Osječki matematički list 21 (2021), 19–32

Racionalne i ne-racionalne vrijednosti trigonometrijskih funkcija

Omer Kurtanović[*], Nenad Stojanović[†], Fatka Kulenović[‡]

Sažetak

U radu je izložena primjena Čebiševljevih polinoma prve i druge vrste kod dokazivanja ne-racionalnosti nekih vrijednosti trigonometrijskih funkcija. Odnosno, dât je osvrt na određivanja brojeva koji su racionalni višekratnici broja π, a za koje su vrijednosti sinusa, kosinusa i tangensa racionalni odnosno iracionalni brojevi. Pokazano je, da ako je $\cos\alpha$ racionalan broj tada je i $\cos n\alpha$ racionalan broj za svaki prirodan broj n, a ako su i $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ racionalni brojevi, tada je i $\sin n\alpha$ racionalan broj. Nadalje, pokazano je, da ako su m, n relativno prosti brojevi i $\cos\frac{n}{m}\pi$ je racionalan broj, tada je i $\cos\frac{\pi}{m}$ racionalan broj, kao i da je za svaki prirodan broj m veći od 3, broj $\cos\frac{\pi}{m}$ iracionalan. Razmatrana je također racionalnost i iracionalnost brojeva $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{n}$.

Ključne riječi: *trigonometrijske funkcije, Čebiševljevi polinomi, racionalne vrijednosti trigonometrijskih funkcija.*

[*] Ekonomski fakultet, Univerzitet u Bihaću, email: adsami@bih.net.ba
[†] Poljoprivredni fakultet, Univerzitet u Banja Luci, email: nenad.stojanovic@agro.unibl.org
[‡] Tehnički fakultet, Univerzitet u Bihaću, email: kulenovic.fatka@gmail.com

Omer Kurtanović, Nenad Stojanović, Fatka Kulenović

Rational and non-rational values of trigonometric functions

Abstract

The paper presents an application of Chebyshev polynomials of the first and second kind in proving the non-rationality of certain values of trigonometric functions. More precisely, we determine those rational multiples of the number π for which the values of sine, cosine and tangent are rational numbers, and for which these values are irrational numbers. We show that if $\cos\alpha$ is a rational number, then so is $\cos n\alpha$ for every natural number n, and if both $\sin\alpha$ and $\cos\alpha$ are rational numbers, then so is $\sin n\alpha$. Furthermore, it is shown that if m and n are relatively prime numbers and $\cos\frac{n}{m}\pi$ is a rational number, then $\cos\frac{\pi}{m}$ is also a rational number, while for every natural number $m>3$, the number $\cos\frac{\pi}{m}$ is irrational. We also discuss rationality and irrationality of numbers $\operatorname{tg}\frac{m}{n}\pi$.

Keywords: *trigonometric functions, Chebyshev polynomials, rational values of trigonometric functions.*

1 Uvod

Skupove cijelih i prirodnih (pozitivnih cijelih) brojeva označavat ćemo $\mathbb{Z}$ odnosno $\mathbb{N}$, a njihove ćemo elemente, većinom, označavati slovima m, n, k, ℓ, i, j. Skup racionalnih brojeva označavamo $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, D(m,n) = 1\right\}$ pri čemu je $D(k,\ell)$ najveći zajednički djelitelj (divizor) cijelih brojeva k i ℓ (dakle $D(m,n) = 1$ znači da su brojevi m i n relativno prosti). Razlomke $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ smatramo „jednakim“ i pišemo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, dakle identificiramo ih, ako je $ad = bc$. Racionalne brojeve, drugim riječima, shvaćamo kao „do kraja skraćene razlomke“. Realne brojeve koji nisu racionalni nazivamo *iracionalnim brojevima*. Za dva realna broja kaže se da su *sumjerljivi* ako je njihov kvocijent racionalan broj. Skup realnih brojeva označavamo s $\mathbb{R}$. ([1, 2, 3, 6])

Navedimo nekoliko osnovnih činjenica koje koristimo u daljnjem radu.

Teorem 1.1. *Ako je p prost broj, onda je $\sqrt{p}$ iracionalan broj.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\sqrt{p}$ racionalan broj. Tada ga možemo zapisati u obliku razlomka $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$ gdje su m, n relativno prosti brojevi. Kvadriranjem jednakosti $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$ dobivamo $p = \frac{m^2}{n^2}$, otkuda imamo jednakost $p \cdot n^2 = m^2$, pa p dijeli m^2. Kako je p prost broj slijedi da p dijeli m pa možemo uzeti da je $m = p \cdot s$, $s \in \mathbb{N}$. Zamijenimo li to u jednakosti $p \cdot n^2 = m^2$ dobivamo da je $p \cdot n^2 = p^2 s^2$ otkuda je $n^2 = p \cdot s^2$. Odatle slijedi da p dijeli n^2 pa, slično prethodnom, zaključujemo da p dijeli n. Dakle, p dijeli m i p dijeli n što je suprotno pretpostavci da su m, n relativno prosti brojevi, pa pretpostavka da je $\sqrt{p}$ racionalan broj nije istinita. □

Slično se dokazuje teorem.

Teorem 1.2. *Ako su p, q prosti brojevi, onda je $\sqrt{p \cdot q}$ iracionalan broj.* □

Teorem 1.3. *Neka su $u, v, w \in \mathbb{Z}$ takvi cijeli brojevi da je u djelitelj od $v \cdot w$ i pri tome su u, v relativno prosti. Tada je u djelitelj od w. Općenito vrijedi: ako je u djelitelj od $v^n w$, gdje je n bilo koji pozitivan cijeli broj, a u, v su relativno prosti, tada je u djelitelj od w.*

Dokaz. Rezultat na koji se oslanjamo u dokazu naziva se osnovni teorem aritmetike: *Faktorizacija svakog prirodnog broja $n > 1$ na proste faktore je jedinstvena do na poredak faktora*, [1]. Suglasno tom teoremu, brojeve u, v, w možemo rastaviti na proste faktore. Ukoliko je $v \cdot w$ djeljiv s u, tada su svi prosti faktori broja u ujedno i prosti faktori broja vw. Zaista, ako je p bilo koji prost broj u rastavu broja u s potencijom α, tada on ulazi u rastav broja $v \cdot w$ s potencijom β za neki $\beta \geq \alpha$. Dalje, kako u, v nemaju zajedničkih prostih faktora, to svi prosti faktori broja u ulaze u rastav broja w. Slijedi, u dijeli w. Posljednju tvrdnju teorema možemo obrazložiti analognim rasuđivanjem. Iz pretpostavke da su u, v relativno prosti, slijedi da su u i v^n također relativno prosti. Otuda, kao i ranije, zaključujemo da broj v^n nikako ne doprinosi djeljivosti broja $v^n w$ s u, pa zbog toga w jeste djeljiv s u. □

Teorem 1.4. *Ako algebarska jednadžba s cijelim koeficijentima*

$$c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0 \tag{1}$$

ima racionalni korijen $\frac{a}{b}$ i a i b su relativno prosti brojevi, tada je a djelitelj slobodnog člana c_0, a b djelitelj vodećeg koeficijenta c_n.

Dokaz. Neka je $\frac{a}{b}$ korijen jednadžbe (1), tada je

$$c_n \left(\frac{a}{b}\right)^n + c_{n-1} \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \cdots + c_2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + c_1 \left(\frac{a}{b}\right) + c_0 = 0\,. \tag{2}$$

Pomnožimo li obje strane jednakosti (2) sa b^n dobivamo

$$c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} b + \cdots + c_2 a^2 b^{n-2} + c_1 a b^{n-1} + c_0 b^n = 0\,. \tag{3}$$

Ako jednakost (3) napišemo u obliku

$$\begin{aligned} c_n a^n &= -c_{n-1} a^{n-1} b - \cdots - c_2 a^2 b^{n-2} - c_1 a b^{n-1} - c_0 b^n \\ &= b\left(-c_{n-1} a^{n-1} - \cdots - c_2 a^2 b^{n-3} - c_1 a b^{n-2} - c_0 b^{n-1}\right) \end{aligned}$$

nalazimo da b dijeli $c_n a^n$, odakle na osnovi teorema 1.3 zaključujemo da b dijeli c_n.

Napišemo li sada jednakost (3) u obliku

$$c_0 b^n = a\left(-c_n a^{n-1} - c_{n-1}a^{n-2}b - \cdots - c_2 ab^{n-2} - c_1 b^{n-1}\right),$$

nalazimo da a dijeli $c_0 b^n$, odakle na osnovi teorema 1.3 zaključujemo da a dijeli c_0, što je i trebalo pokazati. □

2 Formulacija problema

Predmet našeg interesa su racionalne i ne-racionalne vrijednosti trigonometrijskih funkcija nekih kutova. Naprimjer, zanima nas jesu li brojevi $\sin 2^\circ$, $\cos\frac{\pi}{27}$, $\operatorname{tg}\frac{7}{44}\pi$ racionalni ili iracionalni? Ili, jesu li brojevi π i $arctg\frac{1}{3}$ sumjerljivi? Ili općenito, za koje vrijednosti $\alpha = \frac{p}{q}\pi$, $p,q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, su brojevi $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ racionalni a za koje su iracionalni? Više o racionalnosti i iracionalnosti vrijednosti trigonometrijskih funkcija vidjeti u [3, 6, 11].

Poznato je:

1. da je $\cos\alpha \in \mathbb{Q}$ ako je $\alpha = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, i $\alpha = \frac{\pi}{3}(3\ell \pm 1)$, $\ell \in \mathbb{Z}$, i da su za te vrijednosti α brojevi $\cos\alpha \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$;
2. da je $\sin\alpha$ racionalan broj za $\alpha = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, i $\alpha = \frac{\pi}{6}(6\ell \pm 1)$, $\ell \in \mathbb{Z}$, i da je za te α, $\sin\alpha \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$;
3. dok je $\operatorname{tg}\alpha$ racionalan broj za $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ i $\alpha = \pm\frac{\pi}{4} + \ell\pi$, $\ell \in \mathbb{Z}$, i za te α je $\operatorname{tg}\alpha \in \{-1, 0, 1\}$.

Pokažimo, koristeći Čebiševljeve polinome, da su u svim ostalim slučajevima vrijednosti $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ za $\alpha = \frac{p}{q}\pi$ iracionalni brojevi. Ilustrirajmo to s dva primjera.

Primjer 2.1. *Uzmimo da je vrijednost kuta $\theta = \frac{\pi}{9}$. Da bismo, naprimjer, ispitali da li je $\cos\frac{\pi}{9}$ iracionalan ili racionalan broj koristeći jednadžbe s cijelim koeficijentima, iskoristimo poznate trigonometrijske jednakosti:*

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{4}$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \tag{5}$$

Rješenje. Ako stavimo da je $\alpha = 2\theta$, $\beta = \theta$, iz prve formule, nakon sređivanja, dobivamo jednakost

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\,. \tag{6}$$

Uvrstimo li u posljednju jednakost $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, ona postaje $\frac{1}{2} = 4\cos^3\frac{\pi}{9} - 3\cos\frac{\pi}{9}$. Promotrimo zato jednadžbu $\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x$, odnosno

$$8x^3 - 6x - 1 = 0. \tag{7}$$

Jednadžba (7) je jednadžba s cjelobrojnim koeficijentima. Primijenimo li na tu jednadžbu teorem 1.4, nalazimo da se među racionalnim korijenima mogu javiti brojevi $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}$. Provjerom se lako može utvrditi da nijedan od ovih brojeva ne zadovoljava jednadžbu (7), odnosno nije korijen te jednadžbe. Dakle, ona nema racionalnih korijena pa njeno rješenje $x = \cos\frac{\pi}{9}$ nije racionalan broj. ◀

Primjer 2.2. *Pokažimo da je broj* $\sin\frac{\pi}{18}$ *iracionalan.*

Rješenje. Ako u formuli (5) zamijenimo $\alpha = 2\theta$, $\beta = \theta$, nakon sređivanja dobivamo

$$\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta\ . \tag{8}$$

Zamijenimo li θ sa $\frac{\pi}{18}$ i iskoristimo jednakost $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, dobivamo $\frac{1}{2} = 3\sin\frac{\pi}{18} - 4\sin^3\frac{\pi}{18}$. Promotrimo jednadžbu $\frac{1}{2} = 3x - 4x^3$, odnosno $8x^3 - 6x + 1 = 0$. Kao i u prethodnom primjeru nije teško pokazati da ova jednadžba nema racionalnih korijena, iz čega slijedi da je broj $\sin\frac{\pi}{18}$ iracionalan. ◀

Na taj način smo pitanje racionalnosti odnosno ne-racionalnosti pojedinih vrijednosti trigonometrijskih funkcija povezali s jednadžbama s cjelobrojnim koeficijentima.

3 Racionalne vrijednosti trigonometrijskih funkcija i Čebiševljevi polinomi prve vrste

U primjerima smo za brojeve $\cos\frac{\pi}{9}$ i $\sin\frac{\pi}{18}$ pronašli odgovarajuće polinome s cijelim koeficijentima. Sljedeći teorem pokazuje da se za svaki prirodan broj n, broj $\cos n\alpha$ može iskazati kao vrijednost polinoma s cijelim koeficijentima stupnja n od $\cos\alpha$, a broj $\sin n\alpha$ kao produkt broja $\sin\alpha$ i vrijednosti polinoma s cijelim koeficijentima stupnja $n-1$ od $\cos\alpha$. Točnije, vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.1. *Za svaki prirodan broj n postoje polinomi T_n i U_{n-1} s cijelim koeficijentima čiji su stupnjevi n i $n-1$ respektivno, takvi da vrijedi*

$$\begin{aligned} \cos n\alpha &= T_n(\cos\alpha) \\ \sin n\alpha &= \sin\alpha\, U_{n-1}(\cos\alpha). \end{aligned} \tag{9}$$

Dokaz. Dokažimo teorem matematičkom indukcijom. Polinomi $T_1(x) := x$ i $U_0(x) := 1$ pokazuju da tvrdnja vrijedi za $n = 1$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za prirodan broj n, tj. da postoje polinomi T_n i U_{n-1} za koje je $\cos n\alpha = T_n(\cos\alpha)$ i $\sin n\alpha = \sin\alpha\, U_{n-1}(\cos\alpha)$. Pokažimo da je tada tvrdnja istinita i za $n+1$, tj. da postoje polinomi T_{n+1} i U_n takvi da vrijede jednakosti $\cos(n+1)\alpha = T_{n+1}(\cos\alpha)$ i $\sin(n+1)\alpha = \sin\alpha\, U_n(\cos\alpha)$.

Zaista,

$$\begin{aligned}\cos(n+1)\alpha &= \cos(n\alpha+\alpha) = \cos n\alpha\cos\alpha - \sin n\alpha\sin\alpha\\ &= T_n(\cos\alpha)\cos\alpha - \sin\alpha\, U_{n-1}(\cos\alpha)\sin\alpha\\ &= \cos\alpha\, T_n(\cos\alpha) - \sin^2\alpha\, U_{n-1}(\cos\alpha)\\ &= \cos\alpha\, T_n(\cos\alpha) - (1-\cos^2\alpha)\, U_{n-1}(\cos\alpha)\\ &=: T_{n+1}(\cos\alpha).\end{aligned}$$

Dakle, za svaki prirodan broj n postoji polinom T_n takav da je $\cos n\alpha = T_n(\cos\alpha)$.

Slično,

$$\begin{aligned}\sin(n+1)\alpha &= \sin(n\alpha+\alpha) = \cos n\alpha\sin\alpha + \sin n\alpha\cos\alpha\\ &= T_n(\cos\alpha)\sin\alpha + \sin\alpha\, U_{n-1}(\cos\alpha)\cos\alpha\\ &= \sin\alpha\big(T_n(\cos\alpha) + \cos\alpha\, U_{n-1}(\cos\alpha)\big)\\ &=: \sin\alpha\, U_n(\cos\alpha)\end{aligned}$$ $\square$

Navest ćemo dvije napomene.

1. Oznaka $=:$ koju smo upotrijebili u dokazu prethodnog teorema ima sljedeću ulogu: relacijom $A =: B$ označavamo činjenicu da smo ovime upravo definirali B, tj. da je B *po definiciji* jednako A. Ista se činjenica može izraziti i relacijom $B := A$. Drugim riječima, za proizvoljan realan broj α, u induktivnom koraku smo definirali

$$T_{n+1}(\cos\alpha) := \cos\alpha\, T_n(\cos\alpha) - (1-\cos^2\alpha)\, U_{n-1}(\cos\alpha),$$

i

$$\sin\alpha\, U_n(\cos\alpha) := \sin\alpha\big(T_n(\cos\alpha) + \cos\alpha\, U_{n-1}(\cos\alpha)\big),$$

tj. nakon kraćenja sa $\sin\alpha$,

$$U_n(\cos\alpha) := T_n(\cos\alpha) + \cos\alpha\, U_{n-1}(\cos\alpha).$$

2. Kako je funkcija $\cos\colon [0,\pi] \to [-1,1]$ strogo monotona surjekcija, dakle bijekcija, dokaz prethodnog teorema 3.1 pokazuje da su funkcije

$T_n, U_{n-1} \colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ dobivene u dokazu, restrikcije nekih polinoma (polinomi su definirani na cijelom skupu realnih brojeva). Međutim, polinom n-tog stupnja jednoznačno je određen svojim vrijednostima u $n+1$ različitih točaka, pa možemo odabrati $n+1$ različitih točaka baš iz intervala $[-1,1]$. Dakle, funkcije T_n, U_{n-1} mogu se na jednoznačan način proširiti do polinoma $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, koje ćemo i dalje označavati istim simbolima T_n i U_{n-1}.

Polinome T_n i U_{n-1} nazivamo *Čebiševljevim polinomima* prve i druge vrste, respektivno [5].

Teorem 3.2. *Vodeći koeficijent Čebiševljevih polinoma T_n i U_{n-1} jednak je 2^{n-1}.*

Prvo dokažimo tri leme.

Lema 3.1. *Za sve prirodne brojeve $n \in \mathbb{N}$ vrijede jednakosti*

$$\cos n\alpha = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j} \cos^{n-2j} \alpha \sin^{2j} \alpha \tag{10}$$

$$\sin n\alpha = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j+1} \cos^{n-2j-1} \alpha \sin^{2j+1} \alpha\,, \tag{11}$$

gdje je $\lfloor r \rfloor$ najveći cijeli broj koji nije veći od r.

Dokaz. Polazeći od Moivreove formule za potenciju kompleksnog broja i primjenom Newtonove formule za potenciju binoma, imamo niz jednakosti

$$\begin{aligned}
\cos n\alpha + i \sin n\alpha &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n \\
&= \cos^n \alpha + i\binom{n}{1}\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha + i^2\binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + i^3\binom{n}{3}\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + \\
&\quad + \cdots + i^{n-2}\binom{n}{n-2}\cos^2\alpha\sin^{n-2}\alpha + i^{n-1}\binom{n}{n-1}\cos\alpha\sin^{n-1}\alpha + i^n\sin^n\alpha \\
&= \Big(\cos^n\alpha - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + \cdots + (-1)^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\cos^{n-2\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\alpha\sin^{2\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\alpha\Big) + \\
&\quad + i\,\Big(\binom{n}{1}\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + \\
&\quad + \cdots + (-1)^{\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor + 1}\cos^{n-(2\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor+1)}\alpha\sin^{2\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor+1}\alpha\Big),
\end{aligned}$$

pa izjednačavanjem realnih odnosno imaginarnih dijelova na lijevoj i desnoj strani dobivamo tražene jednakosti. □

Stavimo li u (10) $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, tada jednakost $T_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha$ poprima oblik

$$\begin{aligned} T_n(\cos\alpha) &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j} \cos^{n-2j}\alpha \left(1 - \cos^2\alpha\right)^j \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j} \cos^{n-2j}\alpha \, (-1)^j \left(\cos^2\alpha - 1\right)^j, \end{aligned} \tag{12}$$

odnosno, jer je $(-1)^j(-1)^j = 1$,

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} x^{n-2j} \left(x^2 - 1\right)^j. \tag{13}$$

Vrijedi sljedeća lema.

Lema 3.2. *T_n je polinom stupnja n s cjelobrojnim koeficijentima i vodećim koeficijentom jednakim*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \tag{14}$$

Ove ćemo binomne koeficijente nazivati parnima*, a ostale* neparnima*.*

Dokaz. Kako su binomni koeficijenti cijeli brojevi, iz (13) je očito kako je T_n polinom s cijelim koeficijentima, i da je stupnja n. Raspišemo li formulu (13)

$$\begin{aligned} T_n(x) = \binom{n}{0} x^n \left(x^2-1\right)^0 + \binom{n}{2} x^{n-2} \left(x^2-1\right)^1 + \binom{n}{4} x^{n-4} \left(x^2-1\right)^2 + \\ + \binom{n}{6} x^{n-6} \left(x^2-1\right)^3 + \cdots + \binom{n}{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} x^{n-2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(x^2-1\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, \end{aligned}$$

vidi se da je koeficijent uz x^n jednak upravo sumi (14). □

Dokažimo još jednu lemu.

Lema 3.3. *Suma parnih binomnih koeficijenata jednaka je sumi neparnih binomnih koeficijenata.*

Dokaz. Neka je S_P suma parnih a S_N suma neparnih binomnih koeficijenata. Primijetimo da s jedne strane vrijedi jednakost $(1-1)^n = 0^n = 0$, a s druge strane je

$$(1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n},$$

otuda je

$$\begin{aligned} S_P &= \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \\ &= \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots + \binom{n}{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} = S_N. \end{aligned}$$

□

Ostaje da dokažemo teorem 3.2

Dokaz teorema 3.2. Prema lemi 3.3 je $S_P = S_N$ pa je

$$\begin{aligned} 2S_P &= 2S_N = S_P + S_N \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots + \binom{n}{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} \\ &= (1+1)^n = 2^n, \end{aligned}$$

te je

$$S_P = S_N = 2^{n-1}. \tag{15}$$

Dakle, zbog lema 3.2 i 3.3, vodeći koeficijent polinoma T_n jednak je 2^{n-1}.

Na sličan način provest ćemo i dokaz tvrdnje za polinom U_{n-1}. Prema (9) je $\sin \alpha U_{n-1} (\cos \alpha) = \sin n\alpha$ pa ako u formuli (11) za $\sin n\alpha$ supstituiramo $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$, dobivamo

$$\begin{aligned} \sin \alpha \, U_{n-1}(\cos \alpha) &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j+1} \cos^{n-2j-1} \alpha \, (1 - \cos^2 \alpha)^j \sin \alpha \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j+1} \cos^{n-2j-1} \alpha \, (-1)^j \, (\cos^2 \alpha - 1)^j \sin \alpha \end{aligned}$$

pa dijeljenjem obje strane sa $\sin \alpha$, uz $(-1)^j \, (-1)^j = 1$, zaključujemo da je

$$U_{n-1}(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} x^{n-2j-1} (x^2 - 1)^j.$$

Kao i u dokazu leme 3.2 vidimo kako je U_{n-1} polinom stupnja $n-1$ s cjelobrojnim koeficijentima i vodećim koeficijentom jednakim sumi neparnih binomnih koeficijenata, koja je prema (15) jednaka 2^{n-1}. □

Posljedica teorema 3.2 je

Korolar 3.1.

(i) Ako je $\cos\alpha$ *racionalan broj tada je i* $\cos n\alpha$ *racionalan broj.*

(ii) Ako su $\sin\alpha$ *i* $\cos\alpha$ *racionalni brojevi onda je i* $\sin n\alpha$ *racionalan broj.*

Dokaz. (i) Ako je $\cos\alpha \in \mathbb{Q}$ tada je i $\cos n\alpha = T_n(\cos\alpha) \in \mathbb{Q}$ jer je T_n polinom s cjelobrojnim koeficijentima.

(ii) Slično, ako su $\sin\alpha, \cos\alpha \in \mathbb{Q}$, onda je $\sin n\alpha = \sin\alpha\, U_{n-1}(\cos\alpha) \in \mathbb{Q}$ jer je U_{n-1} polinom s cjelobrojnim koeficijentima. □

Napomena: Primijetimo da obrat tvrdnje (i) nije istinit. Naprimjer, za $n = 2$ i $\alpha = \frac{\pi}{6}$ je $\cos 2\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, ali $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{Q}$. S druge strane, primjer $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, dok $\sin 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{Q}$, pokazuje kako $\sin n\alpha$ ne mora biti racionalan broj, iako $\sin\alpha$ jeste.

Teorem 3.3. *Ako su* $n, m \in \mathbb{N}$ *relativno prosti brojevi i* $\cos\frac{n}{m}\pi$ *je racionalan broj tada je i* $\cos\frac{\pi}{m}$ *racionalan broj.*

Dokaz. Ako su $n, m \in \mathbb{N}$ relativno prosti brojevi, tada postoje $k \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{Z}$ takvi da broj $k \cdot n$ pri dijeljenju s m daje ostatak 1, tj. $k \cdot n = \ell \cdot m + 1$ (to je posljedica Euklidovog algoritma, a više o tome može se naći u [1, 2, 6, 9]). Ako je $\cos\frac{n}{m}\pi$ racionalan broj tada je i

$$\begin{aligned}\cos k\left(\tfrac{n}{m}\pi\right) &= \cos\tfrac{kn}{m}\pi = \cos\left(\tfrac{\ell m+1}{m}\pi\right) = \cos\left(\ell\pi + \tfrac{\pi}{m}\right)\\ &= \cos(\ell\pi)\cos\tfrac{\pi}{m} = (-1)^l\cos\tfrac{\pi}{m}\end{aligned}$$

racionalan broj prema korolaru 3.1. □

Teorem 3.4. *Za svaki prirodan broj* $m > 3$*, broj* $\cos\frac{\pi}{m}$ *je iracionalan.*

Prikazat ćemo dva dokaza ovog teorema.

Prvi dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je za neki prirodan broj $m > 3$ broj $\cos\frac{\pi}{m}$ racionalan, i neka je $\cos\frac{\pi}{m} =: \frac{p_1}{q_1}$ za neke $p_1, q_1 \in \mathbb{N}$. U Kartezijevoj koordinatnoj ravnini Oxy promatrajmo pravilni $2m$-terokut s vrhovima $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{2m-1}$ na jediničnoj kružnici, pri čemu je $A_0 = (1, 0)$. Tada su vrhovi točke $A_k = \left(\cos\frac{k}{m}\pi, \sin\frac{k}{m}\pi\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 2m-1$. Kako je $\cos\frac{\pi}{m} \in \mathbb{Q}$, to su prema korolaru 3.1, apscise $\cos\frac{k\pi}{m}$ vrhova A_k također racionalni brojevi, $\cos\frac{k\pi}{m} =: \frac{p_k}{q_k}$ za neke $p_k, q_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \ldots, 2m-1$.

Prema (9), ordinate $\sin\frac{k}{m}\pi$ točaka A_k su $\sin\frac{k}{m}\pi = U_{k-1}\left(\cos\frac{\pi}{m}\right)\sin\frac{\pi}{m} =: \frac{r_k}{s_k}\sin\frac{\pi}{m}$ za neke $r_k, s_k \in \mathbb{N}$, jer je $\cos\frac{\pi}{m} \in \mathbb{Q}$ a U_{k-1} je polinom s cjelobrojnim koeficijentima. Neka je $D \in \mathbb{N}$ zajednički nazivnik svih razlomaka $\frac{p_k}{q_k}, \frac{r_k}{s_k}$, $k = 1, 2, \ldots, 2m-1$. Tada je $A_k = \left(\frac{M_k}{D}, \frac{N_k}{D}\sin\frac{\pi}{m}\right)$ za neke $M_k, N_k \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2, \ldots, 2m-1$.

Promatrajmo sve točke u ravnini Oxy oblika $\left(\frac{i}{D}, \frac{j}{D}\sin\frac{\pi}{m}\right)$, $i, j \in \mathbb{Z}$. One čine rešetku čiji je fundamentalni paralelogram pravokutnik sa stranicama $\frac{1}{D}$ i $\frac{1}{D}\sin\frac{\pi}{m}$. Uočimo da su svi vrhovi našeg pravilnog $2m$-terokuta elementi ove rešetke. Međutim, to nije moguće. Naime, niti jedan pravilni n-terokut za $n \geq 5$ ne može se smjestiti u ravninu, čak niti u 3-dimenzionalni prostor, tako da mu svi vrhovi budu točke neke rešetke (vidi [11, 10]). To pokazuje da za $m > 3$ broj $\cos\frac{\pi}{m}$ ne može biti racionalan. Q.E.D.

Drugi dokaz. Neka je $m \in \mathbb{N}$, $m > 3$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je broj $\cos\frac{\pi}{m}$ racionalan. Razlikujemo dva slučaja:

1. Broj $m > 3$ je neparan.
Kako je $-1 = \cos\pi = \cos(m\frac{\pi}{m}) = T_m(\cos\frac{\pi}{m})$, to je $T_m(\cos\frac{\pi}{m}) + 1 = 0$, gdje je T_m Čebiševljev polinom stupnja m. Dakle, $\cos\frac{\pi}{m}$ zadovoljava jednadžbu $P_m(x) = 0$, gdje je polinom P_m definiran s $P_m(x) := T_m(x) + 1$. Prema teoremu 3.2, vodeći koeficijent polinoma T_m, pa onda i polinoma P_m, jednak je 2^{m-1}. Nadalje, kako je m neparan to je $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor = \frac{m-1}{2}$, pa iz formule (13) nalazimo da je posljednji član polinoma T_m, tj. član s najmanjim eksponentom od x, jednak $\binom{m}{2\frac{m-1}{2}} x^{m-2\cdot\frac{m-1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{m-1}{2}} = (-1)^{\frac{m-1}{2}} m\,x$. Stoga je za neparne m slobodan član Čebiševljevog polinoma T_m jednak 0, pa je slobodni član polinoma P_m jednak 1. Kako je P_m polinom s cjelobrojnim koeficijentima, vodećim koeficijentom 2^{m-1} i slobodnim koeficijentom 1, prema teoremu 1.4 zaključujemo da njegova nultočka $\cos\frac{\pi}{m}$ mora biti oblika $\frac{1}{2^k}$, za neki $k \leq m-1$. No tada bi, jer je na intervalu $[0, \pi]$ kosinus monotono padajuća funkcija i $m > 3$, bilo $\frac{1}{2^k} = \cos\frac{\pi}{m} > \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, tj. $k = 0$, odnosno $\cos\frac{\pi}{m} = 1$, što ne može biti. Dobivena kontradikcija pokazuje da za neparan $m > 3$, broj $\cos\frac{\pi}{m}$ nije racionalan.

2. Broj $m > 3$ je paran. Postoje tri mogućnosti:
2 a. *m je potencija broja* 2. Zbog $m > 3$ je m djeljiv s 4, pa postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $m = 4k$. Tada nas jednakost

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(\frac{m}{4}\frac{\pi}{m}\right) = \cos\left(k\frac{\pi}{m}\right) = T_k(\cos\frac{\pi}{m}),$$

s obzirom na pretpostavku kako je broj $\cos\frac{\pi}{m}$ racionalan, dovodi do proturječnosti, jer na desnoj strani jednakosti imamo racionalan, a na lijevoj strani iracionalan broj. Dakle, $\cos\frac{\pi}{m}$ nije racionalan.

2 b. $m = 6$. Ovaj je slučaj trivijalan jer $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ nije racionalan broj.

2 c. *m nije potencija broja 2 i $m > 6$.* U ovom slučaju m ima neparan djelitelj $p > 3$, pa postoji $t \in \mathbb{N}$ takav da je $m = t\,p$. Pod pretpostavkom da je $\cos\frac{\pi}{m}$ racionalan broj, iz niza jednakosti

$$\cos\tfrac{\pi}{p} = \cos\big(\tfrac{m}{p}\tfrac{\pi}{m}\big) = \cos\big(t\cos\tfrac{\pi}{m}\big) = T_t\big(\cos\tfrac{\pi}{m}\big)$$

slijedi proturječnost, jer na desnoj strani je racionalan broj, a za broj na lijevoj strani vrijedi $\cos\frac{\pi}{p} \notin \mathbb{Q}$, budući je p neparan i veći je od 3 (vidi 1. slučaj). Time je završen i drugi dokaz teorema 3.4. □

Dokažimo sljedeću tvrdnju.

Lema 3.4.

$$\operatorname{tg} n\alpha = \operatorname{tg}\alpha\,\frac{\binom{n}{1} - \binom{n}{3}\operatorname{tg}^2\alpha + \binom{n}{5}\operatorname{tg}^4\alpha - \cdots + (-1)^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor+1}\operatorname{tg}^{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\alpha}{\binom{n}{0} - \binom{n}{2}\operatorname{tg}^2\alpha + \binom{n}{4}\operatorname{tg}^4\alpha - \cdots + (-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\operatorname{tg}^{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\alpha} \tag{16}$$

Dokaz. Zbog formula (10) i (11) vrijedi

$$\operatorname{tg} n\alpha = \frac{\sin n\alpha}{\cos n\alpha}$$

$$= \frac{\binom{n}{1}\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + \cdots + (-1)^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor+1}\cos^{n-2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-1}\alpha\sin^{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor+1}\alpha}{\binom{n}{0}\cos^n\alpha - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + \cdots + (-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\cos^{n-2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\alpha\sin^{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\alpha}$$

$$= \frac{\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha\Big(\binom{n}{1} - \binom{n}{3}\cos^{-2}\alpha\sin^2\alpha + \cdots + (-1)^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor+1}\cos^{-2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\alpha\sin^{2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\alpha\Big)}{\cos^n\alpha\Big(\binom{n}{0} - \binom{n}{2}\cos^{-2}\alpha\sin^{-2}\alpha + \cdots + (-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\cos^{-2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\alpha\sin^{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\alpha\Big)}$$

odakle kraćenjem s $\cos^{n-1}\alpha$ dobivamo jednakost (16). □

Teorem 3.5. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ prirodan broj. Brojevi $\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ su racionalni za $n = 1, 2, 8$, za $n = 4$, $\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ nije definiran, a za ostale n su brojevi $\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ iracionalni.*

Dokaz. Tvrdnje za $n = 1, 2, 4, 8$ su očite. Neka je, dakle, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 4, 8\}$. Zbog jednostavnosti uvedimo oznaku $\frac{2\pi}{n} =: \alpha$ i primijetimo da je tada $\operatorname{tg} n\alpha = \operatorname{tg} n\frac{2\pi}{n} = \operatorname{tg} 2\pi = 0$. Prema lemi 3.4 je $\operatorname{tg} n\alpha = 0$ ako i samo ako je ili $\operatorname{tg}\alpha = 0$ ili je brojnik u formuli (16) jednak 0.

U prvom slučaju, $\operatorname{tg}\alpha = 0$ znači da je $\frac{2\pi}{n} = \alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tj. $n = \frac{2}{k}$, pa kako je n prirodan broj, to k mora biti ili 1 ili 2, tj. $n = 2$ ili $n = 1$, ali te mogućnosti otpadaju jer smo pretpostavili da je $n \neq 1, 2, 4, 8$.

Promotrimo drugu mogućnost, tj. da je brojnik na desnoj strani jednakosti (16) jednak 0, tj. da za $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{2\pi}{n}$ vrijedi (ne zaboravite da je $\binom{n}{1} = n$)

$$n - \binom{n}{3} \operatorname{tg}^2\alpha + \binom{n}{5} \operatorname{tg}^4\alpha - \cdots + (-1)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} \operatorname{tg}^{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}\alpha = 0. \quad (17)$$

Kako je $n \neq 1, 2, 4, 8$, postoje dvije mogućnosti: ili je $n = 2^k$ za neki $k \geq 4$, ili postoji prost broj $p \geq 3$ takav da je $n = mp$ za neki $m \in \mathbb{N}$.

1. Neka je $n = 2^k$ za neki $k \geq 4$ i pretpostavimo da je $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{n} = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{2^k} \in \mathbb{Q}$. Prema lemi 3.4, tj. formuli (16), tada je i $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \operatorname{tg}\big(2^{k-4} \cdot \frac{2\pi}{2^k}\big) \in \mathbb{Q}$. Međutim, koristeći formulu za tangens polovine kuta dobivamo kontradikciju jer je $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} - 1$, što nije racionalan broj.

2. Ostaje slučaj kada postoji prost broj $p \geq 3$ takav da je $n = mp$ za neki $m \in \mathbb{N}$.

2 a. Neka je najprije $m = 1$, tj. $n = p$. Kako je p neparan to je $p - 1$ paran pa je $\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor = \frac{p-1}{2}$. Stoga jednakost (17) ima oblik (ne zaboravite da je $\binom{p}{p} = 1$)

$$p - \binom{p}{2} \operatorname{tg}^2\alpha + \binom{p}{5} \operatorname{tg}^4\alpha - \cdots + (-1)^{\frac{p-1}{2}} \operatorname{tg}^{p-1}\alpha = 0,$$

pa je $\operatorname{tg}\alpha$ korijen jednadžbe

$$p - \binom{p}{2} x^2 + \binom{p}{5} x^4 - \cdots + (-1)^{\frac{p-1}{2}} x^{p-1} = 0. \quad (18)$$

Pretpostavimo da je broj $\operatorname{tg}\alpha$ racionalan, tj. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $D(a, b) = 1$. Kako je (18) jednadžba s cijelim koeficijentima, koeficijentom uz najveću potenciju jednakim $(-1)^{\frac{p-1}{2}}$ i slobodnim članom jednakim p, to je, prema teoremu 1.3, $b = \pm 1$ a a je djelitelj od p, tj. $a = 1$ ili $a = p$. Za $a = 1$ je $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{n} = \operatorname{tg}\alpha = \pm 1$, tj. $\frac{2\pi}{n} = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$ za neki $k \in \mathbb{Z}$, te je $n = \frac{8}{4k \pm 1}$, a to je prirodan broj jedino za $k = 0$, tj. $n = 8$, što otpada jer promatramo slučaj kada je $n \neq 1, 2, 4, 8$. Ako je $a = p$, tj. $\operatorname{tg}\alpha = \pm p$, uvrštavanjem u jednadžbu (18) dobivamo

$$p = p^2 \left(\binom{p}{3} - \binom{p}{5} p^2 + \cdots - (-1)^{\frac{p-1}{2}} p^{p-3} \right),$$

odakle zaključujemo da je p^2 djelitelj od p, a kako je $p \neq \pm 1$, to nije moguće. Dakle, ako je $p \geq 3$ prost broj onda $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{p}$ nije racionalan broj.

2 b. Konačno, ostaje slučaj kada je $n = mp$ gdje je $p \geq 3$ prost broj i $m > 1$. Kada bi broj $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{n}$ bio racionalan, onda bi, prema lemi 3.4, i broj $\operatorname{tg}\big(m\frac{2\pi}{n}\big) = \operatorname{tg}\big(m\frac{2\pi}{mp}\big) = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{p}$ bio racionalan, a upravo smo bili pokazali da nije. Time je teorem u potpunosti dokazan. $\square$

4 Za vježbu

1. Neka je $q \geq 3$, $D(p,q) = 1$. Dokazati da su za $q \neq 6$ brojevi $\sin \frac{p\pi}{q}$ iracionalni.

2. Dokazati da je kvadrat jedini pravilni mnogokut u ravnini, čije su koordinate vrhova racionalni brojevi.

   Uputa: Primijetite da se $2\cos n\alpha$ može zapisati u obliku $Q_n(2\cos\alpha)$, gdje je Q_n polinom s cijelim koeficijentima čiji je vodeći koeficijent jednak jedinici. Naime, ako polinome Q_n definiramo rekurzivnom relacijom $Q_{n+1}(x) := x\,Q_n(x) - Q_{n-1}(x)$, $n = 1,2,3,\ldots$, i početnim polinomima $Q_0(x) := x^0 + 1$, $Q_1(x) := x$, tada su Q_n, $n = 0,1,2,\ldots$ polinomi s potrebnim svojstvom. Takvi su, naprimjer polinomi $Q_2(x) = x^2 - 2$, $Q_3(x) = x^3 - 3x$, $Q_4(x) = x^4 - 4x^2 + 2$.

Literatura

[1] A. Dujella, *Elementarna geometrija II dio*. Školska knjiga, Zagreb 1969.

[2] A. Ivić, *Uvod u analitičku teoriju brojeva*. Novi Sad 1996.

[3] I. Niven, *Numbers: rational and irrational*. New York 1961.

[4] A. Kirilov, O pravilnim mnogouglovima, funkciji Ojlera i brojevima Ferme. *Kvant*, No 6, 1994.

[5] C. J. Mason, D. C. Handscomb, *Chebyshev Polynomials*. CRC Press Company, New York 2003.

[6] B. Mićić, *Matematika*. Svjetlost, Sarajevo 1984.

[7] D. S. Mitrinović, *Specijalne funkcije, Zbornik zadataka i problema, Knjiga I*. Naučna knjiga, Beograd 1972.

[8] J. T. Rivlin, *The Chebyshev Polynomials*. John Wiley and Sons, IBM Corporation, New York 1974.

[9] R. Tošić, V. Vukosavljević, *Elementi teorije brojeva*. Alef, Novi Sad 1995.

[10] V. V. Vavilov, A. V. Ustinov, *Mnogouglovi na rešetkama*. MCHMO-Moskva, 2006.

[11] V. V. Vavilov, A. V. Ustinov, Polupravilni mnogouglovi na rešetkama. *Kvant*, No 6, 2007.