja poduzeća. Matematički se ovaj problem formulira kao problem matematičkog programiranja, pri čemu se maksimizira razlika između prihoda i troškova (Jehle & Reny, 2011).

U opisu tehnologije u uvjetima proizvodnje jednog proizvoda u literaturi se najčešće rabi CES funkcija proizvodnje, odnosno posebno Cobb-Douglasova tehnologija kao granični slučaj CES tehnologije (Vrankić & Oraić, 2008). Pritom se, kao alat za rješavanje problema maksimizacije profita u slučaju Cobb-Douglasove funkcije proizvodnje koristi diferencijalni račun. Štoviše, kako u domaćoj, tako i u stranoj literaturi, ovaj problem je gotovo uvijek riješen primjenom derivacija (Gravelle & Rees (2004), Jehle & Reny (2011), Lukač (2014), Mas-Colell, Whinston & Green (1995), Nicholson & Snyder (2011), Nicholson & Snyder (2017), Perloff (2013), Pindyck & Rubinfeld (2017), Sydsaeter, Hammond, Seierstad & Strom (2005), Varian (2010)). Sam model maksimizacije profita bez specificiranja funkcije proizvodnje analizirali su Vrankić, Šohinger & Krpan (2019) i prepoznali jedinstvenu strukturu mikroekonomskih fenomena, u kojoj konveksni skupovi zauzimaju središnje mjesto. Uspostavili su jedinstvenu vezu između konveksne analize i mikroekonomske teorije, bez pretpostavke o diferencijabilnosti funkcije proizvodnje.

Dokaz o konkavnosti Cobb-Douglasove funkcije proizvodnje u slučaju n faktora proizvodnje ($n \geq 2$) te rješenje problema maksimizacije profita u slučaju više od dva faktora proizvodnje, dani su u (Avvakumov, Kiselev & Taras'ev, 2010), pri čemu su se autori, također, služili diferencijalnim računom funkcija više varijabli.

Osim diferencijalnog računa, problem maksimizacije profita u slučaju Cobb-Douglasove tehnologije s više od dva faktora proizvodnje riješen je i na komplementaran način, primjenom geometrijskog programiranja, u radovima (Liu, 2006) i (Kojić & Lukač, 2018). Pritom je (Liu, 2006) problem maksimizacije profita tretirao kao problem signomialnog geometrijskog programiranja, dok su (Kojić & Lukač, 2018) problem transformirali u problem geometrijskog programiranja stupnja složenosti nula. Iako geometrijsko programiranje zaobilazi tehniku deriviranja, treba istaknuti da temeljne teorijske postavke geometrijskog programiranja ipak leže na rezultatima dobivenim primjenom diferencijalnog računa (vidjeti, na primjer, prvu fundamentalnu referencu iz geometrijskog programiranja Duffin, Peterson & Zener (1967)).

Stoga je cilj ovog rada pokazati kako se na novi način, bez primjene geometrijskog programiranja ili diferencijalnog računa, može riješiti problem maksimizacije profita u slučaju Cobb-Douglasove funkcije proizvodnje s dva faktora proizvodnje, čime se otvara pogled na opis mikroekonomskih fenomena iz sasvim nove perspektive.

Ovaj novi način podrazumijeva korištenje nejednakosti između težinske aritmetičke i težinske geometrijske sredine (težinske AG-nejednakosti), koja omogućuje dolazak do rješenja problema bez provjere, nezaobilaznih u primjeni diferencijalnog računa, netrivijalnih nužnih i dovoljnih uvjeta za optimum. U usporedbi s geometrijskim programiranjem, novi način elegantno zamjenjuje transformiranje polazne formulacije problema (primala) u dualni problem te izravno daje rješenje, koristeći pritom samo težinsku AG-nejednakost za dva pozitivna realna broja te definiciju strogoga globalnog maksimuma. Konačno, treba istaknuti kako je u radu (Kojić & Lukač, 2018) problem maksimizacije profita uz Cobb-Douglasovu tehnologiju, ali samo u slučaju jednog faktora proizvodnje, riješen primjenom težinske AG-nejednakosti, pri čemu nije pokazano kako se isti problem može riješiti u slučaju dva faktora proizvodnje (primjena težinske AG-nejednakosti u slučaju dva faktora proizvodnje ne slijedi trivijalno iz primjene iste nejednakosti u slučaju jednog faktora proizvodnje). Stoga je okosnica ovoga rada prezentacija rješenja problema maksimizacije profita uz Cobb-Douglasovu tehnologiju u slučaju dva faktora proizvodnje primjenom težinske AG-nejednakosti, odabirući, pritom, potrebne težine na jednostavniji način, nego što je to učinjeno u (Kojić & Lukač, 2018).

Rad je podijeljen u pet poglavlja. Nakon uvodnog, u drugom je poglavlju problem maksimizacije profita uz Cobb-Douglasovu funkciju proizvodnje riješen primjenom diferencijalnog računa, dok je u trećem poglavlju iskazana i dokazana težinska AG-nejednakost. U četvrtom poglavlju opisana je primjena težinske AG-nejednakosti u rješavanju problema maksimizacije profita uz Cobb-Douglasovu tehnologiju u slučaju dva faktora proizvodnje, uz geometrijsku ilustraciju na prikladnom numeričkom primjeru. Osim toga, provedena je i komparativno-statička analiza dobivenog rješenja bez korištenja diferencijalnog računa. U završnom, petom poglavlju, dana su zaključna razmatranja te smjernice za buduće istraživanje.

2. PRIMJENA DIFERENCIJALNOG RAČUNA U RJEŠAVANJU PROBLEMA MAKSIMIZACIJE PROFITA

U nastavku se analizira model maksimizacije profita poduzeća koje posluje u uvjetima savršene konkurencije u dugom roku u uvjetima proizvodnje jednog proizvoda i angažiranja dva faktora proizvodnje u proizvodnom procesu. U uvjetima kada poduzeće proizvodi jedan proizvod, tehnologija poduzeća opisuje se funkcijom proizvodnje. Funkcionalnih oblika koji opisuju tehnologiju poduzeća ima mnogo (vidjeti, na primjer, Diewert & Wales (1987) ili Griffin, Montgomery & Rister (1987)) i njihov izbor u empirijskoj i teorijskoj ekonomskoj analizi ovisi o ciljevima i uvjetima analize. Zbog svojih svojstava vrlo se često u opisu tehnologije polazi upravo od Cobb-Douglasove funkcije proizvodnje (Cobb & Douglas (1928), Fraser (2002)).

U ovom se radu polazi od pretpostavke da tehnologiju opisuje Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje u proizvodnji jednog proizvoda. Budući da se polazi od pretpostavke da poduzeće posluje u uvjetima savršene konkurencije i da su tržišta faktora proizvodnje savršeno konkurentna, cijena proizvoda koje poduzeće proizvodi i cijene faktora proizvodnje parametri su u modelu maksimizacije profita.

Matematička formulacija modela maksimizacije profita uz Cobb-Douglasovu funkciju proizvodnje u slučaju n=2 faktora proizvodnje dana je na sljedeći način:

$$\max_{x_1, x_2 > 0} pAx_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} - w_1 x_1 - w_2 x_2 , \tag{1}$$

pri čemu je $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$ vektor čije koordinate predstavljaju količine prvog i drugog faktora proizvodnje, $p > 0$ je tržišna cijena jediničnog proizvoda, $Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ je Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje uz $A > 0$ i koeficijente elastičnosti $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$, dok su $w_1 > 0$ i $w_2 > 0$ cijene prvog i drugog faktora proizvodnje (vidjeti, na primjer, Jehle & Reny (2011)).

Dok su u ovom modelu maksimizacije profita varijable odlučivanja količine faktora proizvodnje koje poduzeće angažira u proizvodnji jednog proizvoda, alternativno je model maksimizacije profita mogao biti zapisan kao model u kojem je varijabla odlučivanja količina proizvodnje i u kojem se polazi od funkcije minimalnih troškova (vidjeti u Mas-Colell, Whinston & Green (1995)). Sveobuhvatnu analizu dualnog pristupa u mikroekonomskoj analizi dao je Diewert (1982).

Ako se uvede oznaka za funkciju cilja problema (1)

$$\varphi(x_1, x_2) = pAx_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} - w_1 x_1 - w_2 x_2 , \tag{2}$$

tada je nužan uvjet za optimum u problemu (1) dan sljedećim sustavom jednadžbi

$$\begin{cases} 0 = \varphi_{x_1} = pA\alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2} - w_1 \\ 0 = \varphi_{x_2} = pA\alpha_2 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 - 1} - w_2 , \end{cases} \tag{3}$$

pri čemu pretpostavljamo da poduzeće u ravnoteži angažira pozitivnu količinu oba faktora proizvodnje, $x_1 > 0$ i $x_2 > 0$.

Rješenje sustava (3), u oznaci $\left(x_1^*, x_2^*\right)$, je sustav funkcija potražnje za faktorima proizvodnje

$$x_i^* = \frac{\alpha_i}{w_i} \cdot (pA)^{1/(1-\alpha_1-\alpha_2)} \left(\frac{w_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{-\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \left(\frac{w_2}{\alpha_2}\right)^{\frac{-\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}} , \; i = 1, 2 , \tag{4}$$

pri čemu je $1 - \alpha_1 - \alpha_2 \neq 0$. Zbog uvjeta $\alpha_1 - 1 < 0$ vrijedi

$$\varphi_{x_1 x_1} = pA\alpha_1 (\alpha_1 - 1) x_1^{\alpha_1 - 2} x_2^{\alpha_2} < 0 \tag{5}$$

za sve $x_1 > 0$ i $x_2 > 0$. Nadalje, determinanta Hesseove matrice funkcije φ iz (2), za sve $x_1 > 0$ i $x_2 > 0$, jednaka je

$$\det H_\varphi = \begin{vmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{xy} \\ \varphi_{yx} & \varphi_{yy} \end{vmatrix} = p^2 A^2 \alpha_1 \alpha_2 \left(1 - \alpha_1 - \alpha_2\right) x_1^{2\alpha_1 - 2} x_2^{2\alpha_2 - 2}, \tag{6}$$

i očito je pozitivna ako i samo ako je ispunjen uvjet

$$\alpha_1 + \alpha_2 < 1, \tag{7}$$

odnosno ako tehnologiju za proizvodnju jednog proizvoda opisuju opadajući prinosi s obzirom na razmjer (engl. *decreasing returns to scale*).

Uz uvjet (7), ispunjen je dovoljan uvjet da je rješenje (4) doista rješenje problema (1). Uvjet (7) je poznati uvjet u standardnoj literaturi (vidjeti, na primjer, Jehle & Reny (2011) i Mas-Colell, Whinston & Green (1995)).

Uvrštavanjem funkcija potražnje za faktorima proizvodnje u Cobb-Douglasovu funkciju proizvodnje, dobiva se funkcija ponude proizvoda

$$y\left(p, w_1, w_2\right) = A^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} p^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \left(\frac{w_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{-\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \left(\frac{w_2}{\alpha_2}\right)^{\frac{-\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}}. \tag{8}$$

Konačno, funkcija maksimalnog ekonomskog profita dobije se uvrštavanjem funkcija potražnje za faktorima proizvodnje i funkcije ponude proizvoda u funkciju cilja modela (1)

$$\pi\left(p, w_1, w_2\right) = \left(1 - \alpha_1 - \alpha_2\right)\left(pA\right)^{1/(1-\alpha_1-\alpha_2)} \left(\frac{w_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{-\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \left(\frac{w_2}{\alpha_2}\right)^{\frac{-\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}}. \tag{9}$$

Za danu vrijednost parametara modela maksimizacije profita, odnosno dane cijene faktora proizvodnje i cijenu proizvoda, dobiva se maksimalni profit koji predstavlja strogi globalni maksimum problema (1).

3. O TEŽINSKOJ AG-NEJEDNAKOSTI

U ovom je poglavlju prvo iskazana i na elementaran način dokazana nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine za n ($n \geq 2$) pozitivnih realnih brojeva, a potom je iskazana i, bez primjene diferencijalnog računa, dokazana težinska AG-nejednakost koja se koristiti u sljedećem poglavlju ovoga rada.

Teorem 3.1. (Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine) Neka je dano $n \geq 2$ pozitivnih realnih brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Tada vrijedi nejednakost

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}. \tag{10}$$

Jednakost u (10) vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Dokaz. Ovakav dokaz Teorema 3.1. može se vidjeti, naprimjer, u (Hung, 2007). Ideja je da se iskoristi princip Cauchyjeve ili regresivne matematičke indukcije. Za n=2, nejednakost (10) je ekvivalentna nizu nejednakosti

$$\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2} \Leftrightarrow x_1+x_2 \geq 2\sqrt{x_1x_2} \Leftrightarrow x_1-2\sqrt{x_1x_2}+x_2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2 \geq 0. \quad (11)$$

Kako je posljednja nejednakost u (11) očito točna, to je točna i nejednakost (10) za n=2. Očito je da jednakost u (11) vrijedi ako i samo ako je $x_1=x_2$. Nadalje, lako se vidi da ako nejednakost (10) vrijedi za neki broj $n\geq 2$, tada ona vrijedi i za broj $2n$. Naime,

$$\begin{aligned} x_1+x_2+\cdots+x_{2n} &= \left(x_1+\cdots+x_n\right)+\left(x_{n+1}+\cdots+x_{2n}\right) \\ &\geq n\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}+n\sqrt[n]{x_{n+1}\cdots x_{2n}} \\ &\geq n\cdot 2\sqrt{\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\cdot\sqrt[n]{x_{n+1}\cdots x_{2n}}} \\ &\geq 2n\sqrt[2n]{x_1\cdots x_n}. \end{aligned} \quad (12)$$

Kako nejednakost (10) vrijedi za n=2, to iz (12) slijedi da (10) vrijedi i za svaki broj n oblika $n=2^k, k\in \mathbb{N}$ (drugim riječima, (10) vrijedi za svaki n koji je potencija broja 2).

Konačno, sada je dovoljno pokazati još da ukoliko (10) vrijedi za neki prirodan broj n, onda (10) vrijedi i za prethodni broj, to jest broj n-1. U tu svrhu, uvede se oznaka

$$s = x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}. \quad (13)$$

Budući da (10) vrijedi za n varijabli, uzme se da je

$$x_n = \frac{s}{n-1}. \quad (14)$$

Iz pretpostavke Cauchyjeve indukcije slijedi

$$s+\frac{s}{n-1} = x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+\frac{s}{n-1} \geq n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_{n-1}\frac{s}{n-1}}. \quad (15)$$

Može se, sada, pokazati (vidjeti Dodatak) da je nejednakost (15) ekvivalentna s

$$s \geq \left(n-1\right)\sqrt[n-1]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}, \quad (16)$$

odakle slijedi nejednakost

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}, \quad (17)$$

što je i trebalo pokazati. Ovim je u cijelosti završen dokaz Teorema 3.1. **Q.E.D.**

Teorem 3.2. (Težinska AG-nejednakost) Neka je $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ te $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Tada vrijedi nejednakost

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \geq x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} . \tag{18}$$

Jednakost u (18) vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2$.

Dokaz. Iako se nejednakost (18) može dokazati na nekoliko načina (od kojih je jedan i primjenom diferencijalnog računa), ovdje je preuzet dokaz iz (Hung, 2007). Ako su λ_1 i λ_2 pozitivni racionalni brojevi, tada postoje prirodni brojevi m i n, $m < n$, takvi da je $\lambda_1 = m/n$ i $\lambda_2 = (n-m)/n$. U ovom slučaju, nejednakost (18) slijedi iz nejednakosti (10):

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \frac{m x_1 + (n-m) x_2}{n} = \frac{\overbrace{(x_1 + x_1 + \cdots + x_1)}^{m \text{ puta}} + \overbrace{(x_2 + x_2 + \cdots + x_2)}^{n-m \text{ puta}}}{n} \geq \sqrt[n]{x_1^m x_2^{n-m}} = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdot \tag{19}$$

U slučaju kada su λ_1 i λ_2 realni brojevi, tada postoje dva niza racionalnih brojeva $(r_n)_{n \geq 0}$ i $(s_n)_{n \geq 0}$ za koje vrijedi $r_n \to \lambda_1, s_n \to \lambda_2$ i $r_n + s_n = 1$, pa za svaki $n \in$N, zbog (19), vrijedi

$$r_n x_1 + s_n x_2 \geq x_1^{r_n} x_2^{s_n} . \tag{20}$$

Puštanjem n u beskonačnost i prelaskom na limes, iz (20) slijedi (18), što je i trebalo dokazati. **Q.E.D.**

Korolar 3.3. Uz oznake $x_k = a_k, \lambda_k = \dfrac{\tilde{\lambda}_k}{\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2}, a_k > 0, \tilde{\lambda}_k > 0, k=1,2,$ nejednakost (18) je ekvivalentna nejednakosti

$$a_1^{\tilde{\lambda}_1} a_2^{\tilde{\lambda}_2} \leq \left(\frac{\tilde{\lambda}_1 a_1 + \tilde{\lambda}_2 a_2}{\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2} \right)^{\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2} . \tag{21}$$

Jednakost u (21) vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2$.

4. PRIMJENA TEŽINSKE AG-NEJEDNAKOSTI U RJEŠAVANJU PROBLEMA MAKSIMIZACIJE PROFITA

U ovom je poglavlju predstavljen novi način rješavanja problema maksimizacije profita u slučaju Cobb-Douglasove funkcije proizvodnje. Prvo je riješen problem maksimizacije profita u slučaju Cobb-Douglasove tehnologije primjenom težinske AG-nejednakosti, a potom je dana i komparativno-statička analiza rješenja ovog problema.

4.1. Maksimizacija profita u slučaju Cobb-Douglasove tehnologije primjenom težinske AG-nejednakosti

Zanimljivo je, najprije, pogledati motivaciju primjene težinske AG-nejednakosti u rješavanju problema (1) na odabranom numeričkom primjeru, uz pripadnu geometrijsku ilustraciju. Radi jednostavnosti, u problemu (1) je najprije uvedena oznaka φ za funkciju cilja na način kako slijedi:

$$\max_{x_1,x_2>0} \varphi(x_1,x_2) = 5x_1^{1/2}x_2^{1/3} - x_1 - 2x_2, \tag{22}$$

pri čemu je A=1, p=5, α_1=1/2, α_2=1/3, w_1=1, w_2=2. Ideja je, sada, da se težinska AG-nejednakost, to jest Korolar 3.3., primjeni na problem (22) u dva koraka. U prvom koraku je cilj omeđiti funkciju $\varphi(x_1,x_2)$ odozgo funkcijom $\psi(x_1,x_2)$ koja ovisi samo o varijabli x_1, dok je u drugom koraku cilj omeđiti dobivenu funkciju $\psi(x_1,x_2)$ odozgo konstantom.

U prvom se koraku, najprije, funkciju φ iz (22) zapiše na način da se iz prvog i posljednjeg člana izluči član $2x_2^{1/3}$:

$$\varphi(x_1,x_2) = 2x_2^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{5}{2}x_1^{\frac{1}{2}} - x_2^{\frac{2}{3}}\right) - x_1 \cdot \tag{23}$$

Kako je cilj eliminirati iz (23) varijablu x_2 uz pomoć nejednakosti (21), eksponent prvog faktora iz umnoška u (23) treba izraziti u ovisnosti o eksponentu drugog člana u zagradi, to jest, potrebno je napisati $x_2^{1/3}$ kao $\left(x_2^{2/3}\right)^{1/2}$:

$$\varphi(x_1,x_2) = 2\left(x_2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{5}{2}x_1^{\frac{1}{2}} - x_2^{\frac{2}{3}}\right)^1 - x_1 \ . \tag{24}$$

Ako bi se sada težinska AG-nejednakost iz (21) primijenila na (24) uz odabir članova $a_1 = x_2^{\frac{2}{3}}$, $a_2 = \frac{5}{2}x_1^{\frac{1}{2}} - x_2^{\frac{2}{3}}$, i težina $\tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{2}$, $\tilde{\lambda}_2 = 1$, na desnoj strani nejednakosti bi se dobio izraz $\left[\left(\frac{1}{2}\cdot x_2^{\frac{2}{3}} + 1\cdot\left(\frac{5}{2}x_1^{\frac{1}{2}} - x_2^{\frac{2}{3}}\right)\right)\Big/\left(\frac{1}{2}+1\right)\right]^{\frac{1}{2}+1}$, odakle je vidljivo da u brojniku dobivenog izraza varijabla x_2 ne bi iščeznula. Zato je potrebno cijeli umnožak u funkciji iz (24) pomnožiti s $1 = 2\cdot\frac{1}{2}$ na sljedeći način:

$$\varphi(x_1,x_2) = 2\cdot 2\left(x_2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{2}x_1^{\frac{1}{2}} - x_2^{\frac{2}{3}}\right)^1 - x_1 = 4\left(x_2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{5}{4}x_1^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x_2^{\frac{2}{3}}\right)^1 - x_1 \ . \tag{25}$$

Tek sada se na (25), uz $a_1 = x_2^{\frac{2}{3}}$, $a_2 = \frac{5}{4}x_1^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x_2^{\frac{2}{3}}$ i težine $\tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{2}$, $\tilde{\lambda}_2 = 1$, primijeni težinska AG-nejednakost iz (21), odakle slijedi

$$\varphi(x_1,x_2) = 4\left(x_2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{5}{4}x_1^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x_2^{\frac{2}{3}}\right)^1 - x_1 \le 4\left(\frac{\frac{1}{2}\cdot x_2^{\frac{2}{3}} + 1\cdot\left(\frac{5}{4}x_1^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x_2^{\frac{2}{3}}\right)}{\frac{1}{2}+1}\right)^{\frac{1}{2}+1} = \psi(x_1,x_2), \tag{26}$$

pri čemu je

$$\psi(x_1,x_2) = 4\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{3}{2}} x_1^{\frac{3}{4}} - x_1 \,. \tag{27}$$

Valja uočiti da funkcija $\psi(x_1,x_2)$ iz (27) ne ovisi o varijabli x_2. Jednakost u (26) vrijedi ako i samo ako je

$$a_1 = a_2 \iff x_2^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{4}x_1^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x_2^{\frac{2}{3}} \iff x_2 = \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{3}{2}} x_1^{\frac{3}{4}} \,. \tag{28}$$

Geometrijski to znači da se graf funkcije ψ nalazi iznad grafa funkcije φ, pri čemu se ta dva grafa dodiruju po grafu krivulje $x_1 \mapsto \left(x_1, \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{3}{2}} x_1^{\frac{3}{4}}, 4\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{3}{2}} x_1^{\frac{3}{4}} - x_1\right)$, kako je prikazano na Slici 1.

Nadalje, ponovnom primjenom težinske AG-nejednakosti iz (21) na funkciju ψ iz (27), uz $a_1 = x_1^{\frac{3}{4}}$, $a_2 = 3\cdot\left(4\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{3}{2}} - x_1^{\frac{1}{4}}\right)$ i težine $\tilde{\lambda}_1 = 3$, $\tilde{\lambda}_2 = 1$, iz (27) slijedi

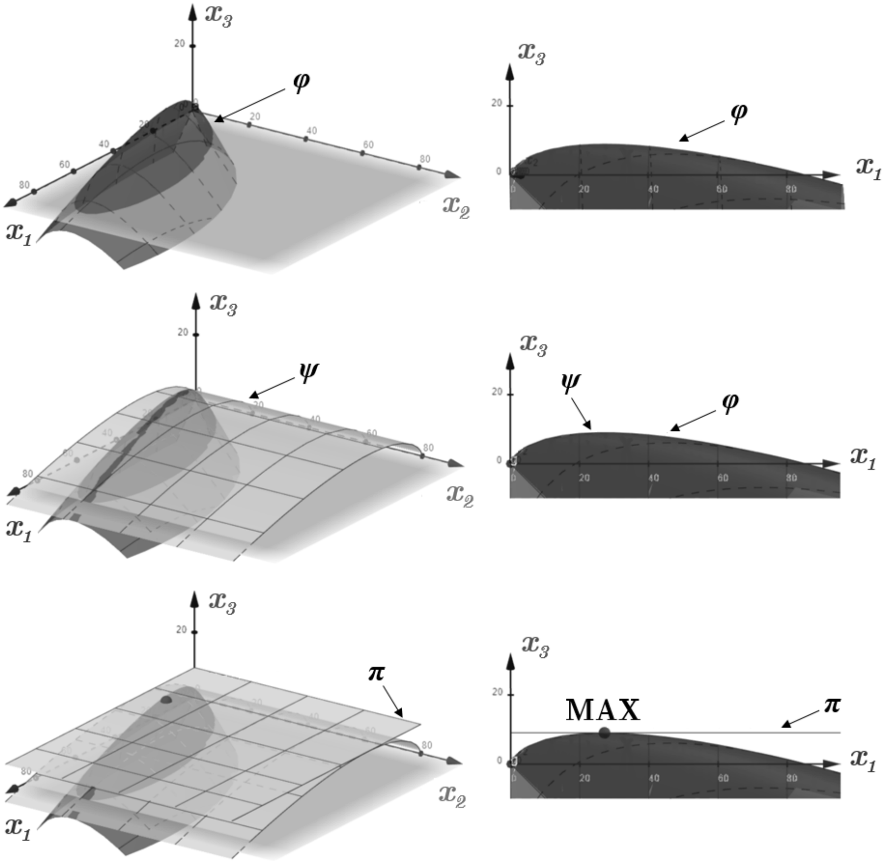
$$\begin{aligned}\psi(x_1,x_2) &= 4\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{3}{2}} x_1^{\frac{3}{4}} - x_1 = \frac{1}{3}\left(x_1^{\frac{1}{4}}\right)^3\left[3\cdot\left(4\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{3}{2}} x_1^{\frac{3}{4}} - x_1^{\frac{1}{4}}\right)\right]^1 \\ &\le \frac{1}{3}\left\{\left(3\cdot x_1^{\frac{1}{4}} + 1\cdot\left(12\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{3}{2}} x_1^{\frac{3}{4}} - 3x_1^{\frac{1}{4}}\right)\right)\Big/(3+1)\right\}^{3+1} \\ &= \frac{15625}{1728} \approx 9.0422 \,,\end{aligned} \tag{29}$$

pri čemu jednakost u (29) vrijedi ako i samo ako je

$$a_1 = a_2 \iff x_1^{\frac{1}{4}} = 3\cdot\left(4\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{3}{2}} - x_1^{\frac{1}{4}}\right) \iff x_1 = \frac{15625}{576} \approx 27.1267 \tag{30}$$

odakle, zbog (28), slijedi $x_2 = 15625/1728 \approx 9.0422$. Geometrijski to znači da se graf funkcije ψ nalazi ispod ravnine $x_3 = 15625/1728$ (na Slici 1. je konstanta

15625/1728 označena oznakom π). Konačno, kako je vidljivo na Slici 1., sva se tri grafa dodiruju u jednoj točki (15625/576, 15625/1728, 15625/1728) ≈ (27.13, 9.04, 9.04), čije koordinatne vrijednosti predstavljaju rješenje problema (22).



Slika 1. Geometrijska ilustracija i prikaz grafova funkcija φ, ψ i konstantne funkcije iznosa π iz problema (22)

Sada slijedi rješenje problema (1), to jest

$$\max_{x_1, x_2 > 0} \varphi(x_1, x_2) = pAx_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} - w_1 x_1 - w_2 x_2 , \tag{31}$$

u slučaju kada su parametri u (31) zadani općenito. Prateći sasvim istu ideju opisanu u prethodnom numeričkom primjeru, prvo se funkcija φ iz (31) zapiše na ekvivalentan način kako slijedi

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{1-\alpha_2}{\alpha_2} w_2 \left(x_2^{1-\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}} \left(\frac{\alpha_2}{1-\alpha_2} \cdot \left(\frac{pA}{w_2} x_1^{\alpha_1} - x_2^{1-\alpha_2} \right) \right)^{1} - w_1 x_1 \tag{32}$$

Uz odabir $a_1 = x_2^{1-\alpha_2}$, $a_2 = \dfrac{\alpha_2}{1-\alpha_2}\cdot\left(\dfrac{pA}{w_2}x_1^{\alpha_1} - x_2^{1-\alpha_2}\right)$ i težina $\tilde{\lambda}_1 = \dfrac{\alpha_2}{1-\alpha_2}$, $\tilde{\lambda}_2 = 1$, primjenom težinske AG-nejednakosti iz (21), iz (32) slijedi

$$\varphi(x_1,x_2) \le \frac{1-\alpha_2}{\alpha_2}w_2\left(\frac{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}\cdot x_2^{1-\alpha_2} + 1\cdot\left(\frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}\cdot\frac{pA}{w_2}x_1^{\alpha_1} - \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}x_2^{1-\alpha_2}\right)}{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}+1}\right)^{\frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}+1} = \tag{33}$$

$$= \psi(x_1,x_2),$$

gdje je

$$\psi(x_1,x_2) = \frac{1-\alpha_2}{\alpha_2}w_2\left(\frac{\alpha_2 pA}{w_2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_2}} x_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}} - w_1x_1. \tag{34}$$

Jednakost u (33) vrijedi ako i samo ako je

$$a_1 = a_2 \iff x_2^{1-\alpha_2} = \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}\cdot\left(\frac{pA}{w_2}x_1^{\alpha_1} - x_2^{1-\alpha_2}\right) \iff x_2 = \left(\alpha_2\cdot\frac{pA}{w_2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_2}}\cdot x_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}} \tag{35}$$

Nadalje, funkcija ψ iz (34) zapiše se na ekvivalentan način kako slijedi:

$$\psi(x_1,x_2) = w_1x_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_2}}\left(\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2}\cdot\frac{w_2}{w_1}\left(\frac{\alpha_2 pA}{w_2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_2}} - x_1^{\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_2}}\right) \tag{36}$$

$$= w_1\left(x_1^{\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_2}}\right)^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\left(\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2}\cdot\frac{w_2}{w_1}\left(\frac{\alpha_2 pA}{w_2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_2}} - x_1^{\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_2}}\right)$$

$$= \frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1}\cdot w_1\left(x_1^{\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_2}}\right)^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}\cdot\left(\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2}\cdot\frac{w_2}{w_1}\left(\frac{\alpha_2 pA}{w_2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_2}} - x_1^{\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_2}}\right)\right)^1.$$

Sada se, uz odabir $a_1 = x_1^{\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_2}}$, $a_2 = \dfrac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}\cdot\left(\dfrac{1-\alpha_2}{\alpha_2}\cdot\dfrac{w_2}{w_1}\left(\dfrac{\alpha_2 pA}{w_2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_2}} - x_1^{\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_2}}\right)$ i težina $\tilde{\lambda}_1 = \dfrac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}$, $\tilde{\lambda}_2 = 1$, na (36) primijeni težinska AG-nejednakost, odakle slijedi

$$\psi(x_1,x_2) \le \frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1}\cdot w_1\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}\cdot x_1^{\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_2}} + 1\cdot\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}\cdot\left(\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2}\cdot\frac{w_2}{w_1}\left(\frac{\alpha_2 pA}{w_2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_2}} - x_1^{\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_2}}\right)}{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}+1}\right)^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}+1} \tag{37}$$

$$= \pi,$$

pri čemu je π konstanta oblika:

$$\pi = \left(1-\alpha_1-\alpha_2\right)\left(pA\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \cdot \left(\frac{w_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{-\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \cdot \left(\frac{w_2}{\alpha_2}\right)^{\frac{-\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}}. \tag{38}$$

Jednakost u (37) se postiže ako i samo ako je

$$a_1 = a_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^{\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_2}} = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2} \cdot \left(\frac{w_2}{w_1} \cdot \frac{1-\alpha_2}{\alpha_2} \cdot \left(\frac{\alpha_2 pA}{w_2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_2}} - x_1^{\frac{1-\alpha_1-\alpha_2}{1-\alpha_2}} \right) \tag{39}$$

Dakle, iz (33) i (37) slijedi

$$\varphi\left(x_1, x_2\right) \le \psi\left(x_1, x_2\right) \le \pi, \tag{40}$$

pri čemu znak jednakosti u (40), izračunom iz (35) i (39), vrijedi ako i samo ako je

$$x_1 = \frac{\alpha_1}{w_1} \cdot \frac{\pi}{\left(1-\alpha_1-\alpha_2\right)}, \quad x_2 = \frac{\alpha_2}{w_2} \cdot \frac{\pi}{\left(1-\alpha_1-\alpha_2\right)}. \tag{41}$$

Valja primijetiti da su količine faktora proizvodnje iz (41) pozitivni brojevi, odakle nužno slijedi da mora biti ispunjen uvjet

$$1-\alpha_1-\alpha_2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 + \alpha_2 < 1. \tag{42}$$

Uvjet (42) je istovjetan uvjetu (7), to jest nužnom i dovoljnom uvjetu stroge konkavnosti Cobb-Douglasove funkcije proizvodnje.

Konačno, kako je $\varphi\left(x_1, x_2\right) \le \pi$ za sve x_1, $x_2 > 0$, pri čemu je $\varphi\left(x_1, x_2\right) = \pi$ ako i samo ako vrijedi (41), iz definicije strogog globalnog optimuma slijedi zaključak da je konstanta π strogi globalni maksimum funkcije φ iz problema (31), a koji se postiže za vrijednosti x_1 i x_2 iz (41). Drugim riječima, maksimalni profit u slučaju Cobb-Douglasove funkcije proizvodnje s dva faktora proizvodnje jednak je vrijednosti iz (38), a postiže se pri količinama faktora proizvodnje iz (41).

Na kraju ovog odjeljka, treba istaknuti da je relacijom (38) izvedena funkcija profita

$$\pi\left(p, w_1, w_2\right) = \left(1-\alpha_1-\alpha_2\right)\left(pA\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \cdot \left(\frac{w_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{-\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} \cdot \left(\frac{w_2}{\alpha_2}\right)^{\frac{-\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}}, \tag{43}$$

te da su iz (41) izvedene funkcije potražnje:

$$x_1\left(p, w_1, w_2\right) = \frac{\alpha_1}{w_1} \cdot \frac{\pi\left(p, w_1, w_2\right)}{\left(1-\alpha_1-\alpha_2\right)}, \quad x_2\left(p, w_1, w_2\right) = \frac{\alpha_2}{w_2} \cdot \frac{\pi\left(p, w_1, w_2\right)}{\left(1-\alpha_1-\alpha_2\right)}. \tag{44}$$

4.2. Izabrana komparativno-statička analiza

U komparativno-statičkoj se analizi, općenito, promatra kako promjena parametara u nekom danom problemu utječe na dobiveno optimalno rješenje problema i na funkciju optimalnih vrijednosti. U našem slučaju, bez primjene parcijalnih derivacija, promatra se promjena profita iz (38), odnosno (43), te funkcija potražnji za faktorima proizvodnje iz (4), kao i funkcije ponude proizvoda iz (8), uzrokovana promjenom cijena $p>0$, $w_1>0$ i $w_2>0$ (slična analiza je provedena u (Liu, 2006)). Pritom je važno istaknuti da se u analizi ilustrira samo dio standardnih komparativno-statičkih rezultata (svi rezultati se mogu pogledati u, na primjer, Mas-Colell, Whinston & Green (1995)).

Neka je $\Delta p>0$, $\Delta w_1>0$ i $\Delta w_2>0$. Tada je

$$\begin{aligned}\pi^{\Delta p} &\equiv \pi\left(p+\Delta p, w_1, w_2\right)=\\ &=\left(1-\alpha_1-\alpha_2\right)\left(\left(p+\Delta p\right)A\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\cdot\left(\frac{w_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{-\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\cdot\left(\frac{w_2}{\alpha_2}\right)^{\frac{-\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}}=\\ &=\left(1+\frac{\Delta p}{p}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\left(1-\alpha_1-\alpha_2\right)\left(pA\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\cdot\left(\frac{w_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{-\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\cdot\left(\frac{w_2}{\alpha_2}\right)^{\frac{-\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\\ &=\left(1+\frac{\Delta p}{p}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\pi\left(p, w_1, w_2\right),\end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}\pi^{\Delta w_1} &\equiv \pi\left(p, w_1+\Delta w_1, w_2\right)=\\ &=\left(1-\alpha_1-\alpha_2\right)\left(pA\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\cdot\left(\frac{w_1+\Delta w_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{-\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\cdot\left(\frac{w_2}{\alpha_2}\right)^{\frac{-\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}}=\\ &=\left(1+\frac{\Delta w_1}{w_1}\right)^{\frac{-\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\left(1-\alpha_1-\alpha_2\right)\left(pA\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\cdot\left(\frac{w_1}{\alpha_1}\right)^{\frac{-\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\cdot\left(\frac{w_2}{\alpha_2}\right)^{\frac{-\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\\ &=\left(1+\frac{\Delta w_1}{w_1}\right)^{\frac{-\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\pi\left(p, w_1, w_2\right),\end{aligned} \tag{46}$$

i, slično kao u (46), vrijedi

$$\pi^{\Delta w_2} \equiv \pi\left(p, w_1, w_2+\Delta w_2\right)=\left(1+\frac{\Delta w_2}{w_2}\right)^{\frac{-\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\pi\left(p, w_1, w_2\right). \tag{47}$$

Također, iz (44), za $i, j \in \{1,2\}, i \neq j$, dobiva se

$$\begin{aligned}x_i^{\Delta w_j} &\equiv \frac{\alpha_i}{w_i}\cdot\frac{\pi^{\Delta w_j}}{1-\alpha_1-\alpha_2}=\left(1+\frac{\Delta w_j}{w_j}\right)^{\frac{-\alpha_j}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\cdot\frac{\alpha_i}{w_i}\cdot\frac{\pi\left(p, w_1, w_2\right)}{1-\alpha_1-\alpha_2}\\ &=\left(1+\frac{\Delta w_j}{w_j}\right)^{\frac{-\alpha_j}{1-\alpha_1-\alpha_2}}\cdot x_i\left(p, w_1, w_2\right).\end{aligned} \tag{48}$$

Iz (8) se, sličnim postupkom kao u (45), (46) i (47), može dobiti da vrijedi

$$y^{\Delta p} \equiv y\left(p+\Delta p, w_1, w_2\right)=\left(1+\frac{\Delta p}{p}\right)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}} y\left(p, w_1, w_2\right), \tag{49}$$

$$y^{\Delta w_1} \equiv y\left(p, w_1+\Delta w_1, w_2\right)=\left(1+\frac{\Delta w_1}{w_1}\right)^{\frac{-\alpha_1}{1-\alpha_1-\alpha_2}} y\left(p, w_1, w_2\right), \tag{50}$$

$$y^{\Delta w_2} \equiv y\left(p, w_1, w_2+\Delta w_2\right)=\left(1+\frac{\Delta w_2}{w_2}\right)^{\frac{-\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}} y\left(p, w_1, w_2\right). \tag{51}$$

Kako je $0<\alpha_1<1, 0<\alpha_2<1$ i $0<1-\alpha_1-\alpha_2<1$, to je $\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}>1$, $\frac{-\alpha_j}{1-\alpha_1-\alpha_2}<0$ i $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}>0$ za $j=1,2$, pa slijedi

$$\left(1+\frac{\Delta p}{p}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1-\alpha_2}}>1,\ \left(1+\frac{\Delta p}{p}\right)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{1-\alpha_1-\alpha_2}}>1, \tag{52}$$

$$\left(1+\frac{\Delta w_j}{w_j}\right)^{\frac{-\alpha_j}{1-\alpha_1-\alpha_2}}<1, \text{ za } j\in\{1,2\}. \tag{53}$$

Sada iz (45)–(51), zbog (52) i (53), slijedi:

a) ako se tržišna cijena jediničnog proizvoda, u oznaci p, poveća za $\Delta p>0$, tada se profit π iz (37) poveća za $\left(\left(1+\frac{\Delta p}{p}\right)^{1/(1-\alpha_1-\alpha_2)}-1\right)\cdot 100\%$;

b) ako se cijena j-tog faktora proizvodnje, u oznaci w_j (j=1,2), poveća za $\Delta w_j>0$, tada se profit π iz (37) smanji za $\left|\left(1+\frac{\Delta w_j}{w_j}\right)^{-\alpha_j/(1-\alpha_1-\alpha_2)}-1\right|\cdot 100\%$;

c) ako se cijena j-tog faktora proizvodnje, u oznaci w_j (j=1,2), poveća za $\Delta w_j>0$, tada se potražnja x_i (i=1,2 uz $i\neq j$) iz (38) smanji za $\left|\left(1+\frac{\Delta w_j}{w_j}\right)^{-\alpha_j/(1-\alpha_1-\alpha_2)}-1\right|\cdot 100\%$,

d) ako se tržišna cijena jediničnog proizvoda, u oznaci p, poveća za $\Delta p>0$, tada se funkcija ponude proizvoda y iz (8) poveća za $\left(\left(1+\frac{\Delta p}{p}\right)^{(\alpha_1+\alpha_2)/(1-\alpha_1-\alpha_2)}-1\right)\cdot 100\%$;

e) ako se cijena j-tog faktora proizvodnje, u oznaci w_j (j=1,2), poveća za Δw_j>0, tada se funkcija ponude proizvoda y iz (8) smanji za $\left|\left(1+\frac{\Delta w_j}{w_j}\right)^{-\alpha_j/(1-\alpha_1-\alpha_2)}-1\right|\cdot 100\%$.

Iako je u ovoj analizi (i to bez primjene parcijalnih derivacija) pokazano da su funkcije profita $\pi(p,w_1,w_2)$ i ponude proizvoda $y(p,w_1,w_2)$ rastuće funkcije u cijeni proizvoda p, a padajuće u cijenama faktora proizvodnje w_1 i w_2, potrebno je istaknuti da su dobiveni rezultati u skladu s poznatim rezultatima modela maksimizacije profita.

5. ZAKLJUČAK

U mikroekonomskoj se analizi optimizacijski problemi rješavaju i komparativno-statička analiza izvodi, uz zadovoljenje određenih uvjeta regularnosti, primjenom diferencijalnog računa. Rješavanje primala u kojem je funkcija cilja izražena preko količina zahtijeva rješavanje nužnih i provjeru dovoljnih uvjeta. Kada je funkcionalni oblik funkcije cilja složeniji, ponekad je nemoguće dobiti eksplicitno rješenje problema u obliku funkcije potražnje ili ponude. Dualni pristup u mikroekonomskoj teoriji omogućuje da se mikroekonomski fenomen opiše dualnom funkcijom koja ovisi o cijenama kao dualnim varijablama i da se funkcije ponude i potražnje dobiju jednostavnim deriviranjem dualne funkcije. Dualni pristup omogućuje i elegantnije izvođenje komparativno-statičke analize optimizacijskih problema. No, pod određenim se uvjetima optimizacijski modeli mogu riješiti neposrednom primjenom težinske AG-nejednakosti koja, uz samu definiciju strogog globalnog maksimuma u problemima maksimizacije funkcije cilja uz ograničenja, izravno vodi do rješenja promatranog problema. U ovom se radu pozornost posvećuje modelu maksimizacije profita u uvjetima savršene konkurencije kada tehnologiju opisuje Cobb-Douglasova funkcija proizvodnje s dva faktora proizvodnje i izlaže se novi način njegova rješavanja neposrednom primjenom težinske AG-nejednakosti. U usporedbi s diferencijalnim računom, novi način prikazan u ovom radu elegantno zaobilazi netrivijalnu provjeru nužnih i dovoljnih uvjeta za optimalno rješenje problema i otvara pogled na model maksimizacije profita u danim uvjetima iz sasvim nove perspektive. Slučaj dva faktora proizvodnje omogućuje prezentaciju vrlo korisne trodimenzionalne geometrijske ilustracije novog pristupa, što je u radu pokazano kroz odabrani motivacijski primjer.

Za fiksnu tržišnu cijenu proizvoda, te fiksne cijene oba faktora proizvodnje, dobiveni strogi globalni maksimalni profit jamči dobru definiciju funkcije profita, koja je potom izvedena. Nadalje, sama struktura dobivenih zatvorenih formula, koje opisuju funkciju profita, funkcije potražnje te funkciju ponude proizvoda, omogućuje elegantno provođenje komparativno-statičke analize bez korištenja parcijalnih derivacija. Dobiveni rezultati provedene komparativno-statičke analize u skladu su s poznatim rezultatima iz mikroekonomske teorije.

Konačno, treba istaknuti da se na primjenu težinske AG-nejednakosti, kao novog načina za rješavanje problema maksimizacije profita, ne treba gledati kao na superiorniji, već kao na komplementaran način tehnici diferencijalnog računa. Za buduća istraživanja ostaje vidjeti kako bi se promatrani problem mogao riješiti u slučaju proizvoljnog broja faktora proizvodnje primjenom težinske AG-nejednakosti. Također, zanimljivo bi bilo vidjeti kako bi se bez primjene diferencijalnog računa problem maksimizacije profita u slučaju proizvoljnog broja inputa mogao riješiti uz neku drugu proizvodnu tehnologiju.

LITERATURA

Avvakumov, S. N., Kiselev Yu N., Orlov M. V. & Taras'ev A. M. (2010). Profit maximization problem for Cobb–Douglas and CES production function. Computational Mathematics and Modeling, 21 (3), 336–378. https://doi.org/10.1007/s10598-010-9075-5

Cobb, C. W. & Douglas, P. H. (1928). A Theory of Production. The American Economic Review, 18 (1), 139–165.

Diewert, W. E. (1982). Duality Approaches to Microeconomic Theory. U Intriligator, M. D., Arrow, K. J. Handbook of Mathematical Economics, Amsterdam: North Holland, 535–599. https://doi.org/10.1016/S1573-4382(82)02007-4

Diewert, W. E. & Wales, T. J. (1987). Flexible functional forms and global curvature conditions. Econometrica, 55 (1), 43–68. https://doi.org/10.2307/1911156

Duffin, R. J., Peterson, E. L. & Zener, C. (1967). Geometric programming – Theory and Applications. New York: John Wiley & Sons.

Fraser, I. (2002). The Cobb-Douglas Production Function: An Antipodean Defence? Economic Issues, 7 (1), 39–58. ISSN 1363-7029

Gravelle, H. & Rees, R. (2004). Microeconomics. London: FT Prentice Hall.

Griffin, R. C., Montgomery, J. M. & Rister, M. E. (1987). Selecting Functional Form in Production Function Analysis. Western Journal of Agricultural Economics, 12 (2): 216–227. doi: 10.22004/ag.econ.32240

Hung, P. K. (2007). Secrets in inequalities. Zalau: GIL Publishing House.

Jehle, G. A. & Reny, P. J. (2011) Advanced microeconomic theory. London: FT Prentice Hall.

Kojić, V. & Lukač, Z. (2018). Solving Profit Maximization Problem in Case of the Cobb-Douglas Production Function via Weighted AG Inequality and Geometric Programming, *2018* IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM), Bangkok, 2018, 1900-1903. https://doi.org/10.1109/ IEEM.2018.8607446

Liu, S. T. (2006). A geometric programming approach to profit maximization. Applied Mathematics and Computation, 182 (2),1093–1097. https://doi.org/10.1016/ j.amc.2006.04.061

Lukač, Z. (2014). Matematika za ekonomske analize. Zagreb: Element.

Mas-Colell, A., Whinston, M. D. & Green, J. R. (1995). Microeconomic theory. New York: Oxford University Press.

Nicholson, W. & Snyder, C. M. (2011). Microeconomic theory: basic principles and extensions. Mason: Thomson South-Western.

Nicholson, W. & Snyder, C. (2017). Microeconomic theory: basic principles and extensions. Mason, Ohio: South-Western / Cengage Leraning.

Perloff, J. M. (2013). Microeconomics with calculus. New York: Pearson.

Pindyck, R. S. & Rubinfeld, D. L. (2017). Microeconomics. Harlow: Pearson Education Limited.

Sydsaeter, K., Hammond, P., Seierstad, A. & Strom, A. (2005). Further mathematics for economic analysis. London: Prentice Hall.

Varian, H. L. (2010). Intermediate microeconomics: a modern approach. New York: W.W. Norton & Company.

Vrankić, I. & Oraić, M. (2009). Supstitucija faktora u proizvodnji i ekonomske uštede. Zbornik Ekonomskog fakulteta u Zagrebu, 7 (1), 143–160.

Vrankić, I., Šohinger, J. & Krpan, M. (2019). Economic Analysis of Technology and Properties of Legendre-Fenchel transformations. International Journal of Economic Sciences. 8 (2), 159–183. https://doi.org/10.20472/ ES.2019.8.2.011

DODATAK

Pokažimo da je nejednakost (15), to jest

$$s+\frac{s}{n-1}=x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+\frac{s}{n-1}\geq n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_{n-1}\frac{s}{n-1}}, \tag{D1}$$

ekvivalentna nejednakosti (16), odnosno nejednakosti

$$s\geq(n-1)\sqrt[n-1]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}\ . \tag{D2}$$

Nadalje, kako je

$$s+\frac{s}{n-1}=\frac{sn-s+s}{n-1}=\frac{n}{n-1}s\ . \tag{D3}$$

to je nejednakost iz (D1) ekvivalnetna s

$$\frac{n}{n-1}s\geq n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_{n-1}\frac{s}{n-1}}\ . \tag{D4}$$

Dijeljenjem obje strane u (D4) s n i primjenom svojstava korjenovanja, nejednakost (D4) postaje ekvivalentna s

$$\frac{s}{n-1}\cdot\sqrt[n]{\frac{n-1}{s}}\geq\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}\ , \tag{D5}$$

to jest s

$$\sqrt[n]{s^{n-1}}\geq\frac{n-1}{\sqrt[n]{n-1}}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}\ . \tag{D6}$$

Potenciranjem nejednakosti (D6) eksponentom $\frac{n}{n-1}$, $n>1$, nejednakost (D6) postaje ekvivalentna s

$$s\geq(n-1)\sqrt[n-1]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}\ . \tag{D7}$$

Kako je nejednakost (D7) zapravo jednaka nejednakosti (D2), to jest nejednakosti (16), ovim je u potpunosti pokazano da je nejednakost (15) ekvivalentna nejednakosti (16).

Vedran Kojić, PhD

Assistant Professor
University of Zagreb
Faculty of Economics and Business
Department of Mathematics
E-mail: vkojic@efzg.hr
Orcid: https://orcid.org/0000-0002-6802-1719

Mira Krpan, PhD

Assistant Professor
University of Zagreb
Faculty of Economics and Business
Department of Economic Theory
E-mail: moraic@net.efzg.hr
Orcid: https://orcid.org/0000-0002-2574-0617

ON THE APPLICATION OF WEIGHTED AM-GM INEQUALITY TO PROFIT MAXIMIZATION PROBLEM IN THE CASE OF THE COBB-DOUGLAS PRODUCTION FUNCTION WITH TWO INPUT FACTORS

Abstract

Profit maximization in the case of the Cobb-Douglas production function is one of the fundamental problems in the microeconomic analysis of a company. In the literature, the problem of profit maximization with Cobb-Douglas technology is almost always solved by applying a differential calculus. Therefore, this paper aims to show how by applying the weighted arithmetic mean – geometric mean inequality (weighted AM-GM inequality) the problem of profit maximization with Cobb-Douglas production function with two input factors can be solved in an alternative, new way, without derivatives. Compared to the differential calculus, the application of the weighted AM-GM inequality bypasses a non-trivial check of the necessary and sufficient conditions for the optimal solution of the problem. The elegance of the new way of calculating the maximum profit originates from the direct application of the weighted AM-GM inequality and the very definition of a strict global maximum. However, it should be noted that the application of weighted AM-GM inequality, which belongs to the tools of elementary mathematics, should by no means be understood as superior, but as a complementary way to differential calculus in solving and better understanding this microeconomic problem.

Keywords: profit maximization, Cobb-Douglas production function, without calculus, weighted AM-GM inequality

JEL classification: C60, C65, D21, D24