Osječki matematički list 21 (2021), 33–56

Sreća

Petar Žugec*, Davor Horvatić†

Sažetak

U članku analiziramo model uspjeha koji se temelji na doprinosu sreće i truda, s posebnim naglaskom na ulogu sreće u uspjehu najuspješnijih ljudi.

Ključne riječi: *sreća, trud, uspjeh, geometrijska vjerojatnost*

Luck

Abstract

We analyze a model of success based on luck and effort, with a special emphasis on a role of luck in the success of the most successful people.

Keywords: *luck, effort, success, geometric probability*

*Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, email: pzugec@phy.hr

†Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, email: davorh@phy.hr

1 Uvod

Kakvom god aktivnošću se bavimo, aktivno ulažemo trud, no u konačnom ishodu svih naših nastojanja i sreća igra određenu ulogu. Pod srećom, naravno, mislimo na povoljnost svih onih okolnosti nad kojima sami nemamo kontrolu, tj. na koje ne možemo utjecati svojim naporima. Oba aspekta uspjeha – i trud i sreća – posebno su nam potrebni kad se bavimo kakvom kompetitivnom djelatnošću (bilo kakvom vrstom natjecanja), kad smo podvrgnuti ocjenjivanju svojih sposobnosti, kad radimo kakav visokorizičan posao i sl. U ovome članku na temelju jednostavnog modela uspjeha istražit ćemo statističku ulogu sreće u ishodu bilo kakvih aktivnosti.

Trud t, sreću s i ukupan uspjeh u parametrizirat ćemo brojevima između 0 i 1, tj. između 0 % i 100 %. Njima određujemo koliki dio maksimalnog mogućeg truda smo uložili, koliki dio svih okolnosti van naše kontrole nam je išao na ruku te koliki smo uspjeh postigli na kakvoj prikladno definiranoj ljestvici uspješnosti, za koju pretpostavljamo da barem načelno postoji. Pri tome pretpostavljamo da sreća samo u određenoj mjeri može doprinijeti ukupnome uspjehu, pa čak i da su nam sve okolnosti bile naklonjene. Taj maksimalni utjecaj sreće na ukupan uspjeh opisat ćemo parametrom χ, također između 0 i 1. Jezgra našeg modela relacija je koja određuje ukupan uspjeh na temelju uloženog truda i naklonjene sreće:

$$u = \chi s + (1 - \chi)t. \tag{1}$$

Radi jasnoće, član u zvat ćemo ukupnim uspjehom, članove t i s *udjelima* truda i sreće, a članove χs i $(1-\chi)t$ *doprinosima* sreće i truda unutar ukupnoga uspjeha. Član χ zvat ćemo *važnost* sreće. Očito je da je $1-\chi$ važnost truda, tj. maksimalni mogući doprinos uspjehu koji možemo osigurati svojim naporima.

Ponekad volimo reći da smo određeni uspjeh postigli samo svojim trudom, radom i marljivošću. Ovime ne tvrdimo da nismo imali sreće ($s = 0$), već da ona nije igrala nikakvu ulogu u našem uspjehu, čime parametriziramo svoje shvaćanje važnosti sreće kao $\chi = 0$. No koliko nas iskreno može reći da ne postoje okolnosti van naše kontrole? Ili barem da nijedan korak na našem putu do uspjeha nije bio podložan okolnostima van našeg utjecaja? Zamislimo samo kakav prestižni posao koji zahtijeva besprijekorno zdravstveno stanje, npr. posao astronauta. Nikakva količina truda, znanja, psihičke stabilnosti, odlučnosti niti karaktera neće vam biti od pomoći ako nemate dovoljno sreće da ste rođeni bez bitnijih zdravstvenih teškoća, poput kakvog srčanog problema.

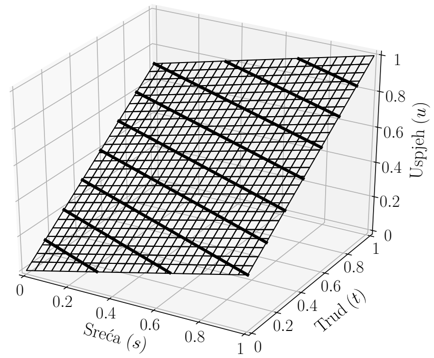
Promatrat ćemo varijacije truda i sreće između različitih ljudi te analizirati statistička svojstva njihova uspjeha. Udjele t i s, truda i sreće, tretirat ćemo kao slučajne, nezavisne i nekorelirane varijable. Pretpostavit ćemo da su njihove vrijednosti *uniformno* raspodijeljene između 0 i 1, što nam omogućava rješavati problem geometrijskim metodama. U slučaju kakve druge, neuniformne raspodjele morali bismo posegnuti za složenim integralnim računom, što je postupak koji komentiramo u završnom Dodatku (poglavlje 6). Prvo ćemo odrediti raspodjelu ukupnog uspjeha[1] koja slijedi iz pretpostavke uniformnih raspodjela truda i sreće. Taj rezultat ćemo iskoristiti u analizi sreće onih ljudi čiji je ukupan uspjeh iznad neke granice Λ (tj. $u \geq \Lambda$), što će nam dati uvid u ulogu sreće kod najuspješnijih ljudi.

2 Raspodjela uspjeha

U rješavanju problema geometrijskim metodama svakako će nam pomoći uvid da (1) za dani χ predstavlja jednadžbu ravnine u troparametarskom prostoru razapetom parametrima s, t, u. Primjer takve ravnine za $\chi = 0.3$ prikazan je slikom 1, unutar relevantnog raspona $s, t \in [0, 1]$. Primijetimo da ravnina uvijek prolazi točkama (0,0,0) i (1,1,1), dok njezino usmjerenje u prostoru ovisi o χ. Podebljanim crtama prikazana su geometrijska mjesta danog uspjeha u, za nekoliko različitih vrijednosti u. Drugim riječima, podebljane linije presjeci su ravnine (1) s nekom od ravnina $u =$ const. Za uniformno raspodijeljene udjele sreće i truda upravo je duljina tih isječaka mjera (raspodjele) vjerojatnosti danog ukupnog uspjeha. Grubo i ne sasvim ispravno, ali razumljivo iskazano, duljina tih isječaka mjeri „na koliko načina" možemo ostvariti dani uspjeh u, tj. koliko je različitih kombinacija sreće s i truda t koje ostvaruju željenu vrijednost u. U pozadini ovog opažanja ideja je geometrijske vjerojatnosti [1].

Slika 2 prikazuje projekcije dvaju isječaka konstantnog u na s-t ravninu (ovaj put za $\chi = 0.5$). Sasvim je jasno da ćemo pri određivanju rubnih točaka isječaka morati razmatrati odvojene slučajeve. Da bismo identificirali

[1] Ne treba očekivati da će raspodjela uspjeha biti uniformna ako su raspodjele truda i sreće uniformne. U ovu elementarnu statističku činjenicu možemo se uvjeriti iz svakodnevnog iskustva. Zamislimo bacanje dviju igraćih kocki. Na svakoj pojedinoj kocki dobit ćemo bilo koji broj između 1 i 6 s jednakom vjerojatnošću, tj. njihova raspodjela vjerojatnosti je uniformna. Međutim, što je sa zbrojem brojeva s dviju kocki? Zbrojeve 2 i 12 možemo dobiti samo na jedan način: $1+1$ i $6+6$. Zbrojeve 3 i 11 možemo dobiti na dva načina: $1+2$ i $2+1$, odnosno $5+6$ i $6+5$. I tako dalje, sve do zbroja 7 koji možemo dobiti na šest načina: $1+6$, $2+5$, $3+4$, $4+3$, $5+2$ i $6+1$. Dakle raspodjela zbroja uniformno raspodijeljenih brojeva više nije uniformna. Iako dosta udaljen od našeg problema sa samo dvjema varijablama s i t, koje u (1) zbrajamo i s dodatnim težinskim faktorima χ i $1-\chi$, uz raspodjelu zbroja slučajnih varijabli usko je vezan tzv. centralni granični teorem (eng. *central limit theorem*). U svojem bitnom dijelu teorem tvrdi da raspodjela zbroja jednako raspodijeljenih varijabli (međusobno jednako raspodijeljenih, ne nužno uniformnih) s povećanjem broja pribrojnika teži normalnoj, tj. Gaussovoj raspodjeli.



Slika 1. Primjer ravnine određene jednadžbom (1) za $\chi = 0.3$.

označene koordinate sa slike 2, prvo invertiramo (1) kako bismo dobili vezu truda i sreće pri danom uspjehu:

$$t_{\chi,u}(s) = \frac{u - \chi s}{1 - \chi}\,, \tag{2}$$

$$s_{\chi,u}(t) = \frac{u - (1-\chi)t}{\chi}\,. \tag{3}$$

Obje relacije jednadžbe su istoga pravca, onoga na kojem leži isječak ukupnog uspjeha u. One nam pomažu u nalaženju koordinata sa slike 2:

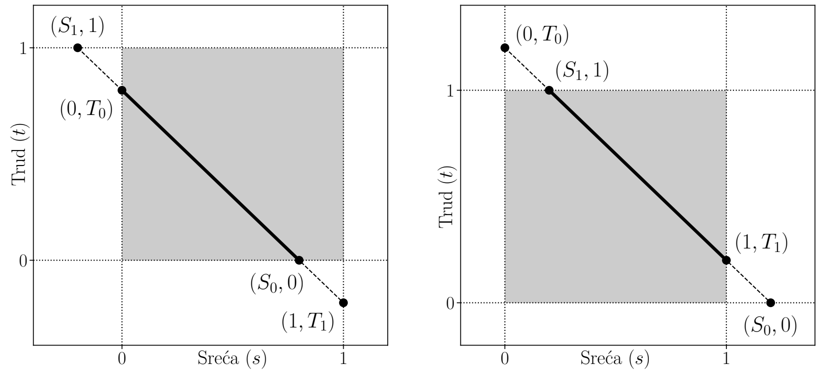
$$T_0 \equiv t_{\chi,u}(0) = \frac{u}{1-\chi}\,, \tag{4}$$

$$T_1 \equiv t_{\chi,u}(1) = \frac{u-\chi}{1-\chi}\,, \tag{5}$$

$$S_0 \equiv s_{\chi,u}(0) = \frac{u}{\chi}\,, \tag{6}$$

$$S_1 \equiv s_{\chi,u}(1) = \frac{u-(1-\chi)}{\chi}\,. \tag{7}$$

Ovisno o važnosti sreće χ imat ćemo dva režima za položaje rubnih točaka na s-osi i t-osi. Oba režima prikazana su slikom 3, na kojoj su zbog vizualne jasnoće potisnute oznake osi. Pri tome je, kao na slici 2, s-os horizontalna, a t-os vertikalna. Razlika između režima povezana je s nagibom isječaka, čiji utjecaj se očituje u tome leže li – za vrijednosti uspjeha u određenom intervalu oko $u = 0.5$ – obje rubne točke na s-osi ili na t-osi. Grafovi ovako usmjerenih osi prikazuju ovisnost $t_{\chi,u}(s)$ pa je iz (2) jasno



Slika 2. Projekcija isječaka danog ukupnog uspjeha u na s-t ravninu, za $\chi = 0.5$. Lijevo: $u = 0.4$; desno: $u = 0.6$.

da je nagib isječaka jednak $-\chi/(1-\chi)$. Lijevi graf prikazuje režim **A**, za $\chi \leq 1/2$, a desni graf režim **B**, za $\chi \geq 1/2$. Za vrijednosti uspjeha u nekom rasponu oko $u = 0$ i $u = 1$ rubne točke nalaze se na različito položenim osima (slučajevi **A1**, **A3**, **B1** i **B3**). Međutim, u prijelaznom području oko $u = 0.5$ rubne točke nalaze se ili na vertikalnim osima $s = 0$ i $s = 1$ (slučaj **A2**), ili na horizontalnim osima $t = 0$ i $t = 1$ (slučaj **B2**). Pune linije sa slike 3 označavaju granicu između pojedinih slučajeva unutar danoga režima, dok isprekidane linije prikazuju primjere isječaka u svakom od slučajeva. Relevantni položaji rubnih točaka obilježeni su vektorima $\vec{\sigma} = (\sigma_s, \sigma_t)$ i $\vec{\tau} = (\tau_s, \tau_t)$, gdje $\vec{\sigma}$ označava rubnu točku bližu s-osi, a $\vec{\tau}$ rubnu točku bližu t-osi (tako da je $\sigma_t < \tau_t$ i $\tau_s < \sigma_s$). Usporednim promatranjem slika 2 i 3 položaje rubnih točaka možemo parametrizirati kao:

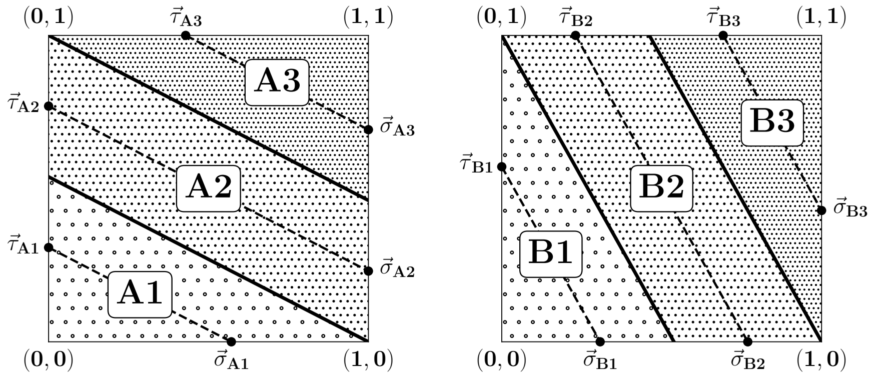
$$\vec{\sigma} = \begin{cases} (S_0, 0) & \text{ako} \quad S_0 \leq 1 \quad \text{tj.} \quad T_1 \leq 0 \quad \text{tj.} \quad u \leq \chi \\ (1, T_1) & \text{ako} \quad S_0 \geq 1 \quad \text{tj.} \quad T_1 \geq 0 \quad \text{tj.} \quad u \geq \chi \end{cases}, \tag{8}$$

$$\vec{\tau} = \begin{cases} (0, T_0) & \text{ako} \quad S_1 \leq 0 \quad \text{tj.} \quad T_0 \leq 1 \quad \text{tj.} \quad u \leq 1-\chi \\ (S_1, 1) & \text{ako} \quad S_1 \geq 0 \quad \text{tj.} \quad T_0 \geq 1 \quad \text{tj.} \quad u \geq 1-\chi \end{cases}, \tag{9}$$

pri čemu su višestruki navedeni uvjeti međusobno ekvivalentni te svaki od njih može biti prikladan ovisno o danim potrebama. Slika 2 jasno nam pokazuje da prethodne parametrizacije također možemo elegantno i kompaktno zapisati kao:

$$\vec{\sigma} = \big(\min(1, S_0)\,,\, \max(0, T_1)\,\big), \tag{10}$$

$$\vec{\tau} = \big(\max(0, S_1)\,,\, \min(1, T_0)\,\big). \tag{11}$$



Slika 3. Režimi **A** i **B** za određivanje položaja rubnih točaka isječaka zadanog uspjeha u, određeni važnošću sreće ($\chi_{\mathbf{A}} \leq 1/2$; $\chi_{\mathbf{B}} \geq 1/2$). Pojedini slučajevi unutar danog režima (**A1–A3** i **B1–B3**) odvojeni su punim linijama. Isprekidane linije prikazuju primjere isječaka u svakom od slučajeva. Horizontalna os je os sreće (s-os); vertikalna os je os truda (t-os).

Duljinu $\ell(u)$ isječaka danog uspjeha u vrlo je lako odrediti kao duljinu vektora razapetog rubnim točkama $\vec{\sigma}$ i $\vec{\tau}$:

$$\ell(u) = |\vec{\tau} - \vec{\sigma}| = \sqrt{(\tau_s - \sigma_s)^2 + (\tau_t - \sigma_t)^2}. \tag{12}$$

Pri tome $\ell(u)$ moramo odvojeno izračunati za svaki od pojedinih slučajeva **A1–A3** i **B1–B3**. Svi slučajevi su pregledno kategorizirani u tablici 1. Kako je svaki pojedini slučaj jednoznačno određen važnošću sreće χ i ukupnim uspjehom u, slika 4 na jasan način prikazuje domenu svih slučajeva unutar relevantnog parametarskog prostora.

Pažljivim promatranjem ishoda za $\ell(u)$ – s posebnim osvrtom na njihovu ovisnost o $\chi \gtreqless 1/2$ – primjećujemo da bismo zapis svih slučajeva mogli kompaktificirati uvođenjem sljedećih pokrata:

$$\chi_{\min} \equiv \min(\chi, 1 - \chi), \tag{13}$$

$$\chi_{\max} \equiv \max(\chi, 1 - \chi). \tag{14}$$

Valja primijetiti da je: $\chi_{\min} \in [0, 1/2]$, $\chi_{\max} \in [1/2, 1]$ te $\chi_{\min} + \chi_{\max} = 1$. Definicijom ovih članova apsorbirali smo razliku između režima **A** i **B**.

Tablica 1. Pregled rezultata za rubne točke iz (8) i (9) i za duljinu isječka danog uspjeha iz (12) po slučajevima ilustriranima slikom 3.

	$\chi \leq 1/2$	$\chi \geq 1/2$
$u < \chi_{\mathrm{min}}$	$\vec{\sigma}_{\mathbf{A1}} = (S_0, 0)$ $\vec{\tau}_{\mathbf{A1}} = (0, T_0)$ $\ell_{\mathbf{A1}}(u) = \frac{u\sqrt{\chi^2+(1-\chi)^2}}{\chi(1-\chi)}$	$\vec{\sigma}_{\mathbf{B1}} = (S_0, 0)$ $\vec{\tau}_{\mathbf{B1}} = (0, T_0)$ $\ell_{\mathbf{B1}}(u) = \frac{u\sqrt{\chi^2+(1-\chi)^2}}{\chi(1-\chi)}$
$\chi_{\mathrm{min}} \leq u \leq \chi_{\mathrm{max}}$	$\vec{\sigma}_{\mathbf{A2}} = (1, T_1)$ $\vec{\tau}_{\mathbf{A2}} = (0, T_0)$ $\ell_{\mathbf{A2}}(u) = \frac{\sqrt{\chi^2+(1-\chi)^2}}{1-\chi}$	$\vec{\sigma}_{\mathbf{B2}} = (S_0, 0)$ $\vec{\tau}_{\mathbf{B2}} = (S_1, 1)$ $\ell_{\mathbf{B2}}(u) = \frac{\sqrt{\chi^2+(1-\chi)^2}}{\chi}$
$\chi_{\mathrm{max}} < u$	$\vec{\sigma}_{\mathbf{A3}} = (1, T_1)$ $\vec{\tau}_{\mathbf{A3}} = (S_1, 1)$ $\ell_{\mathbf{A3}}(u) = \frac{(1-u)\sqrt{\chi^2+(1-\chi)^2}}{\chi(1-\chi)}$	$\vec{\sigma}_{\mathbf{B3}} = (1, T_1)$ $\vec{\tau}_{\mathbf{B3}} = (S_1, 1)$ $\ell_{\mathbf{B3}}(u) = \frac{(1-u)\sqrt{\chi^2+(1-\chi)^2}}{\chi(1-\chi)}$

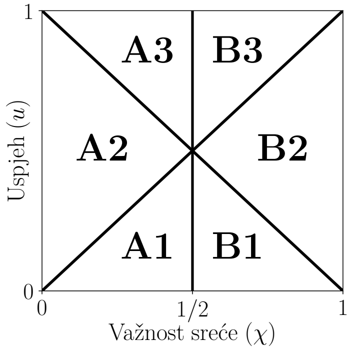
Sada sve rezultate za $\ell(u)$ iz tablice 1 možemo obuhvatiti zapisom:

$$\ell(u) = \begin{cases} u\ell_{\mathrm{max}}/\chi_{\mathrm{min}} & \text{ako } u < \chi_{\mathrm{min}} \quad [\mathbf{A1}, \mathbf{B1}] \\ \ell_{\mathrm{max}} & \text{ako } \chi_{\mathrm{min}} \leq u \leq \chi_{\mathrm{max}} \quad [\mathbf{A2}, \mathbf{B2}] \\ (1-u)\ell_{\mathrm{max}}/\chi_{\mathrm{min}} & \text{ako } \chi_{\mathrm{max}} < u \quad [\mathbf{A3}, \mathbf{B3}] \end{cases}, \tag{15}$$

gdje smo uveli sljedeću pokratu radi preglednijeg zapisa:

$$\ell_{\mathrm{max}} \equiv \sqrt{\chi_{\mathrm{min}}^2 + \chi_{\mathrm{max}}^2} \Big/ \chi_{\mathrm{max}}. \tag{16}$$

Kako su χ_{min} i χ_{max} simetrični na zamjenu $\chi \leftrightarrow 1-\chi$, istu simetriju dijele svi rezultati koji se *za svaki* $\chi \in [0, 1]$ mogu *u potpunosti* izraziti preko tih članova, bez zaostalih ovisnosti o samome χ, što je upravo slučaj s $\ell(u)$.



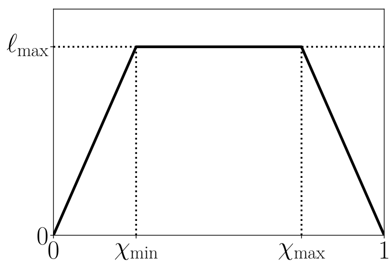
Slika 4. Parametarska domena slučajeva prikazanih slikom 3.

Slika 5 prikazuje oblik ovisnosti $\ell(u)$ za $\chi_{\text{min}} = 0.25$. Sve što nas dijeli od raspodjele vjerojatnosti uspjeha $p(u)$ jest normiranje na jedinicu, tj. na ukupnu vjerojatnost od 100 % za ostvarivanje bilo koje vrijednosti uspjeha. Za to trebamo odrediti ukupnu normu $\mathcal{L}$ funkcije $\ell(u)$:

$$\mathcal{L} = \int_0^1 \ell(u)\mathrm{d}u \tag{17}$$

koja odgovara površini ispod grafa sa slike 5. Zahvaljujući ovoj geometrijskoj činjenici $\mathcal{L}$ možemo – umjesto zamornim, iako tehnički nezahtjevnim integriranjem – odrediti jednostavnim iščitavanjem elementarnih doprinosa ukupnoj površini ispod trapezoidne funkcije, koji se sastoje od površine dvaju rubnih trokuta i jednoga središnjeg pravokutnika:

$$\mathcal{L} = \frac{\chi_{\text{min}}\ell_{\text{max}}}{2} + (\chi_{\text{max}} - \chi_{\text{min}})\ell_{\text{max}} + \frac{(1-\chi_{\text{max}})\ell_{\text{max}}}{2} = \chi_{\text{max}}\ell_{\text{max}}. \tag{18}$$



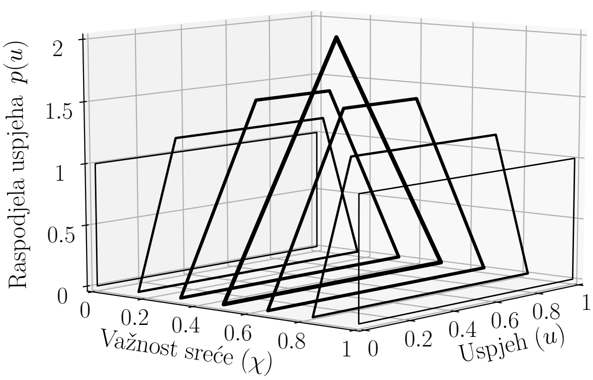
Slika 5. Oblik ovisnosti duljine isječka iz (15), za $\chi_{\text{min}} = 0.25$.

Konačan rezultat $\mathcal{L} = \chi_{\max}\ell_{\max}$ brzo slijedi korištenjem $1 - \chi_{\max} = \chi_{\min}$. Raspodjela vjerojatnosti uspjeha sad je jednostavno $p(u) = \ell(u)/\mathcal{L}$:

$$p(u) = \begin{cases} u/\chi_{\min}\chi_{\max} & \text{ako } u < \chi_{\min} & [\mathbf{A1}, \mathbf{B1}] \\ 1/\chi_{\max} & \text{ako } \chi_{\min} \leq u \leq \chi_{\max} & [\mathbf{A2}, \mathbf{B2}] \\ (1-u)/\chi_{\min}\chi_{\max} & \text{ako } \chi_{\max} < u & [\mathbf{A3}, \mathbf{B3}] \end{cases} \tag{19}$$

te je po konstrukciji normirana na jedinicu: $\int_0^1 p(u)\mathrm{d}u = 1$. Slika 6 prikazuje oblik raspodjele za nekoliko izabranih vrijednosti važnosti sreće χ. Za $\chi = 0$ i $\chi = 1$ raspodjela je uniformna jer je u tim slučajevima prema (1) uspjeh u potpunosti određen samo trudom ili samo srećom, za koje smo ispočetka pretpostavili da su uniformno raspodijeljeni. Za $\chi = 1/2$ općenita trapezoidna raspodjela degenerira u trokutastu, kao rezultat jednakog, tj. potpuno simetričnog utjecaja truda i sreće na ukupan uspjeh.

Trokutasta raspodjela za $\chi = 1/2$ može nas podsjetiti na raspodjelu dobivanja pojedinih zbrojeva s dviju istovremeno bačenih kocaka. U slučaju igraćih kocaka raspodjela je diskretna (ograničena na konačno mnogo ishoda), dok je u (19) raspodjela kontinuirana: moguć je bilo koji ishod između 0 i 1. Stoga bismo raspodjelu $p(u)$ mogli poistovijetiti s raspodjelom dobivanja *prosjeka* brojeva s dviju istovremeno bačenih *igraćih kugli* na kojima je svakoj točki oplošja pridružen jedinstveni realni broj između 0 i 1. Da je svakoj točki oplošja uopće moguće pridružiti jedinstven realni broj – što doslovno znači da je broj točaka na sferi jednak broju točaka unutar intervala $[0, 1]$ – nije nimalo trivijalna spoznaja. Više o ovoj temi (a i sam dokaz tvrdnje) zainteresirani čitatelj može naći u [2].



Slika 6. Raspodjela uspjeha (19) za izabrane vrijednosti važnosti sreće.

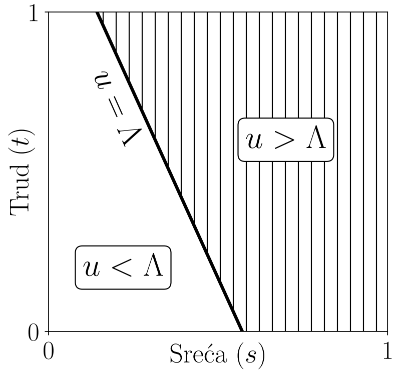
3 Sreća najuspješnijih ljudi

Neka u kakvoj djelatnosti postoji minimalna razina uspjeha Λ koju je potrebno postići da bismo ishod mogli smatrati uspješnim: $u \geq \Lambda$. Ovisno o svojem poimanju uspjeha, možemo zamisliti postizanje prolazne ili najviše ocjene na kakvom ispitu. Neka je pri tome važnost truda $1 - \chi$ manja od postavljene granice Λ. Na primjer, granica uspjeha za postizanje najviše ocjene je $\Lambda = 90$ %, dok su – koliko god nam se to činilo nepoželjnim – okolnosti nad kojima nemamo kontrolu toliko bitne da je maksimalni doprinos truda (za maksimalan uloženi udio truda od $t = 1$) razmjerno nizak, recimo $1 - \chi = 80$ %. Tada je jasno da bez određenog minimalnog doprinosa sreće – u ovom slučaju doprinosa od $\chi s = 10$ %, odnosno udjela sreće od čak $s = 50$ % – nikako ne možemo dosegnuti željenu granicu uspjeha Λ. Sada je očito: čak i ako je raspodjela sreće uniformna *u ukupnoj populaciji*, raspodjela sreće najuspješnijih ljudi više nije ista. U našem primjeru iz raspodjele onih koji su postigli najvišu ocjenu na ispitu potpuno su izbačeni svi čiji je udio sreće ispod 50 %.

3.1 Raspodjela sreće

Slika 7 ilustrira kako ćemo raspodjelu sreće $f_{\chi,\Lambda}(s)$ najuspješnijih ljudi (za koje je $u \geq \Lambda$) odrediti geometrijskim metodama. Za dani udio sreće s raspodjela $f_{\chi,\Lambda}(s)$ određena je onim udjelom ljudi koji su se našli iznad granice uspjeha Λ, što je na slici 7 prikazano vertikalnim linijama. Dakle, duljine tih vertikalnih linija upravo odgovaraju traženim vrijednostima raspodjele $f_{\chi,\Lambda}(s)$. Pri tome slika 7 prikazuje primjer u kojem je granica uspjeha $u = \Lambda$ unutar područja **B2** (vidi sliku 3) jer se tom slučaju raspodjela $f_{\chi,\Lambda}(s)$ sastoji od svih triju kvalitativno različitih dijelova: trivijalnih dijelova u kojima je jednaka ili 0 ili 1, i dijela u kojem poprima netrivijalnu ovisnost o s. Već unaprijed možemo predvidjeti oblike cjelokupne raspodjele u svakom od slučajeva **A1–A3** i **B1–B3**. Za to samo moramo zamisliti da granica $u = \Lambda$ odgovara nekoj od isprekidanih linija unutar pojedinih područja sa slike 3. Netrivijalni dio ovisnosti tek trebamo odrediti, no označimo li ga zasad simbolički kao $\circledast$, po slučajevima predviđamo:

$$\begin{aligned}
&f_{\chi,\Lambda}^{(\mathbf{A1},\mathbf{B1})}(s) = \circledast \text{ ili } 1, \\
&f_{\chi,\Lambda}^{(\mathbf{A2})}(s) = \circledast, \\
&f_{\chi,\Lambda}^{(\mathbf{B2})}(s) = 0 \text{ ili } \circledast \text{ ili } 1, \\
&f_{\chi,\Lambda}^{(\mathbf{A3},\mathbf{B3})}(s) = 0 \text{ ili } \circledast\,.
\end{aligned} \tag{20}$$



Slika 7. Geometrijski prikaz kojim ćemo analizirati statistiku sreće ljudi čiji je uspjeh iznad neke željene granice Λ ($u \geq \Lambda$).

Granica uspjeha $u = \Lambda$ sa slike 7 određena je već poznatom ovisnošću $t_{\chi,\Lambda}(s)$ iz (2). Sada pažljivim promatranjem uočavamo da je gornja granica raspodjele $f_{\chi,\Lambda}(s)$ uvijek 1, dok je donja granica: jednaka 0 ako $t_{\chi,\Lambda}(s) \leq 0$; jednaka $t_{\chi,\Lambda}(s)$ ako $0 \leq t_{\chi,\Lambda}(s) \leq 1$; jednaka 1 ako $1 \leq t_{\chi,\Lambda}(s)$. Sve ove slučajeve možemo obuhvatiti sljedećim zapisom:

$$f_{\chi,\Lambda}(s) = 1 - \min\Big[1, \max\big[0, t_{\chi,\Lambda}(s)\big]\Big]. \tag{21}$$

Želimo li ovo jasno raspisati preko uvjeta na udio sreće s, izrazimo već poznate uvjete na $t_{\chi,\Lambda}(s)$ kao (primijetimo promjenu smjera nejednakosti):

$$t_{\chi,\Lambda}(s) \gtreqless 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad s \lesseqgtr \tfrac{\Lambda}{\chi}\,, \tag{22}$$

$$t_{\chi,\Lambda}(s) \gtreqless 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad s \lesseqgtr \tfrac{\Lambda-(1-\chi)}{\chi}\,. \tag{23}$$

Uvjet iz (23) nastupit će ranije, s obzirom da je njegov brojnik manji od onoga iz (22). Prema tome, raspisom $t_{\chi,\Lambda}(s)$ unutar (21) imamo:

$$f_{\chi,\Lambda}(s) = \begin{cases} 0 & \text{ako } s < \frac{\Lambda-(1-\chi)}{\chi} \\ 1 - \dfrac{\Lambda - \chi s}{1-\chi} & \text{ako } \frac{\Lambda-(1-\chi)}{\chi} \leq s < \frac{\Lambda}{\chi} \\ 1 & \text{ako } \frac{\Lambda}{\chi} \leq s \end{cases}. \tag{24}$$

Drugi član upravo je oblik netrivijalne ovisnosti $\circledast$ koju smo predvidjeli u (20). Ovdje smo pažljivo namjestili granične slučajeve nejednakosti (relacije $<$ i $\leq$) tako da se za $\chi = 1$ ne može pojaviti dijeljenje nulom, jer je nemoguće ostvariti $\Lambda \leq s < \Lambda$. U istom slučaju – kad jedino sreća određuje uspjeh – na samoj granici $s = \Lambda$ osigurali smo i da vrijedi $f_{1,\Lambda}(\Lambda) = 1$ jer uvjetom $u \geq \Lambda$ i samu graničnu vrijednost Λ smatramo obuhvaćenom.

Rješenjem (24) formalno smo potvrdili da su najuspješniji ljudi oni koje favorizira sreća, s obzirom da je među njima najveći udio onih čija je sreća visoka (raspodjela je najviša na najvišim vrijednostima sreće). I ne samo to. Kao što smo već naslutili, za dovoljno visoku granicu uspjeha Λ postoji donja granica sreće potrebne za ostvarenje uspjeha $u \geq \Lambda$. Vidimo da je ta minimalna vrijednost jednaka $s_{\text{min}} = [\Lambda - (1-\chi)]/\chi$ te da postoji (kao veća od nule) pod uvjetom $\Lambda > 1 - \chi$, tj. upravo onda kad je granica uspjeha veća od maksimalnog doprinosa koji možemo postići samim trudom. U takvim okolnostima, koliko god truda i rada uložili, nikako ne možemo uspjeti u djelatnosti koja zahtijeva $u \geq \Lambda$, ako udio sreće u našim nastojanjima nije iznad s_{min}. Ovo također znači sljedeće: kad sreća ne bi imala nikakvog utjecaja na uspjeh ($\chi = 0$), neki od najuspješnijih ljudi bili bi oni koji za $\chi > 0$ uopće ne prelaze granicu uspjeha, a ulažu visok trud. I suprotno: neki od onih koji su prešli granicu uspjeha u okolnostima $\chi > 0$, bez utjecaja sreće to ne bi bili postigli. Pomalo neugodna, ali matematički neizbježna činjenica. Međutim, to ne treba shvatiti kao tvrdnju da trudom ne možemo postići uspjeh, pa se prepustiti očaju. Naprosto, to znači da ne možemo postići uspjeh *samo* trudom, i to samo u specifičnim okolnostima (ako $\Lambda > 1 - \chi$). Osim toga, ovo ne znači da u okolnostima povećane važnosti sreće većinski uspijevaju oni koji ne ulažu trud. Naprotiv, već je iz (1) jasno da su za visok uspjeh tipično potrebni *i* visoka sreća *i* visok trud. Ovu činjenicu potvrdit ćemo u poglavlju 4.

3.2 Norma raspodjele

Sad nas prirodno zanima i ovisnost očekivanog (tj. prosječnog) udjela sreće najuspješnijih ljudi o važnosti sreće χ i granici uspjeha Λ. Da sreća ne igra nikakvu ulogu ($\chi = 0$) ili da nemamo ograničenja na uspjeh ($\Lambda = 0$), očekivani udio sreće bio bi jednak 50 % jer bi sve vrijednosti sreće od 0 % do 100 % ponovno bile jednoliko raspodijeljene među najuspješnijima. No već znamo da za $\chi > 0$ i ($\Lambda > 0$) u najvećoj mjeri uspijevaju oni koje sreća favorizira, stoga je očito da među takvima očekivani udio sreće gravitira vrijednostima višim od „nepristranih" 50 %. Da bismo tu očekivanu vrijednost izračunali, prvo moramo odrediti udio onih koji uopće prolaze granicu uspjeha Λ, što je ekvivalentno normi $\mathcal{F}_{\chi,\Lambda}$ raspodjele $f_{\chi,\Lambda}(s)$:

$$\mathcal{F}_{\chi,\Lambda} = \int_0^1 f_{\chi,\Lambda}(s)\mathrm{d}s. \tag{25}$$

Oblik raspodjele $f_{\chi,\Lambda}(s)$ dovoljno je jednostavan da bismo bez većih tehničkih problema mogli provesti prethodnu integraciju. Pri tome bismo integral morali rastaviti po dijelovima iz (24). U općenitom zapisu tih dijelova koristit ćemo pokrate S_0, S_1, T_0, T_1 iz (4)–(7), u kojima na mjesto uspjeha u sada treba uvrstiti granicu uspjeha $u = \Lambda$:

$$\mathcal{F}_{\chi,\Lambda} = \int_0^{\max(0,S_1)} 0 \cdot \mathrm{d}s + \int_{\max(0,S_1)}^{\min(S_0,1)} \left(1 - \frac{\Lambda - \chi s}{1-\chi}\right) \mathrm{d}s + \int_{\min(S_0,1)}^{1} 1 \cdot \mathrm{d}s. \qquad (26)$$

Prvi od ovih integrala jednak je 0 pa ne doprinosi rezultatu, no ispisali smo ga radi uvida u sustavnost izmjene granica integracije.

No umjesto zamornim integriranjem, i normu $\mathcal{F}_{\chi,\Lambda}$ možemo geometrijski iščitati jer ona jednostavno odgovara površini dijela parametarskog prostora sreće i truda obuhvaćenog uvjetom $u \geq \Lambda$. Na slici 7 to je upravo površina osjenčanog dijela. Zamislimo li da na slici 3 crtkane linije prikazuju primjere graničnih linija $u = \Lambda$ u svakom od slučajeva **A1–A3** i **B1–B3**, tada lako možemo očitati ukupne površine iznad tih linija, koje poprimaju oblik trokuta ili trapeza.

Pri iščitavanju slučajeva sa slike 3 uputno je promatrati i sliku 2 kao podsjetnik na geometrijsko značenje koordinata S_0, S_1, T_0, T_1. U slučajevima **A1** i **B1** površinu trapeza određujemo oduzimanjem površine rubnog trokuta od površine ukupnog parametarskog prostora (kvadrata):

$$\mathcal{F}_{\chi,\Lambda}^{(\mathbf{A1},\mathbf{B1})} = 1 - \frac{S_0 T_0}{2}\,. \qquad (27)$$

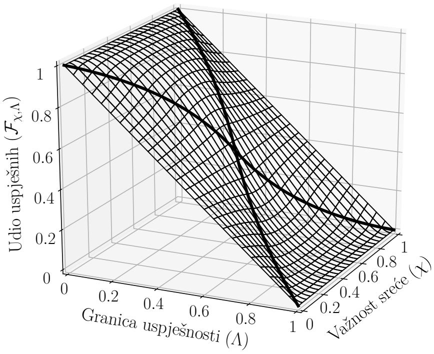
Slučajevi **A3** i **B3** najjednostavniji su i odgovaraju trokutu:

$$\mathcal{F}_{\chi,\Lambda}^{(\mathbf{A3},\mathbf{B3})} = \frac{(1-S_1)(1-T_1)}{2}\,. \qquad (28)$$

U slučajevima **A2** i **B2** ponovno imamo trapeze čije površine možemo iščitati rastavom na pripadni pravokutnik i trokut:

$$\mathcal{F}_{\chi,\Lambda}^{(\mathbf{A2})} = (1-T_0) + \frac{T_0 - T_1}{2} = 1 - \frac{T_0 + T_1}{2}\,, \qquad (29)$$

$$\mathcal{F}_{\chi,\Lambda}^{(\mathbf{B2})} = (1-S_0) + \frac{S_0 - S_1}{2} = 1 - \frac{S_0 + S_1}{2}\,. \qquad (30)$$



Slika 8. Udio $\mathcal{F}_{\chi,\Lambda}$ najuspješnijih ljudi iz (31) u ovisnosti o važnosti sreće χ i granici uspjeha Λ. Podebljane linije prikazuju prijelaz između kvalitativnih oblika rješenja (duž $\Lambda = \chi_{\min}$ ili $\Lambda = \chi_{\max}$).

Pažljivim raspisom svih slučajeva i sagledavanjem svih rješenja, ukupan rezultat možemo pregledno zapisati kao:

$$\mathcal{F}_{\chi,\Lambda} = \begin{cases} 1 - \dfrac{\Lambda^2}{2\chi_{\min}\chi_{\max}} & \text{ako } \Lambda < \chi_{\min} & [\mathbf{A1}, \mathbf{B1}] \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1-2\Lambda}{2\chi_{\max}} & \text{ako } \chi_{\min} \leq \Lambda \leq \chi_{\max} & [\mathbf{A2}, \mathbf{B2}] \\ \dfrac{(1-\Lambda)^2}{2\chi_{\min}\chi_{\max}} & \text{ako } \chi_{\max} < \Lambda & [\mathbf{A3}, \mathbf{B3}] \end{cases} . \tag{31}$$

Slika 8 prikazuje ovisnost ovog rezultata o važnosti sreće i granici uspjeha.

Budući da je ovisnost norme $\mathcal{F}_{\chi,\Lambda}$ o važnosti sreće χ u potpunosti izražena preko $\chi_{\min}$ i $\chi_{\min}$, koji su simetrični na zamjenu $\chi \leftrightarrow 1-\chi$, čitavo rješenje dijeli istu simetriju na zrcaljenje u χ:

$$\mathcal{F}_{\chi,\Lambda} = \mathcal{F}_{1-\chi,\Lambda}. \tag{32}$$

Slika 8 sugerira i osnu simetriju $\mathcal{F}_{\chi,\Lambda} = 1 - \mathcal{F}_{\chi,1-\Lambda}$, odnosno:

$$\mathcal{F}_{\chi,\Lambda} + \mathcal{F}_{\chi,1-\Lambda} = 1. \tag{33}$$

Jednom naslućena, ova simetrija se lako potvrđuje izravnom provjerom (31) jer ako je $\Lambda < \chi_{\min}$, tada $\chi_{\max} < 1 - \Lambda$, a ako je $\chi_{\min} \leq \Lambda \leq \chi_{\max}$, onda je također $\chi_{\min} \leq 1 - \Lambda \leq \chi_{\max}$. U kombinaciji, prethodne dvije relacije vode i na sljedeću:

$$\mathcal{F}_{\chi,\Lambda} + \mathcal{F}_{1-\chi,1-\Lambda} = 1. \tag{34}$$

Ova simetrija nije nezavisna od prethodnih dviju – zrcalne i osne – ali je prepoznajemo kao kvalitativno novu: to je centralna simetrija koja je također vizualno jasna sa slike 8.

3.3 Očekivani udio sreće

Konačno smo u mogućnosti istražiti očekivani udio sreće $\bar{s}_{\chi,\Lambda}$ najuspješnijih ljudi, čiji je uspjeh $u \geq \Lambda$. Prema općenitoj definiciji očekivanja imamo:

$$\bar{s}_{\chi,\Lambda} = \frac{1}{\mathcal{F}_{\chi,\Lambda}} \int_0^1 s f_{\chi,\Lambda}(s) \mathrm{d}s \tag{35}$$

te ponovno ne bi bilo tehnički zahtjevno izračunati integral – koji bismo morali rastaviti po slučajevima kao u (26) – jer je sada najkompliciranija podintegralna funkcija koja se pojavljuje kvadratna (s^2). Međutim, čak i ove očekivane vrijednosti možemo geometrijski iščitati. One odgovaraju s-koordinati „težišta“ svakog od geometrijskih područja čiju smo površinu $\mathcal{F}_{\chi,\Lambda}$ već izračunali. Položaje težišta lako ćemo odrediti rastavom tih područja na pravokutnike i trokute jer su položaji njihovih težišta dobro poznati; naravno, samo uz pretpostavku da su njihove „gustoće“ (tj. statističke težine svih pojedinih točaka) jednolike, što je u našem slučaju zadovoljeno pretpostavkom uniformnih distribucija sreće i truda u ukupnoj populaciji. Težište homogenog pravokutnika se, tako, nalazi točno u njegovome središtu. Udaljenost težišta homogenog trokuta od bilo koje od njegovih stranica jednaka duljini jedne trećine visine spuštene na tu stranicu; drugim riječima, udaljenost težišta od bilo kojeg vrha trokuta jednaka je duljini dviju trećina visine spuštene iz danog vrha. Pri izračunu položaja težišta cjelokupnog geometrijskog područja rastavom na manja područja u obzir moramo uzeti (statističku) težinu w_i svakog pojedinog (i-tog) doprinosa. U našem slučaju mjera te težine upravo su površine pravokutnika i trokuta preko kojih ćemo provesti rastav. Općenito, za koordinatu $\bar{s}$ težišta čitavog područja tada vrijedi: $\bar{s} = \sum_i w_i \bar{s}_i \big/ \sum_i w_i$, gdje su $\bar{s}_i$ koordinate težišta svakog manjeg područja iz rastava. Kod nas suma svih težinskih faktora odgovara površini dijela parametarskog prostora omeđenog s $u \geq \Lambda$, koju smo već odredili kao normu raspodjele: $\sum_i w_i = \mathcal{F}_{\chi,\Lambda}$.

U rastavu po slučajevima ponovno nam pomaže slika 3, pri čemu opet zamišljamo da su primjeri granice $u = \Lambda$ prikazani isprekidanim crtama, ovisno o tome unutar kojeg područja se granica našla. Radi jasnoće, u raspisu doprinosa ukupnome težištu za težinske faktore koristit ćemo raspoznatljiv zapis – $\{\Delta s \cdot \Delta t\}_\square$ ili $\{\frac{1}{2}\Delta s \cdot \Delta t\}_\triangle$ – unutar kojeg prvi član u umnošku predstavlja širinu područja u s-smjeru, drugi u t-smjeru, a oznaka iz indeksa jasno ukazuje radi li se o pravokutniku ili trokutu. Članovi koji množe ovakve zagrade bit će, naravno, s-koordinate težišta tih pravokutnika ili trokuta. Počnimo sa slučajem **A2**:

$$\bar{s}_{\chi,\Lambda}^{(\mathbf{A2})} = \frac{1}{\mathcal{F}_{\chi,\Lambda}^{(\mathbf{A2})}} \left[\frac{1}{2} \left\{ 1 \cdot (1 - T_0) \right\}_{\square} + \frac{2}{3} \left\{ \frac{1 \cdot (T_0 - T_1)}{2} \right\}_{\triangle} \right]. \tag{36}$$

Kao i kod norme $\mathcal{F}_{\chi,\Lambda}$, podrazumijeva se da su članovi S_0, S_1, T_0, T_1 određeni granicom uspjeha $u = \Lambda$. Iz (27)–(30) lako je potvrditi po svim slučajevima da suma težinskih članova iz vitičastih zagrada doista odgovara normi pripadnog slučaja. Nastavljamo sa slučajem **B2**:

$$\begin{aligned} \bar{s}_{\chi,\Lambda}^{(\mathbf{B2})} = \frac{1}{\mathcal{F}_{\chi,\Lambda}^{(\mathbf{B2})}} \Bigg[& \frac{1 + S_0}{2} \left\{ (1 - S_0) \cdot 1 \right\}_{\square} + \\ & \left(S_1 + \frac{2}{3}(S_0 - S_1) \right) \left\{ \frac{(S_0 - S_1) \cdot 1}{2} \right\}_{\triangle} \Bigg], \end{aligned} \tag{37}$$

koji smo ponovno riješili rastavom na jedan pravokutnik i jedan trokut. Slučajevi **A3** i **B3** posebno su jednostavni jer se sastoje samo od jednog trokuta:

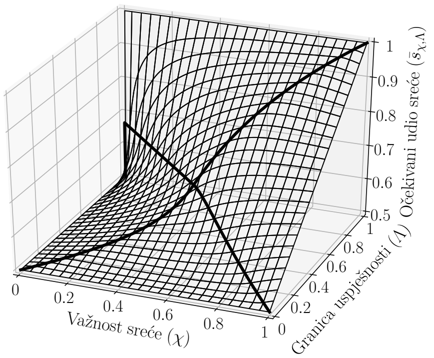
$$\bar{s}_{\chi,\Lambda}^{(\mathbf{A3},\mathbf{B3})} = 1 - \frac{1 - S_1}{3} \tag{38}$$

pa nam položaj njegova težišta odmah daje gotovo rješenje, bez potrebe za dodatnim korištenjem težinskih faktora (prva jedinica samo vodi računa o translaciji težišta prema osi $s = 1$). Ovakvim pristupom slučajeve **A1** i **B1** morali bismo rastaviti na jedan trokut i dva pravokutnika. Umjesto toga koristit ćemo zaobilaznu metodu: čitavom kvadratnom parametarskom prostoru poznatog položaja težišta ($\bar{s}_{\square} = 1/2$) oduzet ćemo jedan nedostajući trokut čiji položaj težišta nam je također poznat ($s_{\triangle} = S_0/3$) kako bismo odredili nepoznati položaj težišta $\bar{s}_?$ preostalog trapeza. Pri tome moramo na pažljiv način uzeti u obzir kako je težište čitavog parametarskog prostora određeno poznatim i nepoznatim težištima:

$$\frac{w_{\triangle}\bar{s}_{\triangle} + w_?\bar{s}_?}{w_{\triangle} + w_?} = \bar{s}_{\square}. \tag{39}$$

Budući da je $w_? = \mathcal{F}_{\chi,\Lambda}^{(\mathbf{A1},\mathbf{B1})}$, a površina čitavog parametarskog prostora je $w_{\triangle} + w_? = 1$, imamo: $w_{\triangle} = 1 - \mathcal{F}_{\chi,\Lambda}^{(\mathbf{A1},\mathbf{B1})}$. Sada je lako invertirati prethodni izraz da bismo odredili jedini nepoznati član $\bar{s}_? = \bar{s}_{\chi,\Lambda}^{(\mathbf{A1},\mathbf{B1})}$:

$$\bar{s}_{\chi,\Lambda}^{(\mathbf{A1},\mathbf{B1})} = \frac{1}{\mathcal{F}_{\chi,\Lambda}^{(\mathbf{A1},\mathbf{B1})}} \left[\frac{1}{2} - \left(1 - \mathcal{F}_{\chi,\Lambda}^{(\mathbf{A1},\mathbf{B1})} \right) \frac{S_0}{3} \right]. \tag{40}$$



Slika 9. Očekivani udio sreće $\bar{s}_{\chi,\Lambda}$ najuspješnijih ljudi iz (41) u ovisnosti o važnosti sreće χ i granici uspjeha Λ. Podebljane linije prikazuju prijelaz između kvalitativnih oblika rješenja (duž $\Lambda = \chi_{\min}$ ili $\Lambda = \chi_{\max}$). Valja primijetiti donju granicu vertikalne osi od 0.5.

Pažljivim raspisom i sređivanjem svih slučajeva, konačno rješenje možemo zapisati kao:

$$\bar{s}_{\chi,\Lambda} = \begin{cases} \dfrac{3\chi^2(1-\chi) - \Lambda^3}{3\chi\left[2\chi(1-\chi) - \Lambda^2\right]} & \text{ako } \Lambda < \chi_{\min} \quad [\mathbf{A1}, \mathbf{B1}] \\ \dfrac{3(1-\Lambda) - \chi}{3\left[2(1-\Lambda) - \chi\right]} & \text{ako } \chi \leq 1/2 \text{ i } \chi_{\min} \leq \Lambda < \chi_{\max} \quad [\mathbf{A2}] \\ \dfrac{3(\Lambda+\chi)(1-\Lambda) - (1-\chi)(1+2\chi)}{3\chi(1+\chi-2\Lambda)} & \\ \qquad \text{ako } \chi \geq 1/2 \text{ i } \chi_{\min} \leq \Lambda < \chi_{\max} & [\mathbf{B2}] \\ 1 - \dfrac{1-\Lambda}{3\chi} & \text{ako } \chi_{\max} \leq \Lambda \quad [\mathbf{A3}, \mathbf{B3}] \end{cases} \tag{41}$$

gdje, za razliku od svih prethodnih rezultata, više nemamo simetriju između χ i $1-\chi$ jer se razlika između $\chi \leq 1/2$ i $\chi \geq 1/2$ ne može *u potpunosti* apsorbirati kroz $\chi_{\min}$ i $\chi_{\max}$. Ta asimetrija jasno je vidljiva sa slike 9 koja prikazuje upravo određenu ovisnost očekivanog udjela sreće $\bar{s}_{\chi,\Lambda}$. Valja primijetiti da je najniža vrijednost očekivanja – uz pretpostavku uniformne distribucije sreće u ukupnoj populaciji – jednaka 1/2, što odgovara donjoj granici vertikalne osi grafa.

Nekoliko je istaknutih vrijednosti $\bar{s}_{\chi,\Lambda}$ koje smo na temelju očitih razmatranja mogli predvidjeti od samog početka, a koje relacija (41) mora reproducirati. U slučaju da sreća ne igra nikakvu ulogu u uspjehu ($\chi = 0$), sreća najuspješnijih ljudi nije ničime ograničena pa ona i među njima ostaje uniformna. Očekivana vrijednost uniformne raspodjele s intervala $s \in [0,1]$ sasvim očito je $1/2$, stoga:

$$\bar{s}_{0,\Lambda} = 1/2. \tag{42}$$

Isto tako, za $\Lambda = 0$ promatramo uspjeh svih ljudi, čija je raspodjela sreće ponovno uniformna raspodjela čitave populacije, pa opet:

$$\bar{s}_{\chi,0} = 1/2. \tag{43}$$

U slučaju da jedino sreća određuje uspjeh ($\chi = 1$) granica uspjeha Λ postaje jedinstvena granica same sreće ($s \geq \Lambda$) pa raspodjela sreće najuspješnijih ljudi ostaje uniforma, ali na intervalu $s \in [\Lambda, 1]$. Očekivana vrijednost je ponovno u sredini intervala, to jest:

$$\bar{s}_{1,\Lambda} = (1+\Lambda)/2. \tag{44}$$

Konačno, $\Lambda = 1$ priznaje samo potpuno uspješne ljude čiji i trud i sreća moraju biti stopostotni, *osim* ako sreća uopće ne utječe na uspjeh ($\chi = 0$), što je već poznat slučaj iz (42). Prema tome:

$$\bar{s}_{\chi,1} = \begin{cases} 1 & \text{ako } \chi > 0 \\ 1/2 & \text{ako } \chi = 0 \end{cases}. \tag{45}$$

Ovi istaknuti slučajevi mogu poslužiti kao mehanizam provjere ispravnosti općeg rješenja (41).

4 A trud?

Što kad bismo htjeli istu analizu provesti za trud, umjesto sreće? Bismo li morali ispočetka ponavljati sve do sada provedene račune? Nipošto! I to zahvaljujući simetriji izraza (1) na zamjenu sreće i truda te zahvaljujući njihovim jednakim pretpostavljenim raspodjelama. Naime, za važnost sreće χ izraz (1) ponaša se s obzirom na trud isto kao što bi se ponašao s obzirom na sreću da je njena važnost $1 - \chi$. Jednakost raspodjele sreće i truda u ukupnoj populaciji tada jamči da u sve preostale račune raspodjela truda ulazi na isti način kao i što je to činila i raspodjela sreće. Stoga konačni rezultati za trud, u takvim okolnostima, moraju biti simetrijski povezani s rezultatima za sreću. Raspodjelu sreće najuspješnijih ljudi koju smo ranije označavali s $f_{\chi,\Lambda}(s)$ označimo sad proširenom oznakom $f_{\chi,\Lambda}^{(\text{sreća})}(s)$ kako bismo je mogli razlikovati od očekivane raspodjele truda $f_{\chi,\Lambda}^{(\text{trud})}(t)$. Pri tome raspodjelu truda $f_{\chi,\Lambda}^{(\text{trud})}(t)$ najuspješnijih ljudi i dalje smatramo parametriziranu važnošću *sreće* χ kako bi se obje s istom oznakom odnosile na iste okolnosti (tj. ne treba reinterpretirati χ kao važnost truda). Budući da već znamo da se računi za trud uz važnost sreće χ ponašaju kao računi za sreću važnosti $1-\chi$, odmah slijedi rješenje:

$$f_{\chi,\Lambda}^{(\text{trud})}(t) = f_{1-\chi,\Lambda}^{(\text{sreća})}(t). \tag{46}$$

Primijetimo da je na desnoj strani jednakosti na mjesto *argumenta* sreće uvrštena željena *vrijednost* truda: $s = t$. Ista simetrija propagira se i do norme truda najuspješnijih ljudi pa u prvom koraku imamo $\mathcal{F}_{\chi,\Lambda}^{(\text{trud})} = \mathcal{F}_{1-\chi,\Lambda}^{(\text{sreća})}$, a zahvaljujući zrcalnoj simetriji iz (32) zaključak se još pojednostavnjuje:

$$\mathcal{F}_{\chi,\Lambda}^{(\text{trud})} = \mathcal{F}_{\chi,\Lambda}^{(\text{sreća})}. \tag{47}$$

Međutim, u slučaju norme $\mathcal{F}_{\chi,\Lambda}$ oznaka sreće ili truda sasvim je suvišna. I to ne zato što su tobože slučajno ispale jednake, već jer su norme sreće i truda *nužno* jednake, pa čak i da su im raspodjele unutar ukupne populacije različite! Naime, norma $\mathcal{F}_{\chi,\Lambda}$ površina je dijela parametarskog prostora (ili, općenitije, integral statističkih težina) koji se na isti način proteže preko s i t, neovisno o zamjeni $s \leftrightarrow t$ promatranog parametra. Ovo postaje još jasnije prepoznamo li da smo tu površinu – predstavljenu osjenčanim područjem sa slike 7 – mogli odrediti i integracijom raspodjele uspjeha iz (19):

$$\mathcal{F}_{\chi,\Lambda} = \int_{\Lambda}^{1} p(u)\mathrm{d}u, \tag{48}$$

bez eksplicitnog poziva bilo na sreću ili trud. Drugim riječima, $\mathcal{F}_{\chi,\Lambda}$ je udio ljudi koji su prešli granicu uspjeha Λ, što očito ovisi *i* o sreći *i* o trudu.

Konačno, simetrija iz (46) odražava se i u konačnom rješenju za očekivani udio truda najuspješnijih ljudi:

$$\bar{t}_{\chi,\Lambda} = \bar{s}_{1-\chi,\Lambda}. \tag{49}$$

Ovaj rezultat pokazuje da u tipičnim okolnostima – za neekstremne vrijednosti važnosti sreće kod kojih asimetrija između χ i $1-\chi$ sa slike 9 nije drastična – očekivani udio truda je visok kad je i očekivani udio sreće visok. Ovo je bitno imati na umu, kao suprotnost naivnome zaključku da bi visoka sreća mogla značiti da je nizak trud *potreban* (što je istina za $u = \Lambda$) umjesto da je *samo ponekad dovoljan* (što je istina za $u \geq \Lambda$). Time se prisjećamo da je za visok uspjeh i dalje uputno ulagati visok trud, umjesto da se samo prepustimo letargičnom iščekivanju naklonosti sreće.

5 Zadaci za razonodu

Zadatak 5.1. *Pokažite da se isti rezultat za normu* $\mathcal{F}_{\chi,\Lambda}$ *iz (31) dobiva integracijom raspodjele uspjeha* $p(u)$ *iz (19), prema receptu iz (48).*

Zadatak 5.2. *Odredite jednadžbe ravnine, osi i točke (u koordinatama* χ, Λ *i* $\mathcal{F}$*) s obzirom na koje norma* $\mathcal{F}_{\chi,\Lambda}$ *pokazuje zrcalnu, osnu i centralnu simetriju iz (32), (33) i (34).*

Zadatak 5.3. *Provjerom potvrdite da se različiti slučajevi unutar rješenja (19), (24), (31) i (41) glatko spajaju na prijelazu uvjeta.*

Zadatak 5.4. *Provjerom potvrdite da su uvjeti u (19), (24), (31) i (41) tako izabrani da su izbjegnute sve mogućnosti dijeljenja nulom.*

Zadatak 5.5. *Provjerom potvrdite da norma* $\mathcal{F}_{\chi,\Lambda}$ *iz (31) zadovoljava simetrije iz (32), (33) i (34) te da očekivani udio sreće* $\bar{s}_{\chi,\Lambda}$ *iz (41) reproducira posebne slučajeve (42)–(45).*

Zadatak 5.6. *Izravnom integracijom iz (25) i (35) – a po receptu iz (26) – rekonstruirajte konačna rješenja (31) i (41) za normu* $\mathcal{F}_{\chi,\Lambda}$ *i očekivanje* $\bar{s}_{\chi,\Lambda}$*.*

Zadatak 5.7. *Želite li se sami okušati u izvodu, čitav postupak iz poglavlja 3 ponovite za trud kako biste potvrdili rezultate iz (46), (47) i (49).*

Zadatak 5.8. *U programskome jeziku po vlastitom izboru iscrtajte nekoliko jednodimenzionalnih grafova ovisnosti (24), (31) i (41) – nekoliko ovisnosti o* χ *za dani* Λ*, nekoliko ovisnosti o* Λ *za dani* χ *te ovisnosti duž linija* $\Lambda = \chi$ *i* $\Lambda = 1 - \chi$ *(što odgovara podebljanim linijama sa slika 8 i 9).*

Zadatak 5.9. *U programskome jeziku po vlastitom izboru napišite računalnu simulaciju kojom ćete – bilo za dane* χ *i* Λ*, bilo za čitav raspon njihovih vrijednosti – rekonstruirati raspodjelu uspjeha iz (19), raspodjelu sreće najuspješnijih ljudi iz (24), njezinu normu iz (31) i očekivanu vrijednost iz (41). Potrebno je uniformno generirati vrijednosti sreće* s *i truda* t *na intervalu* $[0, 1]$*, izračunati pripadni uspjeh prema (1) te dobivene vrijednosti* s*,* t *i* u *na prikladan način histogramirati, brojati i usrednjavati. Usporedite dobivene rezultate s egzaktnima, bilo izravnom usporedbom pojedinih brojeva – pri čemu će rezultati simulacije imati pripadnu statističku nepouzdanost koju se može izračunati i uzeti u obzir pri ocjeni slaganja – bilo grafičkim preklopom egzaktnih i simuliranih raspodjela, tj. ovisnosti.*

6 Dodatak

Za ljubitelje integrala sad ćemo prikazati kako bismo proveli ranije račune za proizvoljne raspodjele truda i sreće. Naime, u slučaju neuniformnih raspodjela pojedine točke parametarskog prostora, tj. pojedini parovi vrijednosti (s,t) više nemaju iste statističke težine pa geometrijske mjere dijelova tog prostora (duljine linija, površine ploha) više nisu adekvatne mjere statističkih veličina određenih takvim raspodjelama. Oznakama S, T, U sad ćemo jasno obilježiti na što se odnosi koja veličina: sreću (S), trud (T) ili uspjeh (U). Tako, na primjer, oznake $p_{\mathrm{S}}(s)$, $p_{\mathrm{T}}(t)$ i $p_{\mathrm{U}}(u)$ za raspodjele sreće, truda i uspjeha podrazumijevaju da su p_{S}, p_{T} i p_{U} općenito *različite funkcionalne ovisnosti* o pripadnim varijablama s, t i u.

Neka je $\mathrm{d}^2 P_{\mathrm{ST}}(s,t)$ združena *vjerojatnost* sreće i truda: da se sreća nađe unutar beskonačno uskog intervala širine $\mathrm{d}s$ oko vrijednosti s te da se trud nađe unutar beskonačno uskog intervala širine $\mathrm{d}t$ oko vrijednosti t. Tada definiramo združenu *raspodjelu* vjerojatnosti sreće i truda kao:

$$p_{\mathrm{ST}}(s,t) \equiv \frac{\mathrm{d}^2 P_{\mathrm{ST}}(s,t)}{\mathrm{d}s\mathrm{d}t}. \tag{50}$$

U najopćenitijem slučaju raspodjele vjerojatnosti i truda mogu biti zavisne. Drugim riječima, sama raspodjela sreće može ovisiti o uloženome trudu i suprotno, uloženi trud može ovisiti o sreći koja nam je naklonjena. Na primjer, tek nakon što dovoljno truda uložimo u neku djelatnost, mogu nam se otvoriti prilike (recimo, mogućnost natjecanja za posao, nagradu ili što drugo) koje nam inače uopće ne bi bile na raspolaganju, a na čiji će ishod dalje utjecati i sreća, pored samog truda. S druge strane, nemamo li dovoljno sreće da nam se kakva aktivnost uopće nađe na raspolaganju, onda nećemo niti ulagati trud u nju; ili barem ne toliko kao da se profesionalno bavimo njome. Stoga u sasvim općenitom slučaju nismo slobodni unaprijed pretpostaviti sreću nezavisnom od truda. Uvijek možemo definirati raspodjelu $p_{\mathrm{S}}(s)$ same sreće, ali uz uvjet nespecificiranog truda, i raspodjelu $p_{\mathrm{T}}(t)$ samog truda, ali uz uvjet nespecificirane sreće. Takve reducirane raspodjele dobivamo tzv. marginalizacijom „najdublje“, združene raspodjele:

$$p_{\mathrm{S}}(s) \equiv \frac{\mathrm{d}P_{\mathrm{S}}(s)}{\mathrm{d}s} = \int_0^1 p_{\mathrm{ST}}(s,t)\mathrm{d}t, \tag{51}$$

$$p_{\mathrm{T}}(t) \equiv \frac{\mathrm{d}P_{\mathrm{T}}(t)}{\mathrm{d}t} = \int_0^1 p_{\mathrm{ST}}(s,t)\mathrm{d}s, \tag{52}$$

i sve su one pravilno normirane na jedinicu:

$$\int_0^1 \int_0^1 p_{\mathrm{ST}}(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \int_0^1 p_{\mathrm{S}}(s)\mathrm{d}s = \int_0^1 p_{\mathrm{T}}(t)\mathrm{d}t = 1. \tag{53}$$

Samo ako sreća i trud doista jesu nezavisni, vjerojatnost $\mathrm{d}^2 P_{\mathrm{S,T}}(s,t)$ para vrijednosti s i t može se prikazati umnoškom vjerojatnosti $\mathrm{d}P_{\mathrm{S}}(s)$ i $\mathrm{d}P_{\mathrm{T}}(t)$ za ostvarivanje dane sreće i danog truda: $\mathrm{d}^2 P_{\mathrm{S,T}}(s,t) = \mathrm{d}P_{\mathrm{S}}(s)\mathrm{d}P_{\mathrm{T}}(t)$, što povlači da se združena raspodjela vjerojatnosti nezavisnih[2] varijabli može prikazati umnoškom nezavisnih raspodjela:

$$p_{\mathrm{ST}}(s,t) = p_{\mathrm{S}}(s) p_{\mathrm{T}}(t). \tag{54}$$

U našim ranijim računima raspodjele sreće i truda bile su nezavisne i uniformne, odnosno obje jednake $p_{\mathrm{S}}(s) = p_{\mathrm{T}}(t) = 1$ jer je upravo jedinica konstanta koja je kompatibilna s uvjetom normiranja (53).

Sada želimo jednu od varijabli sreće i truda zamijeniti varijablom uspjeha jer ciljamo odrediti raspodjelu samog uspjeha, marginalizacijom po nepromijenjenoj varijabli. U tome nam pomaže „očuvanje vjerojatnosti", tj. neovisnost ukupne vjerojatnosti o varijabli kojom je iskazujemo:

$$|\mathrm{d}^2 P_{\mathrm{ST}}(s,t)| = |\mathrm{d}^2 P_{\mathrm{SU}}(s,u)| = |\mathrm{d}^2 P_{\mathrm{TU}}(t,u)|. \tag{55}$$

Raspisom preko pripadnih raspodjela vjerojatnosti:

$$|p_{\mathrm{ST}}(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t| = |p_{\mathrm{SU}}(s,u)\mathrm{d}s\mathrm{d}u| = |p_{\mathrm{TU}}(t,u)\mathrm{d}t\mathrm{d}u| \tag{56}$$

dolazimo do recepta za transformaciju raspodjela:

$$p_{\mathrm{SU}}(s,u) = p_{\mathrm{ST}}\big(s, t_{\chi,u}(s)\big) \left| \frac{\mathrm{d}t_{\chi,u}(s)}{\mathrm{d}u} \right|, \tag{57}$$

$$p_{\mathrm{TU}}(t,u) = p_{\mathrm{ST}}\big(s_{\chi,u}(t), t\big) \left| \frac{\mathrm{d}s_{\chi,u}(t)}{\mathrm{d}u} \right|. \tag{58}$$

Vidimo da smo apsolutnu vrijednost morali uzeti u obzir zbog derivacija koje se pojavljuju, a koje u općenitom slučaju mogu biti negativne (ako je derivirana ovisnost padajuća), dok od raspodjela vjerojatnosti očekujemo da su svugdje nenegativne. Tražene funkcije za deriviranje već imamo iz (2) i (3). Međutim, moramo uzeti u obzir i da *za danu vrijednost novouvedene varijable* (uspjeha) nisu dozvoljene sve vrijednosti starih varijabli (sreće ili truda). To zapažanje odgovara razmatranjima sa slika 2 i 3 te se svodi na zahtjeve $0 \leq t_{\chi,u}(s) \leq 1$ i $0 \leq s_{\chi,u}(t) \leq 1$, koje ćemo ovako implementirati:

$$p_{\mathrm{SU}}(s,u) = \frac{1}{1-\chi} p_{\mathrm{ST}}\left(s, \frac{u-\chi s}{1-\chi}\right) \Theta\left(0 \leq \frac{u-\chi s}{1-\chi} \leq 1\right), \tag{59}$$

$$p_{\mathrm{TU}}(t,u) = \frac{1}{\chi} p_{\mathrm{ST}}\left(\frac{u-(1-\chi)t}{\chi}, t\right) \Theta\left(0 \leq \frac{u-(1-\chi)t}{\chi} \leq 1\right), \tag{60}$$

[2] Na primjer, prema raspodjeli $p_{\mathrm{ST}}(s,t) \propto \sin(\pi s t)$ sreća i trud su zavisni jer se ona ne može prikazati umnoškom (54), dok su prema raspodjeli $p_{\mathrm{ST}}(s,t) \propto \sin(\pi s)\sin(\pi t)$ nezavisni.

što smo postigli uvođenjem sljedeće funkcije:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } x \text{ istina} \\ 0 & \text{ako je } x \text{ neistina} \end{cases} . \tag{61}$$

U (59) i (60) valja primijetiti početne faktore $1/\chi$ i $1/(1-\chi)$ kao rezultate provedenih derivacija. Raspolaganje obama izrazima od posebne je koristi u slučajevima $\chi = 0$ i $\chi = 1$. Kao u (51) i (52), raspodjelu samog uspjeha $p_{\mathrm{U}}(u)$ sad određujemo integracijom po svim varijablama čiju ovisnost želimo ukloniti: $p_{\mathrm{U}}(u) = \int_0^1 p_{\mathrm{SU}}(s,u)\mathrm{d}s = \int_0^1 p_{\mathrm{TU}}(t,u)\mathrm{d}t$. Pri tome uvjeti obuhvaćeni funkcijom $\Theta(\cdot)$ utječu na granice integracije. Ti uvjeti, zajedno s $0 \le u \le 1$, uvjeti su na rubne točke $\vec{\sigma}$ i $\vec{\tau}$ iz (8) i (9). Za integraciju po s oni se svode na $s \ge \max(0, S_1)$ i $s \le \min(1, S_0)$ pa nakon raspisa imamo:

$$p_{\mathrm{U}}(u) = \int_0^1 p_{\mathrm{SU}}(s,u)\mathrm{d}s = \frac{1}{1-\chi} \int_{\max(0,\,[u-(1-\chi)]/\chi)}^{\min(1,\,u/\chi)} p_{\mathrm{ST}}\left(s, \frac{u-\chi s}{1-\chi}\right)\mathrm{d}s, \tag{62}$$

dok za integraciju po t uvjeti $t \ge \max(0, T_1)$ i $t \le \min(1, T_0)$ vode na:

$$p_{\mathrm{U}}(u) = \int_0^1 p_{\mathrm{TU}}(t,u)\mathrm{d}t = \frac{1}{\chi} \int_{\max(0,\,(u-\chi)/(1-\chi))}^{\min(1,\,u/(1-\chi))} p_{\mathrm{ST}}\left(\frac{u-(1-\chi)t}{\chi}, t\right)\mathrm{d}t. \tag{63}$$

Oba pristupa su, naravno, jednakovaljana.

Kao i u (48), normu $\mathcal{F}_{\chi,\Lambda}$ možemo odrediti iz raspodjele samog uspjeha:

$$\mathcal{F}_{\chi,\Lambda} = \int_\Lambda^1 p_{\mathrm{U}}(u)\mathrm{d}u. \tag{64}$$

No raspišemo li je integracijom preko početne raspodjele sreće i truda, možemo birati između dva izraza koji se razlikuju prema poretku integracije:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\chi,\Lambda} &= \int_{s=\max(0,\,S_1)}^1 \left[\int_{t=\max(0,\,t_{\chi,\Lambda}(s))}^1 p_{\mathrm{ST}}(s,t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s \\ &= \int_{t=\max(0,\,T_1)}^1 \left[\int_{s=\max(0,\,s_{\chi,\Lambda}(t))}^1 p_{\mathrm{ST}}(s,t)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{65}$$

U prvom slučaju integracija po s prebrisuje sve vrijednosti do 1, s početkom u 0 ili u $S_1 = [\Lambda - (1-\chi)]/\chi$, dok integracija po t prebrisuje sve vrijednosti do 1, počevši od 0 ili $t_{\chi,\Lambda}(s) = (\Lambda - \chi s)/(1-\chi)$. U drugom slučaju integracija po t počinje od 0 ili $T_1 = (\Lambda - \chi)/(1-\chi)$, a integracija po s od 0 ili $s_{\chi,\Lambda}(t) = [\Lambda - (1-\chi)t]/\chi$.

U (65) prepoznajemo da su članovi u uglatim zagradama srodni raspodjelama sreće i truda najuspješnijih ljudi, za $u \geq \Lambda$. Pri tome je donja granica prvog integrala zadužena za to da donja granica drugoga ne može preći jedinicu. Želimo li da to ograničenje ostane unutar samih definicija raspodjele sreće i truda najuspješnijih ljudi, po uzoru na (21) pišemo:

$$f_{\chi,\Lambda}^{(S)}(s) = \int_{\min\left[1,\max[0,t_{\chi,\Lambda}(s)]\right]}^{1} p_{ST}(s,t)\mathrm{d}t, \tag{66}$$

$$f_{\chi,\Lambda}^{(T)}(t) = \int_{\min\left[1,\max[0,s_{\chi,\Lambda}(t)]\right]}^{1} p_{ST}(s,t)\mathrm{d}s. \tag{67}$$

Uz ovako definirane raspodjele, normu $\mathcal{F}_{\chi,\Lambda}$ možemo izraziti i kao:

$$\mathcal{F}_{\chi,\Lambda} = \int_0^1 f_{\chi,\Lambda}^{(S)}(s)\mathrm{d}s = \int_0^1 f_{\chi,\Lambda}^{(T)}(t)\mathrm{d}t. \tag{68}$$

Za očekivane udjele sreće i truda najuspješnijih ljudi i dalje vrijedi:

$$\bar{s}_{\chi,\Lambda} = \frac{1}{\mathcal{F}_{\chi,\Lambda}} \int_0^1 s f_{\chi,\Lambda}^{(S)}(s)\mathrm{d}s, \tag{69}$$

$$\bar{t}_{\chi,\Lambda} = \frac{1}{\mathcal{F}_{\chi,\Lambda}} \int_0^1 t f_{\chi,\Lambda}^{(T)}(t)\mathrm{d}t. \tag{70}$$

Isto tako, mogli bismo ih raspisati analogno (65), pri čemu bismo dobili po dva dodatna izraza i za očekivani udio sreće i za očekivani udio truda. No mogli bismo integrirati i združenu raspodjelu sreće i uspjeha iz (59) ili truda i uspjeha iz (60) – ne više raspodjelu *samog* uspjeha kao u (64):

$$\bar{s}_{\chi,\Lambda} = \frac{1}{\mathcal{F}_{\chi,\Lambda}} \int_{u=\Lambda}^1 \int_{s=0}^1 s p_{SU}(s,u)\mathrm{d}s\mathrm{d}u, \tag{71}$$

$$\bar{t}_{\chi,\Lambda} = \frac{1}{\mathcal{F}_{\chi,\Lambda}} \int_{u=\Lambda}^1 \int_{t=0}^1 t p_{TU}(t,u)\mathrm{d}t\mathrm{d}u. \tag{72}$$

Granice integracije opet su transparentne i jednostavne, a sva složenost potisnuta je u same raspodjele. Valja naglasiti da za općenitu raspodjelu $p_{ST}(s,t)$ sreće i truda ne vrijede nužno simetrije norme iz (32), (33) i (34), niti veze sreće i truda iz (46) i (49).

Literatura

[1] D. J. Maširević, A. Kozić, *Geometrijska vjerojatnost u svakodnevnom životu*, Osječki matematički list, **15** (2015), 19–31.

[2] P. Žugec, *Koliko je točaka ...*, Osječki matematički list, **19** (2019), 109–122.