Izvorni znanstveni rad

Procesi obnavljanja u teoriji rizika

Zorana Lubina[1]

Sažetak: *U ovom diplomskom radu prezentirani su osnovni koncepti teorije rizika koja modelira dva izvora neizvjesnosti neživotnog osiguranja: koliko će šteta osiguranik prijaviti i koliki su iznosi tih šteta. U skladu s time, definirani su proces ukupnog broja šteta i proces ukupnog iznosa šteta. Zajedno, ta dva procesa čine sastavni dio procesa rizika koji prati odnos uplaćenih premija i isplaćenih šteta. Rad je podijeljen u tri poglavlja. U prvom poglavlju opisana su osnovna svojstva matematičkih modela za proces ukupnog broja šteta homogenog Poissonovog procesa i procesa obnavljanja. U drugom poglavlju dan je pregled distribucija iznosa štete, pri čemu je poseban naglasak stavljen na distribucije teškog repa regularno varirajuće i subeksponencijalne distribucije. Nadalje, objašnjena su osnovna svojstva modela za proces ukupnog iznosa šteta Cramér-Lundbergovog modela i modela obnavljanja. Posljednje poglavlje prikazuje fundamentalne rezultate teorije propasti čiji je glavni fokus proces rizika.*

Ključne riječi: *homogeni Poissonov proces, proces obnavljanja, teorija rizika, proces rizika, teorija propasti, neživotno osiguranje*

UVOD

Tijekom svog života susrećemo se s različitim oblicima neživotnog osiguranja osiguranjem od nezgode, osiguranjem imovine ili na primjer osiguranjem cestovnih vozila koje je zakonski regulirano. Usluge neživotnog osiguranja pružaju financijske institucije društva za osiguranje koja su dobila odobrenje za rad od regulatora Hrvatske agencije za nadzor financijskih usluga. U svojem poslovanju osiguravajuće društvo (osiguratelj) preuzima rizik i za to naplaćuje premiju od svog klijenta (osiguranika). Prema posljednjim podacima (rujan 2019.) u Hrvatskoj je ukupno 15 osiguravajućih društava koja nude usluge neživotnog osiguranja sa zaračunatom bruto premijom od gotovo 5.8 mlrd HRK za razdoblje 1.1.2019. – 30.9.2019.

Kako bismo pobliže objasnili kako osiguranje funkcionira, uzmimo primjer osiguranja cestovnih vozila. Prema ugovoru osiguratelja i osiguranika, osiguranik

1 Zorana Lubina, Sveučilište u Zagrebu prirodoslovno–matematički fakultet, matematički odsjek; Skraćeni diplomski rad - dobitnica Nagrade Hrvatskog ureda za osiguranje 2020 g. u kategoriji najbolji diplomski rad.

plaća određenu svotu novca (premiju) osiguratelju na početku perioda trajanja osiguranja, obično jedne godine. Ukoliko se tijekom trajanja osiguranja dogodi nesreća koja je uzrokovala štetu na vozilu, osiguratelj pokriva troškove popravka vozila. Dva su izvora neizvjesnosti za osiguratelja: koliko će šteta osiguranik prijaviti i koliki su iznosi tih šteta. Teorija rizika, kao dio aktuarske znanosti, daje nam matematički model za ukupan broj šteta i matematički model za ukupan iznos tih šteta. Zajedno, ova dva modela čine sastavni dio modela rizika teorije propasti. Glavni dijelovi ovoga rada upravo su gornja tri modela strukturno podijeljena u tri poglavlja. Za početak, navedimo glavne pretpostavke koje koristimo u nastavku, pri čemu vjerojatnosni prostor označavamo s (Ω, F, P).

- Štete se događaju u trenutcima T_i za koje vrijedi $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ Nazivamo ih vremena dolazaka šteta.
- Šteta u trenutku T_i uzrokuje iznos štete X_i. Niz $\{X_i : i \geq 1\}$ je niz nezavisnih, jednako distribuiranih nenegativnih slučajnih varijabli.
- Nizovi slučajnih varijabli $\{T_i : i \geq 1\}$ i $\{X_i : i \geq 1\}$ su međusobno nezavisni.

U prvom poglavlju uvodimo pojam procesa ukupnog broja šteta koji predstavlja ukupan broj šteta koje su nastupile do određenog trenutka t. Prvi matematički model za taj brojeći proces kojega analiziramo je homogeni Poissonov proces. Povijesno gledano, švedski aktuar Filip Lundberg prvi je 1903. godine u svom radu opisao proces ukupnog broja šteta homogenim Poissonovim procesom. Stoga se u literaturi često ta godina smatra početkom razvoja teorije rizika. Nadalje, u drugom dijelu prvog poglavlja proširujemo analizu brojećeg procesa i uvodimo pojam procesa obnavljanja. Proces obnavljanja predstavlja sveobuhvatni model za proces ukupnog broja šteta kojeg je 1957. godine predložio danski matematičar Erik Sparre Andersen. Navedeni su osnovni granični teoremi teorije obnavljanja koji su ključni u razumijevanju osnovnih svojstava procesa ukupnog broja šteta. U drugom poglavlju uvodimo pojam procesa ukupnog iznosa šteta koji predstavlja ukupan iznos šteta koje su nastupile do određenog trenutka t. Poseban doprinos u modeliranju ovog procesa dao je švedski matematičar Harald Cramér. Prikazana svojstva matematičkog modela za taj proces pomoći će nam u formiranju principa računanja premija. Dodatno, poglavlje sadrži pregled distribucija iznosa štete, pri čemu su posebno izdvojene distribucije teškog repa regularno varirajuće i subeksponencijalne distribucije, koje su sve više korištene u praksi. Posljednje, treće poglavlje opisuje proces rizika te objašnjava osnovne rezultate teorije propasti. Istaknimo kako je cilj ovoga rada prikazati osnovne koncepte teorije rizika te dobivene rezultate interpretirati u kontekstu neživotnog osiguranja. Za praćenje i razumijevanje sljedećeg sadržaja potrebna su osnovna znanja teorije vjerojatnosti i teorije mjere.

1. PROCES UKUPNOG BROJA ŠTETA

U ovom poglavlju fokusiramo se na vremena dolazaka šteta u osiguranju koja smo u uvodnom dijelu označili s T_i. Često je od interesa znati koliko šteta je osiguravajuće društvo isplatilo do određenog trenutka t. U tu svrhu definiramo brojeći proces $N = (N(t))_{t\geq 0}$ kojega nazivamo proces ukupnog broja šteta:

$$N(t) = \#\{i \geq 1 : T_i \leq t\}.$$

Primijetimo da vrijedi:

(1) Za dano $t \geq 0$, $N(t)$ je slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{N}_0$.

(2) Za $0 \leq t_1 < t_2$ vrijedi $N(t_1) \leq N(t_2)$.

(3) $N(t_1, t_2] := N(t_2) - N(t_1)$ je ukupan broj šteta u intervalu $(t_1, t_2]$.

Cilj nam je pronaći matematički model za proces N kojega ćemo moći interpretirati u kontekstu osiguranja. Jedan od najvažnijih primjera brojećih procesa u primijenjenoj teoriji stohastičkih procesa je homogeni Poissonov proces kojega proučavamo u prvom dijelu ovoga poglavlja. Zatim, u drugom dijelu poglavlja definiramo i navodimo osnovna svojstva procesa obnavljanja koji predstavlja sveobuhvatni model za proces ukupnog broja šteta te kao takav čini temeljni dio ovoga rada.

1.1 Homogeni Poissonov proces

Homogeni Poissonov proces polazni je primjer Poissonovog procesa zbog veoma poželjnih teorijskih svojstava i povijesne važnosti. Istaknut ćemo njegovu interpretaciju u kontekstu teorije rizika kao modela za proces ukupnog broja šteta. Ovaj odjeljak sadržava kratak pregled najvažnijih svojstava homogenog Poissonovog procesa.

Definicija 1.1.1. Brojeći proces $N = (N(t))_{t\geq 0}$ je homogeni Poissonov proces s intenzitetom $\lambda > 0$ ako je:

(1) $N(0) = 0$.

(2) N ima nezavisne priraste.

(3) Broj događaja u bilo kojem intervalu duljine t je Poissonova slučajna varijabla s parametrom λt, tj. za svaki s, t ≥ 0 vrijedi:

$$\mathbb{P}(N(s,t+s]=n)=\mathbb{P}(N(t+s)-N(s)=n)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t},\quad n=0,1,\dots \tag{1.1}$$

Ako je $\lambda=1$, tada govorimo o standardnom homogenom Poissonovom procesu.

Iz relacije (1.1) slijedi:

(1) N ima stacionarne priraste zbog toga što distribucija $N(t+s)-N(s)$ ne ovisi o s, nego samo o duljini vremenskog perioda t.

(2) Uzmimo $s=0$. Dobivamo da je:

$$N(t)=N(t+0)-N(0)\sim \text{Pois}(\lambda t),\quad \forall t\geq 0. \tag{1.2}$$

Dakle, ukupan broj šteta do trenutka t ima Poissonovu distribuciju s parametrom λt. Stoga je očekivani broj šteta do trenutka t jednak:

$$\mathbb{E}[N(t)]=\lambda t.$$

Nadalje, koristeći relaciju (1.2) i razvoj funkcije e^x u Taylorov red dobivamo sljedeće relacije:

$$\mathbb{P}(N(h)=1)=\lambda h+o(h), \tag{1.3}$$

$$\mathbb{P}(N(h)\geq 2)=o(h), \tag{1.4}$$

gdje je $\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0$.

Primijetimo još jednu posljedicu iz relacije (1.4): vjerojatnost dolaska više od jedne štete u proizvoljnom intervalu duljine h je reda $o(h)$. Kako smanjujemo duljinu intervala h tako se i pripadna vjerojatnost smanjuje, što znači da je „vrlo malo" vjerojatno da u kratkom vremenskom intervalu homogeni Poissonov proces ima više od jednog skoka.

Definicija 1.1.2. Neka je $N=(N(t))_{t\geq 0}$ homogeni Poissonov proces. Slučajne varijable

$$W_i=T_i-T_{i-1}\ za\ i=1,2,\dots$$

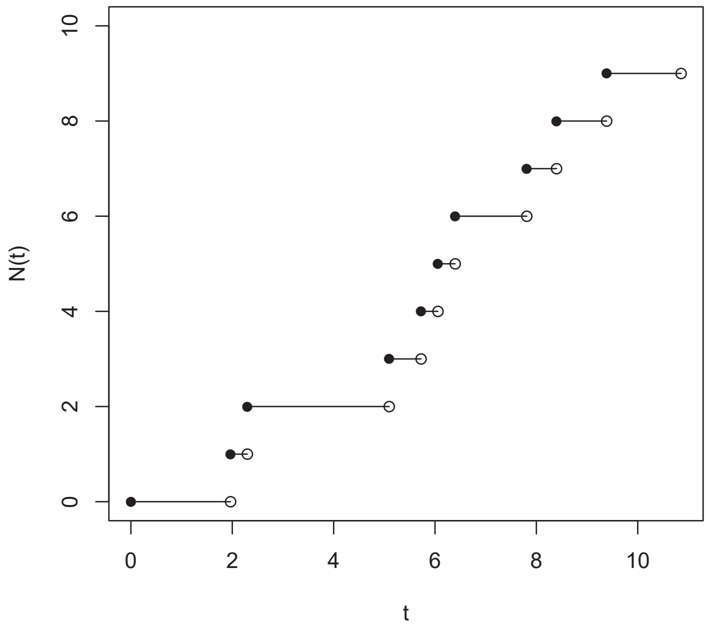
uz konvenciju $T_0=0$ nazivamo vremena međudolazaka šteta, gdje je T_i vrijeme dolaska i-te štete.

Propozicija 1.1.3. Neka je $N = (N(t))_{t \geq 0}$ homogeni Poissonov proces s intenzitetom λ. Slučajne varijable W_i, $i = 1, 2, \ldots$ su nezavisne, jednako distribuirane s eksponencijalnom distribucijom s parametrom λ. Nadalje,

$$f_{W_1, W_2, \ldots, W_n}(w_1, w_2, \ldots, w_n) = \lambda^n e^{-\lambda(w_1 + w_2 + \cdots + w_n)}, \; w_i \geq 0, \; i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.5}$$

gdje je f funkcija gustoće slučajnog vektora $(W_1, W_2, \ldots, W_n)$.

Slika 1.1: *Trajektorija standardnog homogenog Poissonovog procesa*



Dokaz. Uzmimo $t \geq 0$ i primijetimo da je $\{T_1 > t\} = \{N(t) = 0\}$. Slijedi da je:

$$\mathbb{P}(W_1 > t) = \mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}, \tag{1.6}$$

odnosno $\mathbb{P}(W_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Zaključujemo da slučajna varijabla W_1 ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom λ. Nadalje, za svaki $t \geq 0$ i $n \geq 1$ vrijedi:

$\{W_n > t\} = \{N(T_{n-1} + t) - N(T_{n-1}) = 0\}$.

Sada iz nezavisnosti prirasta procesa N slijedi nezavisnost slučajnih varijabli W_i. Iz svojstva stacionarnosti prirasta procesa N dobivamo:

$$\mathbb{P}(W_n > t) = \mathbb{P}(N(T_{n-1} + t) - N(T_{n-1}) = 0) = \mathbb{P}(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}. \tag{1.7}$$

Zaključujemo da su slučajne varijable W_i jednako distribuirane s eksponencijalnom razdiobom s parametrom λ.

Iz propozicije 1.1.3 slijedi:

(1) $T_i < T_{i+1}\, g.s.$ za $i \geq 1$, odnosno s vjerojatnošću 1 homogeni Poissonov proces nema skokove veće od 1.

(2) Slučajna varijabla $T_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ za $n \geq 1$ ima gamma distribuciju s parametrima n i λ. Pišemo $T_n \sim \Gamma(n, \lambda)$.

(3) Koristeći relaciju (1.5) i transformaciju

$$(z_1, z_2, \ldots, z_n) \xrightarrow{S} (z_1, z_2 - z_1, \ldots, z_n - z_{n-1}),$$

uz $\det(\partial S(\mathrm{z})/\partial \mathrm{z}) = 1$, dobivamo funkciju gustoće slučajnog vektora $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ za $0 < x_1 < \cdots < x_n$:

$$f_{T_1,T_2,\ldots,T_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{W_1,W_2,\ldots,W_n}(x_1, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}) = \lambda^n e^{-\lambda x_n}. \quad (1.8)$$

Propozicija 1.1.4. Neka je $N = (N(t))_{t\geq 0}$ homogeni Poissonov proces s intenzitetom λ. Vrijeme dolaska prve štete T_1 uvjetno na događaj $\{N(t) = 1\}$ ima uniformnu distribuciju na intervalu $(0, t]$, pišemo: $T_1 \,|\, \{N(t) = 1\} \sim \mathrm{Unif}(0, t]$.

Dokaz. Za $0 < s \leq t$ imamo sljedeće:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_1 \leq s \,|\, N(t) = 1) &= \frac{\mathbb{P}(T_1 \leq s, N(t) = 1)}{\mathbb{P}(N(t) = 1)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(N(s) = 1, N(t) - N(s) = 0)}{\mathbb{P}(N(t) = 1)} \qquad (1.9) \\
&\overset{nez.\, i\, stac.}{=} \frac{(\lambda s e^{-\lambda s}) e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}.
\end{aligned}$$

Prethodna propozicija može se generalizirati na način da odredimo distribuciju slučajnog vektora $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ uvjetno na događaj $\{N(t) = n\}$:

$$f_{T_1,T_2,\ldots,T_n \,|\, N(t)}(t_1, t_2, \ldots, t_n \,|\, n) = \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq t.$$

Na kraju ovoga dijela istaknimo najvažnije zaključke. Vidjeli smo da homogeni Poissonov proces ima svojstvo stacionarnosti prirasta. U kontekstu neživotnog osiguranja, očekivani broj šteta u vremenskom periodu ovisi samo o duljini tog perioda. Nadalje, pokazali smo da je distribucija vremena dolazaka šteta u uskoj vezi s uniformnom distribucijom. Postavlja se pitanje koliko je to u skladu sa stvarnim svijetom osiguranja. Primjerice, nije nerazumno pretpostaviti da se u osiguranjima od različitih vremenskih nepogoda više šteta događa u pojedinom periodu godine nego u ostalima. Takvo razmatranje dovodi nas do ideje da intenzitet λ ovisi o vremenu. U tom slučaju govorimo o nehomogenom Poissonovom procesu [5, str. 250-254].

1.2 Procesi obnavljanja

Procesi obnavljanja modeliraju pojavljivanja određenog događaja kojeg promatramo u vremenu. Zbog svoje strukture i svojstava te primjene u različitim područjima čine važan dio teorije vjerojatnosti. U kontekstu neživotnog osiguranja, poslužit će nam kao općeniti model za proces ukupnog broja šteta. Odjeljak sadrži pregled najvažnijih rezultata iz teorije obnavljanja. Nadalje, ističemo specijalan primjer procesa obnavljanja - homogeni Poissonov proces.

Definicija 1.2.1. Neka je $(W_n : n \geq 1)$ niz nenegativnih, nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dodatno, pretpostavimo da nisu identički jednake nuli: $\mathbb{P}(W_n < 0) = 0, \mathbb{P}(W_n = 0) < 1$ za $n \geq 1$. Niz (proces) obnavljanja $T = (T_n : n \geq 0)$ definiran je sa:

$$T_0 = 0, T_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n, n \geq 1.$$

Proces $N = (N(t))_{t\geq 0}$ definiran sa $N(t) = \#\{i \geq 1 : T_i \leq t\}$, $t \geq 0$ naziva se brojeći proces obnavljanja.

Slučajne varijable T_i i W_i predstavljaju vremena obnavljanja i međuobnavljanja, odnosno u neživotnom osiguranju, vremena dolazaka i međudolazaka šteta. Istaknimo vezu između procesa obnavljanja T i pripadnog brojećeg procesa N sljedećim relacijama:

$$\{N(t) \leq n\} = \{T_{n+1} > t\},\ n \geq 0, \tag{1.10}$$

$$T_{N(t)} \leq t < T_{N(t)+1}, \tag{1.11}$$

$$\{N(t) = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\},\ n \geq 0. \tag{1.12}$$

Polazni primjer procesa obnavljanja je homogeni Poissonov proces kojega smo proučili u prethodnom odjeljku. Dokaz sljedećeg teorema može se pronaći u [6, str. 22–25].

Teorem 1.2.2. Neka su brojeći proces $N = (N(t))_{t\geq 0}$ i niz obnavljanja $T = (T_n : n \geq 0)$ dani sa:

$$N(t) = \#\{i \geq 1 : T_i \leq t\}, t \geq 0,$$

$$T_0 = 0, T_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n, n \geq 1,$$

gdje su slučajne varijable W_i, za $i = 1, 2, \ldots$, nezavisne i jednako distribuirane s eksponencijalnom razdiobom s parametrom $\lambda > 0$. Tada je N homogeni Poissonov proces s intenzitetom λ.

Homogeni Poissonov proces je brojeći proces obnavljanja gdje su slučajne varijable W_i eksponencijalno distribuirane. Nadalje, u tom slučaju $N(t)$ ima

Poissonovu distribuciju. Općenito, distribucija $N(t)$ nije poznata, stoga su sljedeći rezultati od velike važnosti. Za njihovo razumijevanje ključni su granični teoremi iz teorije mjere [14, str. 44–47] te fundamentalni teoremi iz teorije vjerojatnosti [1, str. 416, 57].

Lema 1.2.3. $\lim_{t\to\infty} N(t) = \infty \; g.s.$

Dokaz. Slijedi iz činjenice $\{N(t) > n\} = \{T_{n+1} \leq t\}$ i $T_{n+1} < \infty \; g.s.$

Teorem 1.2.4. (Jaki zakon velikih brojeva za brojeći proces) Pretpostavimo da je $\mu := \mathbb{E}W_1 < \infty \; g.s.$ Tada je:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \; g.s.$$

Dokaz. Po jakom zakonu velikih brojeva vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} = \mu \; g.s. \tag{1.13}$$

Iskoristimo sada relaciju (1.11):

$$\frac{T_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{T_{N(t)+1}}{N(t)+1} \frac{N(t)+1}{N(t)}. \tag{1.14}$$

Pustimo $t \to \infty$ i uvažavajući (1.13) i lemu 1.2.3 dobivamo:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{N(t)} = \mu \; g.s. \tag{1.15}$$

Slično kao gornji pokazani rezultat, sljedeći rezultat govori da se i prosječni očekivani broj obnavljanja, odnosno dolazaka šteta, asimptotski ponaša kao $1/\mu$ ([8, str. 191]):

Teorem 1.2.5. (Elementarni teorem obnavljanja) Neka je $\mu := \mathbb{E}(W_1) \leq \infty$. Tada je:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

Istaknimo još rezultat o asimptotskom ponašanju varijance brojećeg procesa (dokaz u literaturi [4, str. 56–59]):

Propozicija 1.2.6. Neka je $\mu := \mathbb{E}(W_1)$ i $\sigma^2 := \mathrm{Var}(W_1) < \infty$. Tada je:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Var}(N(t))}{t} = \frac{\sigma^2}{\mu^3}.$$

Pregled ključnih koncepata teorije obnavljanja završavamo definicijama funkcije obnavljanja i jednadžbe obnavljanja koje će se pokazati korisnim alatom u posljednjem poglavlju.

Definicija 1.2.7. Neka je $T = (T_n : n \geq 0)$ niz obnavljanja i $N = (N(t))_{t \geq 0}$ pripadni brojeći proces obnavljanja. Funkcija obnavljanja dana je sa: $U(t) = \mathbb{E}N(t)$.

Uz oznake kao u definiciji 1.2.1, neka je F funkcija distribucije slučajnih varijabli W_i, $i \geq 1$. Uz pomoć svojstava nenegativnosti, nezavisnosti i jednake distribuiranosti slučajnih varijabli W_i dobivamo sljedeću relaciju:

$$U(t) = \mathbb{E}N(t) = \mathbb{E}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_n \leq t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t). \tag{1.16}$$

Definicija 1.2.8. Neka je $F : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ neopadajuća, zdesna neprekidna funkcija takva da je $F(t) = 0$ za sve $t < 0$ te $\lim_{t\to\infty} F(t) = F(\infty) < \infty$. Nadalje, neka je $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borelova funkcija takva da je $z(t) = 0$ za sve $t < 0$. Jednadžba obnavljanja je konvolucijska jednadžba oblika:

$$Z(t) = z(t) + \int_0^t Z(t-x)dF(x)\,, \quad t \geq 0.$$

Funkcija $Z : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ je nepoznata funkcija koja se traži. Kraće pišemo: $Z = z + F * Z$. Na kraju dajemo rezultat o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja jednadžbe obnavljanja [15, str. 94, 100–101].

Teorem 1.2.9. Neka je $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokalno ograničena funkcija takva da je $z(t) = 0$ za sve $t < 0$. Nadalje, neka je F neopadajuća, zdesna neprekidna funkcija takva da je: $F(\infty) \leq 1$, $F(0-) = 0$, $F(0) < 1$ te neka je $U(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{n*}(t)$ za $t \geq 0$. Tada je $z + U * z$ jedinstveno lokalno ograničeno rješenje jednadžbe obnavljanja:

$$Z = z + F * Z.$$

2. PROCES UKUPNOG IZNOSA ŠTETA

U prethodnom poglavlju uveli smo pojam procesa ukupnog broja šteta te smo naveli i opisali najvažnija svojstva matematičkih modela za taj proces. Za osiguravajuće društvo nije bitan samo podatak o ukupnom broju šteta do određenog trenutka t, nego i ukupni iznosi šteta X_i do trenutka t. Iznosima šteta posvećuje se posebna pažnja s obzirom da uzrokuju odljev sredstava te time predstavljaju rizik za osiguravajuće društvo. Stoga, definiramo proces $S = (S(t))_{t \geq 0}$ kojega nazivamo proces ukupnog iznosa šteta:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i.$$

Pretpostavljamo sljedeće:

(1) Iznosi šteta X_i su nenegativne, nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable.

(2) Proces ukupnog broja šteta $N = (N(t))_{t \geq 0}$ nezavisan je od niza $\{X_i : i \geq 1\}$.

Postavlja se pitanje koji su modeli realistični za opis iznosa štete X_i, da nisu „previše" komplicirani, ali da nam ujedno pružaju dovoljno informacija. Stoga, na početku ovoga poglavlja dajemo pregled najčešćih distribucija iz aktuarske prakse te ističemo njihova najvažnija svojstva. Zatim, navodimo i pokazujemo asimptotska svojstva procesa S kada je N proces obnavljanja te na temelju tih rezultata dajemo pregled principa računanja premija u osiguranju.

2.1 Distribucije u teoriji rizika

Obično je prvi korak u aktuarskoj praksi, pri analizi podataka, odlučiti se između različitih familija vjerojatnosnih distribucija. U ovom dijelu napravit ćemo najčešću podjelu distribucija na distribucije lakih i teških repova. Pri tome uzimamo eksponencijalnu distribuciju kao prirodnu granicu između ovih klasa. Unutar klase distribucija teškog repa navodimo dvije podklase: regularno varirajuće i subeksponencijalne distribucije.

Definicija 2.1.1. Neka je s F zadana distribucija. Označimo sa $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ za $x \geq 0$, rep distribucije F. Kažemo da je F:

(1) lakog repa ako je:

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\overline{F}(x)}{e^{-\lambda x}} < \infty \quad \text{za neki } \lambda > 0.$$

(2) teškog repa ako je:

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{\overline{F}(x)}{e^{-\lambda x}} > 0 \quad \text{za sve } \lambda > 0.$$

Standardni primjeri distribucija lakog repa su dobro poznate eksponencijalna, gamma i normalna distribucija. Istaknimo kako se u aktuarskoj literaturi takve distribucije nazivaju distribucijama malih šteta. Klasična matematika neživotnog osiguranja upravo je bila koncentrirana na ove distribucije zbog poželjnih svojstava, primjerice nalaze se u eksponencijalnoj familiji distribucija i na njih možemo primijeniti standardne metode procjene parametara. Njihovom eksponencijalnom transformacijom dobivamo distribucije teškog repa: log-gamma i log-normalnu, tj. ako je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, tada je $Y = e^X$ log-normalna.

Primjer 2.1.2. (Distribucije teškog repa)

(1) Jednoparametarska Pareto distribucija, oznaka Par(α):

$$\overline{F}(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}, \quad \alpha > 0,\, x \geq 1.$$

(2) Dvoparametarska Pareto distribucija, oznaka Par(α, k):

$$\overline{F}(x) = \left(\frac{k}{k+x}\right)^{\alpha}, \quad \alpha > 0,\, k > 0,\, x > 0.$$

(3) Burrova distribucija, oznaka Bur(α, k, τ):

$$\overline{F}(x) = \left(\frac{k}{k+x^{\tau}}\right)^{\alpha}, \quad \alpha > 0,\, k > 0,\, \tau > 0,\, x > 0.$$

Regularno varirajuće distribucije

Log-gamma, Paretova i Burrova distribucija primjeri su regularno varirajućih distribucija, stoga dijele neka zajednička svojstva koja navodimo u nastavku.

Definicija 2.1.3. Neka je L pozitivna, izmjeriva funkcija na $(0, \infty)$. Kažemo da je L sporo varirajuća u $+\infty$ ako vrijedi:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L(cx)}{L(x)} = 1, \quad \text{za sve } c > 0.$$

Neki od primjera sporo varirajućih funkcija su: konstante, logaritmi i potencije logaritama. Svaka sporo varirajuća funkcija u $+\infty$ ima sljedeću reprezentaciju [7, str. 17-19]:

$$L(x) = c_0(x)\text{exp}\left\{ \int_{x_0}^{x} \frac{\epsilon(t)}{t} dt \right\}, \quad \text{za neki } x_0 > 0, x \geq x_0, \tag{2.1}$$

gdje $\epsilon(t) \to 0$ kada $t \to \infty$ i $c_0(t)$ je pozitivna funkcija za koju vrijedi da $c_0(t) \to c_0$, c_0 je pozitivna konstanta. Koristeći tu reprezentaciju pokaže se da za svaki $\delta > 0$ vrijedi:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L(x)}{x^{\delta}} = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to\infty} x^{\delta} L(x) = \infty.$$

Definicija 2.1.4. Neka je L sporo varirajuća funkcija u $+\infty$.

(1) Za svaki $\delta \in \mathbb{R}$ kažemo da je funkcija

$$f(x) = x^\delta L(x), \quad x > 0,$$

regularno varirajuća s indeksom δ.

(2) Pozitivna slučajna varijabla X i njezina distribucija su regularno varirajuće s indeksom

$\alpha \geq 0$ ako je:

$$\overline{F}(x) = \mathbb{P}(X > x) = L(x)x^{-\alpha}, \quad x > 0.$$

Regularno varirajuće distribucije imaju jako teške repove, stoga nam u osiguranju služe za modeliranje velikih šteta. Poznato je da, ukoliko je X regularno varirajuća s indeksom $\alpha > 0$, tada:

$$\mathbb{E}X^\delta = \begin{cases} +\infty, & \delta > \alpha, \\ < \infty, & \delta < \alpha. \end{cases}$$

Gornji rezultat direktna je posljedica reprezentacije sporo varirajuće funkcije u $+\infty$ (2.1) i rezultata o integralima regularno varirajućih funkcija [7, str. 17, 19-21]. Postavlja se pitanje, ukoliko štete u osiguranju modeliramo regularno varirajućim distribucijama, kako to utječe na njihovu sumu, odnosno na ukupan iznos šteta. O tome govori sljedeći rezultat.

Propozicija 2.1.5. Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne, jednako distribuirane regularno varirajuće s indeksom $\alpha > 0$ slučajne varijable s funkcijom distribucije F. Neka je $S_n = X_1 + X_2 + X_n$ i $M_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Tada je S_n regularno varirajuća s indeksom α i vrijedi:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}(S_n > x)}{n\overline{F}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}(S_n > x)}{\mathbb{P}(M_n > x)} = 1.$$

Dokaz. Uvedimo oznaku $o(1)$ za funkciju $h(x)$ za koju je $\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$. Propoziciju pokazujemo za $n = 2$. Općeniti slučaj slijedi analogno. Neka je $G(x) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 \leq x)$. Koristeći $\{X_1 + X_2 > x\} \supset \{X_1 > x\} \cup \{X_2 > x\}$ slijedi:

$$\overline{G}(x) \geq 2\overline{F}(x)(1 - o(1)). \tag{2.2}$$

Uzmimo sada $0 < \delta < 1/2$, tada iz

$$\{X_1 + X_2 > x\} \subset \{X_1 > (1-\delta)x\} \cup \{X_2 > (1-\delta)x\} \cup \{X_1 > \delta x, X_2 > \delta x\} \tag{2.3}$$

slijedi:

$$\overline{G}(x) \leq 2\overline{F}((1-\delta)x) + \overline{F}(\delta x)\overline{F}(\delta x) = \left(2\overline{F}((1-\delta)x)\right)(1 + o(1)). \tag{2.4}$$

Sada pomoću relacija (2.2) i (2.4) dobivamo:

$$1 \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{G}(x)}{2\overline{F}(x)} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{G}(x)}{2\overline{F}(x)} \leq (1-\delta)^{-\alpha}. \tag{2.5}$$

Puštanjem $\delta \to 0$ slijedi tvrdnja. Istaknimo još kako je za $n \geq 2$ i $x \to \infty$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_n > x) &= 1 - \mathbb{P}(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \ldots, X_n \leq x) = 1 - F^n(x)\\ &= (1-F(x))\sum_{k=0}^{n-1} F^k(x) = n\overline{F}(x)(1+o(1)).\end{aligned} \tag{2.6}$$

Time je propozicija dokazana.

Zaključimo, pod pretpostavkom regularne varijacije, rep distribucije maksimuma iznosa šteta određuje rep distribucije ukupnog iznosa šteta.

Subeksponencijalne distribucije

Gornja propozicija nam je motivacija za definiranje veće klase distribucija teškog repa koje zovemo subeksponencijalne distribucije. Skup svih subeksponencijalnih distribucija označavamo sa $\mathcal{S}$.

Definicija 2.1.6. Pozitivna slučajna varijabla X i njezina distribucija su subeksponencijalne ukoliko za niz $\{X_i : i \geq 1\}$ nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli s istom distribucijom kao X vrijedi:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}(S_n > x)}{\mathbb{P}(M_n > x)} = 1 \quad \text{za sve } n \geq 2.$$

Primjer subeksponencijalne distribucije koja nije regularno varirajuća je Weibullova distribucija s parametrima $c > 0$ i $0 < \tau < 1$:

$$\overline{F}(x) = e^{-cx^\tau}, \quad x \geq 0.$$

Neka svojstva subeksponencijalne familije distribucija dana su sljedećom propozicijom. Dokaz je dan u [3, str. 41-42].

Propozicija 2.1.7. (Osnovna svojstva subeksponencijalnih distribucija)Neka je $F \in \mathcal{S}$.

(1) Za svaki $y > 0$ vrijedi:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1. \tag{2.7}$$

(2) Za svaki $\epsilon > 0$, $e^{\epsilon x}\overline{F}(x) \to \infty$ kada $x \to \infty$.

(3) Za dani $\epsilon > 0$ postoji konstanta K takva da za svaki $n \geq 2$ vrijedi:

$$\frac{\mathbb{P}(S_n > x)}{\overline{F}(x)} \leq K(1+\epsilon)^n, \quad x \geq 0. \tag{2.8}$$

Istaknimo nekoliko važnih komentara koji slijede direktno iz gornje propozicije. Iz prvog dijela propozicije uočimo kako repovi $\mathbb{P}(X > x)$ i $\mathbb{P}(X + y > x)$ nisu značajno različiti za veliki x i bilo koji fiksan $y > 0$, tj.

$$\frac{\mathbb{P}(X > x + y)}{\mathbb{P}(X > x)} = \frac{\mathbb{P}(X > x + y, X > x)}{\mathbb{P}(X > x)} = \mathbb{P}(X > x + y \,|\, X > x) \to 1.$$

Dakle, u osiguranju, ako štete poprime veliku vrijednost x, vrlo je vjerojatno da će poprimiti još veću vrijednost $x+y$. Nadalje, drugi dio propozicije opravdava ime subeksponencijalne klase distribucija. Rep subeksponencijalne distribucije pada sporije u nulu od bilo koje eksponencijalne funkcije $e^{-\epsilon x}$ za $\epsilon > 0$. Vrijedi:

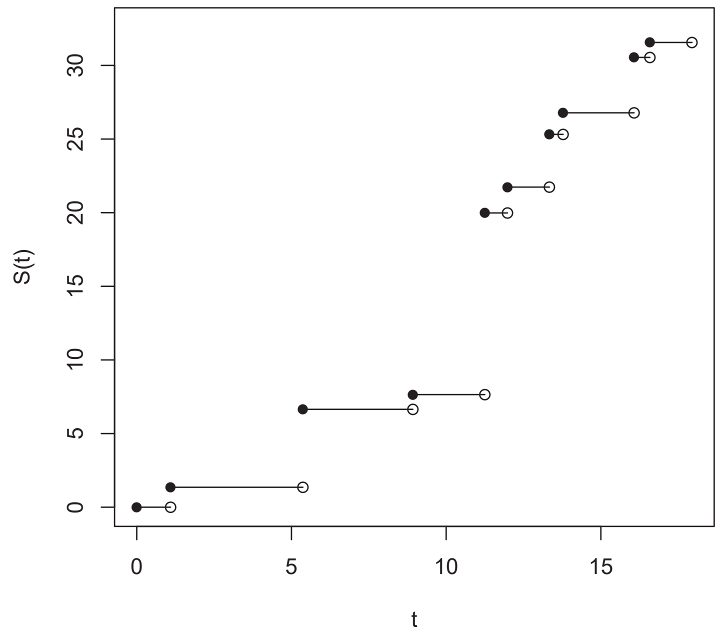
$$\mathbb{E}\Big(e^{\epsilon X}\Big) \geq \mathbb{E}\Big(e^{\epsilon X}\mathbb{1}_{(y,\infty)}\Big) \geq e^{\epsilon y}\overline{F}(y), \quad y \geq 0.$$

Sada, ukoliko je $F \in \mathcal{S}$, propozicija 2.1.7 povlači $\mathbb{E}(e^{\epsilon X}) = \infty$ za sve $\epsilon > 0$. Za kraj ove diskusije, istaknimo kako subeksponencijalne distribucije imaju veliku ulogu u teoriji ekstremnih vrijednosti. Njihova važnost u osiguranju je modeliranje velikih šteta i zapravo se kaže da su sinonim za distribucije teškog repa. Više rezultata o regularno varirajućim i subeksponencijalnim distribucijama može se pronaći u [3] i [7].

2.2 Model obnavljanja

U ovom dijelu fokusiramo se na osnovna svojstva procesa ukupnog iznosa šteta kojega smo definirali u uvodnom dijelu i označili sa S. Istaknimo kako smo u prethodnom poglavlju opisali dva modela za proces ukupnog broja šteta - homogeni Poissonov proces i proces obnavljanja. Stoga, ako proces N modeliramo homogenim Poissonovim procesom, tada govorimo o Cramér-Lundbergovom modelu za S. Model je dobio ime po švedskim matematičarima Haraldu Craméru i Filipu Lundbergu koji se smatraju osnivačima teorije rizika. Rezultate u ovom dijelu izvest ćemo pod pretpostavkom da je N brojeći proces obnavljanja, odnosno pod pretpostavkom modela obnavljanja za S. Naravno, svi dobiveni zaključci vrijedit će i u posebnom slučaju Cramér-Lundbergovog modela s obzirom da smo istaknuli da je homogeni Poissonov proces specijalan slučaj brojećeg procesa obnavljanja.

Slika 2.1: *Trajektorija procesa S gdje je N standardni homogeni Poissonov proces i $X_i \sim$ Par(1)*



Jedno od najvažnijih pitanja u osiguranju je pitanje „veličine" od $S(t)$. Ta informacija je potrebna osiguravajućem društvu u određivanju premija koje pokrivaju gubitke predstavljene procesom S. Idealno bi bilo znati distribuciju od $S(t)$. Stoga, neka je $t \geq 0$ fiksan i

$G(x) = \mathbb{P}(S(t) \leq x)$. Uočimo da vrijedi:

$$\mathbb{P}(S(t) \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S(t) \leq x, N(t) = n). \tag{2.9}$$

Nadalje, uz $F(x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x)$, slijedi:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S(t) \leq x, N(t) = n) &= \mathbb{P}(S(t) \leq x \,|\, N(t) = n)\mathbb{P}(N(t) = n) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq x\right)\mathbb{P}(N(t) = n) = F^{n*}(x)\mathbb{P}(N(t) = n).\end{aligned} \tag{2.10}$$

Sada uvrštavanjem relacije (2.10) u (2.9) slijedi:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(x)\mathbb{P}(N(t) = n). \tag{2.11}$$

Vidimo da nam je za određivanje distribucije od $S(t)$ potrebno znati i distribuciju od $N(t)$. Međutim, napomenuli smo da je u općenitom slučaju distribucija brojećeg procesa obnavljanja nepoznata. Čak i ako je znamo, kao u slučaju homogenog Poissonovog procesa, dodatni problem stvara konvolucija F^{n*} koja ne postoji u zatvorenoj formi za distribucije šteta koje su nam od velikog značaja kao što su Paretova i log-normalna distribucija. Stoga ćemo, na ovom mjestu, dati pregled graničnih rezultata za $S(t)$. Ključnu ulogu imaju granični teoremi teorije obnavljanja.

Propozicija 2.2.1. Neka je N brojeći proces obnavljanja. Kao i prije, neka su W_i vremena međudolazaka šteta.

(1) Pretpostavimo da je $\mathbb{E}W_1 := \mu < \infty$ i $\mathbb{E}X_1 < \infty$. Tada je:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}S(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}X_1}{\mu}.$$

(2) Pretpostavimo da je $\mathrm{Var}(W_1) < \infty$ i $\mathrm{Var}(X_1) < \infty$. Tada je:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{Var}(S(t))}{t} = \frac{1}{\mu}\left(\mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(W_1)\frac{(\mathbb{E}X_1)^2}{\mu^2}\right).$$

U Cramér-Lundbergovom modelu gornje relacije svode se na identitete za svaki $t \geq 0$:

$$\mathbb{E}S(t) = t\frac{\mathbb{E}X_1}{\mu}, \quad \mathrm{Var}(S(t)) = t\frac{\mathbb{E}(X_1^2)}{\mu}.$$

Dokaz. (1) Iz činjenice da je N nezavisan od X_i i jednake distribucije slučajnih varijabli X_i imamo sljedeće:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S(t)) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \mid N(t)\right)\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \mid N(t)=n\right]\mathbb{P}(N(t)=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{E}X_1\mathbb{P}(N(t)=n) = \mathbb{E}N(t)\mathbb{E}X_1.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Sada tvrdnja slijedi dijeljenjem relacije (2.12) sa t i puštanjem limesa $t \to \infty$ uz korištenje tvrdnje Elementarnog teorema obnavljanja (Teorem 1.2.5).

(2) Uočimo da je:

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \mid N(t)\right] = \sum_{i=1}^{N(t)} \mathrm{Var}(X_i \mid N(t)) = N(t)\mathrm{Var}(X_1 \mid N(t)) = N(t)\mathrm{Var}(X_1), \tag{2.13}$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i \mid N(t)\right] = N(t)\mathbb{E}X_1. \tag{2.14}$$

Sada računamo Var$(S(t))$:

$$\begin{aligned}\text{Var}(S(t)) &= \mathbb{E}[N(t)\text{Var}(X_1)] + \text{Var}(N(t)\mathbb{E}X_1) \\ &= \mathbb{E}N(t)\text{Var}(X_1) + \text{Var}(N(t))(\mathbb{E}X_1)^2,\end{aligned} \tag{2.15}$$

gdje smo koristili relacije (2.13), (2.14) i formulu:

$$\text{Var}(S(t)) = \mathbb{E}[\text{Var}(S(t) \mid N(t))] + \text{Var}[\mathbb{E}(S(t) \mid N(t))]. \tag{2.16}$$

Sada tvrdnja slijedi dijeljenjem relacije (2.15) sa t i puštanjem limesa $t \to \infty$ uz korištenje tvrdnje Elementarnog teorema obnavljanja i asimptotskog rezultata za varijancu brojećeg procesa (Propozicija 1.2.6).

Teorem 2.2.2. Neka je N brojeći proces obnavljanja.

(1) (Jaki zakon velikih brojeva) Pretpostavimo da je $\mathbb{E}W_1 := \mu < \infty$ i $\mathbb{E}X_1 < \infty$. Tada je:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}X_1}{\mu} \ g.s.$$

(2) (Centralni granični teorem) Pretpostavimo da je Var$(W_1) < \infty$ i Var$(X_1) < \infty$. Tada je:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S(t) - \mathbb{E}S(t)}{\sqrt{\text{Var}(S(t))}} \le x\right) = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

gdje je Φ funkcija distribucije standardne normalne razdiobe.

Principi računanja premija

Sada dajemo pregled teorijskih principa računanja premija koji se najčešće spominju u aktuarskoj literaturi. Motivacija su nam prethodni rezultati gdje smo pokazali da u modelu obnavljanja očekivanje i varijanca ukupnog iznosa šteta rastu ugrubo linearno za veliki t. U praksi, osiguravajuća društva prilikom računanja premija uzimaju u obzir i neke druge faktore, npr. iznos premija njihove konkurencije, što je izvan okvira ovog teksta. Označimo sa $p(t)$ ukupni dohodak od premija do trenutka t. Neka poželjna svojstva od $p(t)$ su sljedeća:

(1) Nenegativan dodatak: $p(t) \ge \mathbb{E}S(t)$.

(2) Konzistentnost: Premija za $S(t) + c$ je $p(t) + c$.

(3) Aditivnost: Za nezavisne $S_1(t)$ i $S_2(t)$ s pripadnim premijama $p_1(t)$ i $p_2(t)$, premija za $S_1(t) + S_2(t)$ je $p_1(t) + p_2(t)$.

(4) Homogenost: Neka je $c > 0$, premija za $cS(t)$ je $cp(t)$.

Principi:

(1) Neto princip: $p_{Net}(t) = \mathbb{E}(S(t))$. Premija pokriva očekivani gubitak. U literaturi se još naziva fer tržišna premija. S ekonomskog stajališta nije poželjan princip jer osiguravajuće društvo ne ostvaruje profit. Štoviše, zanemarena su odstupanja gubitka od njegovog očekivanja što se može nepovoljno odraziti na osiguravajuće društvo.

(2) Princip očekivane vrijednosti: $p_{EV}(t) = (1+\theta)\mathbb{E}S(t)$, za neki $\theta > 0$ kojeg interpretiramo kao stopu zarade. S obzirom na izvedene asimptotske rezultate u modelu obnavljanja jasno je da veći θ pruža veću sigurnost osiguravajućem društvu. S druge strane „prevelik" θ čini osiguravajuće društvo manje konkurentnim.

(3) Princip varijance: $p_{\mathrm{Var}}(t) = \mathbb{E}S(t) + \alpha \mathrm{Var}(S(t))$, za neki $\alpha > 0$. U modelu obnavljanja ovaj princip je ekvivalentan principu očekivane vrijednosti u asimptotskom smislu. Uz pomoć propozicije 2.2.1 pokaže se da omjer premija po ovim dvama principima konvergira prema pozitivnoj konstanti kada $t \to \infty$.

(4) Princip standardne devijacije: $p_{SD}(t) = \mathbb{E}S(t) + \alpha\sqrt{\mathrm{Var}(S(t))}$, za neki $\alpha > 0$. Motivacija za ovaj princip je centralni granični teorem u modelu obnavljanja (Teorem 2.2.2) kojim se pokaže da kada $t \to \infty$, $\mathbb{P}(S(t) - p_{SD}(t) \leq x) \to \Phi(\alpha)$ za $x \in \mathbb{R}$, gdje je Φ funkcija distribucije standardne normalne razdiobe. Nadalje, iz propozicije 2.2.1 slijedi da $p_{Net}(t)/p_{SD}(t) \to 1$ kada $t \to \infty$.

Istaknimo na kraju kako samo neto princip zadovoljava sva četiri gore navedena svojstva.

3. TEORIJA PROPASTI

Nakon što smo proučili proces ukupnog broja šteta i proces ukupnog iznosa šteta, sada smo spremni istražiti osnovne koncepte teorije propasti. Znamo da priljev sredstava osiguravajućeg društva čine premije koje uplaćuju njegovi osiguranici, a odljev sredstava čine isplate šteta ukoliko nastupi osigurani slučaj. Cilj osiguravajućeg društva je da bude u mogućnosti, u svakom trenutku, pokriti svoje obveze. Štoviše, poželjno je da premije premašuju isplate šteta kako bi osiguravajuće društvo imalo prostora za zaradu. Stoga, glavni fokus teorije propasti je proces rizika $R = (R(t))_{t\geq 0}$ definiran sa:

$$R(t) = k + p(t) - S(t),$$

gdje je $k > 0$ početni kapital, $p(t)$ ukupan iznos premija do trenutka t i $S(t)$ ukupan iznos šteta do trenutka t. Istaknimo kako je početni kapital zakonski propisan od strane regulatora zaduženog za nadzor tržišta osiguranja. Pretpostavit ćemo da su premije dane linearnom funkcijom $p(t) = ct$ za $t \geq 0$, gdje je $c > 0$ stopa premije. Nadalje, za proces ukupnog iznosa šteta $S = (S(t))_{t\geq 0}$ pretpostavljamo model obnavljanja. Poglavlje je podijeljeno na četiri dijela. Za početak, navodimo osnovne pojmove i pretpostavke. U nastavku pokazujemo Lundbergovu nejednakost koja nam daje gornju ogradu za vjerojatnost propasti. Zatim, glavni dio poglavlja čini vjerojatnost propasti i njezina eksponencijalna aproksimacija u Cramér-Lundbergovom modelu.

3.1 Uvodni pojmovi

Na ovom mjestu prisjetimo se notacije i pretpostavki koje smo uveli u prethodnim poglavljima. Proces ukupnog broja šteta $N = (N(t))_{t\geq 0}$ dan je sa:

$$N(t) = \#\{i \geq 1 : T_i \leq t\},$$

gdje su T_i vremena dolazaka šteta, a $W_i = T_i - T_{i-1}$ vremena međudolazaka šteta za $i = 1, 2, \ldots$, uz konvenciju $T_0 = 0$. Vremena međudolazaka šteta su nezavisne, jednako distribuirane, nenegativne slučajne varijable. Proces ukupnog iznosa šteta $S = (S(t))_{t\geq 0}$ dan je sa:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

gdje su iznosi šteta X_i nenegativne, nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable. Pretpostavljamo da su nezavisne od N.

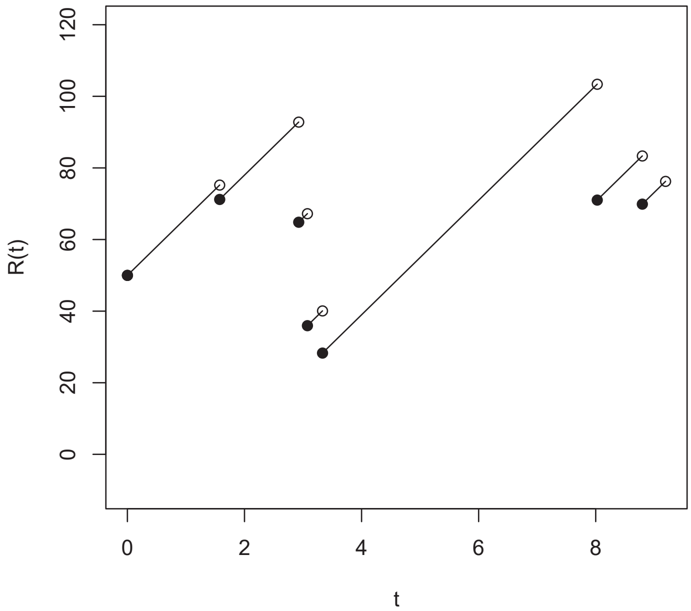
Definicija 3.1.1. (Propast, vrijeme propasti, vjerojatnost propasti)

(1) Propast je događaj $\Upsilon = \{R(t) < 0$ za neki $t > 0\}$.

(2) Vrijeme propasti je $\tau = \inf\{t > 0 : R(t) < 0\}$.

(3) Vjerojatnost propasti je $\psi(k) = \mathbb{P}(\Upsilon \mid R(0) = k) = \mathbb{P}(\tau < \infty), \quad k > 0.$

Slika 3.1: *Trajektorija procesa rizika gdje je N standardni homogeni Poissonov proces, $X_i \sim$ Exp(1/15), $k = 50$ i $c = 16$.*



Primijetimo da slučajna varijabla τ nije nužno realna jer može poprimiti vrijednost ∞ s pozitivnom vjerojatnošću. Nadalje, uvjetna vjerojatnost u definiciji vjerojatnosti propasti iskazuje ovisnost vjerojatnosti propasti o početnom kapitalu $k > 0$ koji je konstanta. Nije teško uočiti kako je propast moguća samo u trenutcima T_i za neki $i \geq 1$, s obzirom da u svakom intervalu $[T_i, T_{i+1})$ proces R raste linearno. Obično se niz $(R(T_i))_{i \geq 1}$ naziva kosturni proces procesa R. Na temelju ovoga razmatranja imamo sljedeće:

$$\begin{aligned}\Upsilon &= \bigcup_{t\geq 0}\{R(t)<0\} = \left\{\inf_{t\geq 0} R(t) < 0\right\} = \left\{\inf_{n\geq 1} R(T_n) < 0\right\}\\ &= \left\{\inf_{n\geq 1}\Big(k + p(T_n) - S(T_n)\Big) < 0\right\}\\ &= \left\{\inf_{n\geq 1}\left(k + cT_n - \sum_{i=1}^{n} X_i\right) < 0\right\}.\end{aligned}$$

Uvedimo sada sljedeće oznake:

$$Y_n = X_n - cW_n, \quad Z_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n, \quad n \geq 1, \quad Z_0 = 0.$$

Uzimajući u obzir da je $T_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$ za $n \geq 1$ imamo:

$$\Upsilon = \left\{ \inf_{n \geq 1} (k - Z_n) < 0 \right\},$$

odnosno

$$\psi(k) = \mathbb{P}\left(\inf_{n \geq 1} (-Z_n) < -k \right) = \mathbb{P}\left(\sup_{n \geq 1} Z_n > k \right).$$

Vidimo da je određivanje vjerojatnosti propasti ekvivalentno problemu vjerojatnosti da supremum slučajne šetnje Z_n prijeđe nivo k. Za početak, pogledajmo u kojim slučajevima se propast događa s vjerojatnošću 1.

Propozicija 3.1.2. Pretpostavimo da je $\mathbb{E}W_1 < \infty$ i $\mathbb{E}X_1 < \infty$. Ukoliko je $\mathbb{E}Y_1 \geq 0$, tada za svaki fiksni $k > 0$ vrijedi $\psi(k) = 1$.

Dokaz. Primijetimo prvo da je $\mathbb{E}Y_1 = \mathbb{E}X_1 - c\mathbb{E}W_1 < \infty$. Nadalje, slučajna šetnja $(Z_n)_{n \geq 1}$ zadovoljava jaki zakon velikih brojeva:

$$\frac{Z_n}{n} \stackrel{g.s.}{\to} \mathbb{E}Y_1, \quad n \to \infty.$$

U slučaju kada je $\mathbb{E}Y_1 > 0$, slijedi da $Z_n \stackrel{g.s.}{\to} +\infty$, odnosno $\psi(k) = 1$. Za slučaj kada je $\mathbb{E}Y_1 = 0$ koristimo rezultat iz teorije slučajnih šetnji (vidi [12, str. 155]) koji kaže da za g.s. ω postoje podnizovi $(n_k(\omega))$ i $(m_k(\omega))$ takvi da $Z_{n_k}(\omega) \to +\infty$ i $Z_{m_k}(\omega) \to -\infty$. Ponovo dobivamo da je $\psi(k) = 1$.

Iz gornje propozicije zaključujemo da osiguravajuće društvo, kako bi izbjeglo propast koja se događa s vjerojatnošću 1, treba odrediti premiju $p(t)$ tako da je $\mathbb{E}Y_1 < 0$. Taj uvjet nazvat ćemo uvjet neto profita. Za ilustraciju pogledajmo sljedeći primjer.

Primjer 3.1.3. (Uvjet neto profita i računanje premija) Pretpostavimo Cramér-Lundbergov model za S. Iz propozicije 2.2.1 znamo da je:

$$\mathbb{E}S(t) = t\frac{\mathbb{E}X_1}{\mu}, \quad \mu := \mathbb{E}W_1.$$

Ako premiju računamo po neto principu $p(t) = \mathbb{E}S(t)$ dobivamo da je $c = \mathbb{E}X_1/\mu$. Tada je $\mathbb{E}Y_1 = 0$ te iz prethodne propozicije zaključujemo da je u tom slučaju $\psi(k) = 1$. Taj rezultat skladu je s intuitivnim razmatranjima o neto principu iz prethodnog poglavlja. Pretpostavimo sada da premiju računamo po principu očekivane vrijednosti:

$$p(t) = (1 + \theta)\mathbb{E}S(t), \theta > 0.$$

Dobivamo da je stopa premije tada jednaka:

$$c = (1 + \theta)\frac{\mathbb{E}X_1}{\mu}.$$

Tada je uvjet neto profita zadovoljen jer je $\mathbb{E}Y_1 < 0$.

3.2 Lundbergova nejednakost

U ovom dijelu izvest ćemo gornju ogradu za $\psi(k)$ koja se u literaturi naziva Lundbergova nejednakost. Pretpostavljamo model obnavljanja za S i uvjet neto profita. Prije samog rezultata trebaju nam dodatne pretpostavke. Za početak, prisjetimo se definicije funkcije izvodnice momenta slučajne varijable.

Definicija 3.2.1. Neka je X slučajna varijabla. Pretpostavimo da postoji $h_0 > 0$ takav da je $\mathbb{E}\Big(e^{hX}\Big) < \infty$ za sve $h \in (-h_0, h_0)$. Funkcija $m_X : (-h_0, h_0) \to \mathbb{R}$ definirana sa:

$$m_X(h) := \mathbb{E}\Big(e^{hX}\Big)$$

naziva se funkcija izvodnica momenta od X.

Dobro poznato svojstvo funkcije izvodnice momenta iz teorije vjerojatnosti je da ima derivacije svakog reda i da vrijedi $m_X{}^{(n)}(0) = \mathbb{E}(X^n)$ za $n \geq 1$. U nastavku pretpostavljamo da funkcija izvodnica momenta slučajne varijable Y_i postoji, što povlači postojanje funkcije izvodnice momenta iznosa šteta X_i. Primijetimo kako iz propozicije 2.1.7 slijedi da ova pretpostavka ne vrijedi za subeksponencijalne distribucije. Dakle, daljnju analizu ograničavamo na „distribucije malih šteta."

Propozicija 3.2.2. Pretpostavimo da postoji $0 < h_1 \leq \infty$ takav da je $m_{Y_1}(h) < \infty$ za $h < h_1$ i $\lim_{h \to h_1} m_{Y_1}(h) = \infty$. Tada postoji jedinstven $r > 0$ takav da je $m_{Y_1}(r) = 1$. Nadalje, r se naziva koeficijent prilagodbe ili Lundbergov koeficijent.

Dokaz. Označimo sa $f(h) = m_{Y_1}(h)$ za $h \in (-h_0, h_0)$, $h_0 > 0$. Primijetimo prvo da je $f(0) = 1$. Zbog uvjeta neto profita vrijedi: $f'(0) = \mathbb{E}Y_1 < 0$, što zajedno s neprekidnošću od f povlači da f strogo pada na nekoj okolini oko nule. Nadalje, $f''(h) = \mathbb{E}({Y_1}^2 \exp\{hY_1\}) > 0$ zbog $Y_1 \neq 0$ g.s. Iz toga zaključujemo da je f konveksna. Sada uz pomoć pretpostavke da je $\lim_{h \to h_1} m_{Y_1}(h) = \infty$ slijedi tvrdnja.

Teorem 3.2.3. (Lundbergova nejednakost) Pretpostavimo model obnavljanja za S, uvjet neto profita i postojanje Lundbergovog koeficijenta $r > 0$. Tada za svaki $k > 0$ vrijedi:

$$\psi(k) \leq e^{-rk}.$$

Dokaz. Uvedimo oznaku:

$$\psi_n(k) = \mathbb{P}(\max_{1 \leq i \leq n} Z_i > k) = \mathbb{P}(Z_i > k \text{ za neki } i \in \{1, 2, \dots, n\}). \tag{3.1}$$

Primijetimo da $\psi_n(k) \to \psi(k)$ kada $n \to \infty$ za svaki $k > 0$. Stoga je dovoljno pokazati da:

$$\psi_n(k) \leq e^{-rk}, \quad \forall n \geq 1, k > 0. \tag{3.2}$$

Gornja relacija dokazuje se indukcijom po n za svaki $k > 0$.

Primjer 3.2.4. (Lundbergova nejednakost za eksponencijalno distribuirane štete) Pretpostavimo Cramér-Lundbergov model za S, odnosno neka je N homogeni Poissonov proces s intenzitetom λ. U tom slučaju znamo da su $W_i \sim$ Exp(λ). Nadalje, neka su $X_i \sim$ Exp(γ). Funkcija izvodnica momenta slučajne varijable $A \sim$ Exp(a) dana je sa:

$$m_A(h) = \int_0^\infty e^{hx} a e^{-ax} dx = a \int_0^\infty e^{(h-a)x} dx = \frac{a}{h-a} e^{(h-a)x} \Big|_0^\infty = \frac{a}{a-h}, \quad h < a. \tag{3.3}$$

Sada možemo odrediti funkciju izvodnicu momenta slučajne varijable $Y_1 = X_1 - cW_1$:

$$m_{Y_1}(h) = m_{X_1}(h) m_{cW_1}(-h) = \frac{\gamma}{\gamma - h} \frac{\lambda}{\lambda + ch}, \quad \frac{}{c} < h < \gamma. \tag{3.4}$$

Uvjet neto profita je zadovoljen ukoliko je $\mathbb{E}Y_1 = \mathbb{E}X_1 - c\mathbb{E}W_1 < 0$, odnosno:

$$\frac{\mathbb{E}X_1}{\mathbb{E}W_1} = \frac{\lambda}{\gamma} < c. \tag{3.5}$$

Pod ovim uvjetom postoji jedinstveno pozitivno rješenje jednadžbe $m_{Y_1}(h) = 1$:

$$\frac{\gamma}{\gamma - h} = \frac{\lambda + ch}{\lambda} = 1 + h\frac{c}{\lambda}, \tag{3.6}$$

i dano je sa (Lundbergov koeficijent):

$$r = \gamma - \frac{\lambda}{c} > 0. \tag{3.7}$$

U slučaju računanja premije po principu očekivane vrijednosti, iz primjera 3.1.3 dobivamo:

$$c = (1+\theta)\frac{\mathbb{E}X_1}{\mathbb{E}W_1} = (1+\theta)\frac{\lambda}{\gamma}. \tag{3.8}$$

Sada je

$$r = \gamma - \frac{\gamma}{1+\theta} = \frac{\gamma\theta}{1+\theta}. \tag{3.9}$$

Zaključujemo da u ovom primjeru Lundbergova nejednakost poprima oblik:

$$\psi(k) \leq \text{exp}\left\{ -\frac{\gamma\theta}{1+\theta} k \right\}, \quad k > 0. \tag{3.10}$$

3.3 Vjerojatnost propasti u Cramér-Lundbergovom modelu

U cijelom ovom dijelu pretpostavljat ćemo Cramér-Lundbergov model za S. Intenzitet homogenog Poissonovog procesa N označit ćemo sa λ. Nadalje, pretpostavljamo uvjet neto profita kojega ćemo izraziti preko principa očekivane vrijednosti kao u primjeru 3.1.3:

$$c = (1+\theta)\frac{\mathbb{E}X_1}{\mathbb{E}W_1},$$

odnosno

$$\theta = c\frac{\mathbb{E}W_1}{\mathbb{E}X_1} - 1 > 0,$$

gdje smo parametar $\theta > 0$ iz principa očekivane vrijednosti interpretirali kao stopu zarade ili, možemo reći, da je to dodatak za sigurnost. Dodatno, uvodimo pojam vjerojatnosti opstanka (vjerojatnost preživljenja):

$$\varphi(k) = 1 - \psi(k), k > 0.$$

Cilj nam je izvesti integralnu jednadžbu za φ te na primjerima pokazati kako je možemo primijeniti na računanje vjerojatnosti propasti u Cramér-Lundbergovom modelu [6, str. 167–169].

Teorem 3.3.1. (Fundamentalna integralna jednadžba za vjerojatnost opstanka) Pretpostavimo Cramér-Lundbergov model za S i uvjet neto profita te $\mathbb{E}X_1 < \infty$. Nadalje, pretpostavimo da slučajne varijable X_i imaju gustoću. Tada $\varphi(k)$ zadovoljava sljedeću integralnu jednadžbu:

$$\varphi(k) = \varphi(0) + \frac{1}{(1+\theta)\mathbb{E}X_1}\int_0^k \overline{F}_{X_1}(y)\varphi(k-y)dy.$$

Napomena 3.3.2. Označimo sa $\tilde{F}_{X_1}$ integrirani rep distribucije F_{X_1}, odnosno

$$\tilde{F}_{X_1}(y) = \frac{1}{\mathbb{E}X_1}\int_0^y \overline{F}_{X_1}(z)dz, \quad y > 0.$$

Primijetimo da je $\tilde{F}_{X_1}$ funkcija distribucije jer $\tilde{F}_{X_1}(y) \to 1$ kada $y \to \infty$, s obzirom da je X_1 nenegativna slučajna varijabla, pa je njezino očekivanje dano sa $\mathbb{E}X_1 = \int_0^\infty \overline{F}_{X_1}(y)dy$. Sada pišemo:

$$\varphi(k) = \varphi(0) + \frac{1}{1+\theta}\int_0^k \varphi(k-y)d\tilde{F}_{X_1}(y).$$

Lema 3.3.3. Uz pretpostavke kao u teoremu 3.3.1 vrijedi: $\varphi(0) = \theta(1+\theta)^{-1}$.

Dokaz. Iz uvjeta neto profita i činjenice da $Z_n \to -\infty$ g.s. slijedi da je $\sup_{n\geq 1} Z_n < \infty$ g.s. Stoga, $\varphi(k) \to 1$ kada $k \to \infty$. Uz pomoć napomene 3.3.2 i Lebesqueovog teorema o monotonoj konvergenciji slijedi:

$$\begin{aligned} 1 = \lim_{k\to\infty}\varphi(k) &= \varphi(0) + \frac{1}{1+\theta}\lim_{k\to\infty}\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{y\leq k\}}\varphi(k-y)d\tilde{F}_{X_1}(y) \\ &= \varphi(0) + \frac{1}{1+\theta}\int_0^\infty 1 d\tilde{F}_{X_1}(y) \qquad (3.11) \\ &= \varphi(0) + \frac{1}{1+\theta}. \end{aligned}$$

Uz oznaku $q = 1/(1+\theta)$ i $\varphi(k) = 1 - \psi(k)$ dobivamo jednadžbu obnavljanja za $\psi(k)$:

$$\psi(k) = q(1 - \tilde{F}_{X_1}(k)) + \int_0^k \psi(k-x)d(q\tilde{F}_{X_1}(x)). \tag{3.12}$$

Primijetimo da je $\lim_{x\to\infty}(q\tilde{F}_{X_1}(x)) = q < 1$ i da pomoću teorema 1.2.9 možemo riješiti gornju jednadžbu. No, zbog jednostavnosti i sljedećeg važnog primjera i rezultata primijenit ćemo Esscherovu transformaciju kojom ćemo dobiti funkciju distribucije u gornjoj jednadžbi. Definiramo:

$$F^{(r)}(x) := \int_0^x e^{ry}d(q\tilde{F}_{X_1}(y)) = q\int_0^x e^{ry}d\tilde{F}_{X_1}(y) = \frac{q}{\mathbb{E}X_1}\int_0^x e^{ry}\overline{F}_{X_1}(y)dy, \tag{3.13}$$

gdje je r Lundbergov koeficijent. Uočimo da je $F^{(r)}$ neopadajuća. Nadalje, po definiciji Lundbergovog koeficijenta i parcijalnom integracijom pokaže se da kada $x \to \infty$ vrijedi:

$$\frac{q}{\mathbb{E}X_1}\int_0^\infty e^{ry}\overline{F}_{X_1}(y)dy = 1. \tag{3.14}$$

Zaključujemo da je $F^{(r)}$ funkcija distribucije. Pomnožimo sada jednadžbu (3.12) sa e^{rk}:

$$\begin{aligned} e^{rk}\psi(k) &= qe^{rk}(1 - \tilde{F}_{X_1}(k)) + \int_0^k e^{r(k-x)}\psi(k-x)e^{rx}d(q\tilde{F}_{X_1}(x)) \\ &= qe^{rk}(1 - \tilde{F}_{X_1}(k)) + \int_0^k e^{r(k-x)}\psi(k-x)dF^{(r)}(x). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Označimo sada sa $z(t) := qe^{rt}(1 - \tilde{F}_{X_1}(t))$ i $U(t) := \sum_{n=1}^{\infty} F^{(r)n*}(t)$. Tada je po teoremu 1.2.9 rješenje gornje jednadžbe obnavljanja dano sa:

$$e^{rt}\psi(t) = z(t) + (U * z)(t). \tag{3.16}$$

Iz gornjega primjećujemo da vjerojatnost propasti nije eksplicitno dana. Međutim, ukoliko pretpostavimo da su štete eksponencijalno distribuirane, možemo je prilično jednostavno izračunati. Pogledajmo to u sljedećem primjeru.

Primjer 3.3.4. (Vjerojatnost propasti u Cramér-Lundbergovom modelu s eksponencijalno distribuiranim štetama) Pretpostavimo da su $X_i \sim$ Exp(γ). Izračunajmo prvo $z(t)$:

$$z(t) = qe^{rt}\left[1 - \gamma\int_0^t e^{-\gamma y}dy\right] = qe^{rt}\left[1 + e^{-\gamma y}\Big|_0^t\right] = qe^{(r-\gamma)t}.$$

Iz primjera 3.2.4, gdje smo računali Lundbergovu nejednakost za slučaj eksponencijalnih šteta, Lundbergov koeficijent jednak je (uz oznaku $q = 1/(1+\theta)$):

$$r = \frac{\gamma\theta}{1+\theta} = \gamma(1-q).$$

Sada računamo $F^{(r)}(t)$:

$$F^{(r)}(t) = q\gamma \int_0^t e^{(r-\gamma)y} dy = \frac{q\gamma}{r-\gamma}\left(e^{(r-\gamma)t} - 1\right) = 1 - e^{(r-\gamma)t}.$$

Zaključujemo da je $F^{(r)}$ funkcija distribucije eksponencijalne slučajne varijable s parametrom $\gamma - r = \gamma q$. Sada uz pomoć definicije funkcije obnavljanja (definicija 1.2.7) i relacije (1.16) funkciju $U(t)$ možemo interpretirati kao funkciju obnavljanja $U(t) = \mathbb{E}N^{(r)}(t)$ gdje je $N^{(r)}$ homogeni Poissonov proces s parametrom γq. Slijedi da je $U(t) = \gamma q t$. Konačno:

$$e^{rt}\psi(t) = qe^{(r-\gamma)t} + \int_0^t qe^{(r-\gamma)(t-y)}\gamma q dy = q.$$

Dakle, dobili smo vjerojatnost propasti $\psi(t) = qe^{-rt}$, $t > 0$.

3.4 Aproksimacija vjerojatnosti propasti u Cramer-Lundbergovom modelu

U prethodnom dijelu odredili smo vjerojatnost propasti u Cramer-Lundbergovom modelu kada su štete eksponencijalno distribuirane. Sada ćemo opisati jednostavnu metodu koja koristi taj rezultat kao aproksimaciju vjerojatnosti propasti kada štete nisu eksponencijalno distribuirane. Neka je $R(t) = k + ct - S(t)$ proces rizika gdje pretpostavljamo Cramér-Lundbergov model za S, odnosno sa λ označavamo intenzitet homogenog Poissonovog procesa N.

Nadalje, neka je F distribucija šteta X_i takva da su momenti $u_n := \mathbb{E}[X_1{}^n]$ konačni za $n = 1, 2, 3$. Proces rizika $R = (R(t))_{t \geq 0}$ aproksimiramo procesom rizika $\tilde{R}(t) = k + \tilde{c}t - \tilde{S}(t)$, gdje intenzitet homogenog Poissonovog procesa označavamo sa $\tilde{\lambda}$. Štete $\tilde{X}_i$ imaju eksponencijalnu razdiobu s parametrom $\tilde{\gamma}$. Vjerojatnost propasti za proces rizika $\tilde{R}$ dana je sa:

$$\tilde{\psi}(k) = \tilde{q}e^{-\tilde{r}k}, \quad \tilde{q} = \frac{1}{1+\tilde{\theta}}, \quad \tilde{r} = \tilde{\gamma}(1-\tilde{q}).$$

Sjetimo se da iz uvjeta neto profita imamo sljedeće:

$$\tilde{c} = (1+\tilde{\theta})\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\gamma}},$$

odnosno

$$\tilde{q} = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\gamma}\tilde{c}}, \quad \tilde{r} = \tilde{\gamma} - \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{c}}.$$

Sada je eksponencijalna, odnosno De Vylderova aproksimacija vjerojatnosti propasti za proces rizika R dana sa:

$$\tilde{\psi}(k) = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\gamma}\tilde{c}}\text{exp}\bigg\{ - \bigg(\tilde{\gamma} - \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{c}}\bigg) k \bigg\}, \quad k > 0.$$

Parametre $(\tilde{c}, \tilde{\lambda}, \tilde{\gamma})$ dobivamo izjednačavanjem momenata procesa R i $\tilde{R}$. Prvo stavimo:

$$\mathbb{E}[R(t)] = \mathbb{E}[\tilde{R}(t)]$$

$$k + ct - \mathbb{E}S(t) = k + \tilde{c}t - \mathbb{E}\tilde{S}(t).$$

Iz propozicije 2.2.1 slijedi da je $\mathbb{E}S(t) = \lambda u_1 t$ i $\mathbb{E}\tilde{S}(t) = \tilde{\lambda}t/\tilde{\gamma}$. Sada iz gornjega slijedi:

$$k + ct - \lambda u_1 t = k + \tilde{c}t - \frac{\tilde{\lambda}t}{\tilde{\gamma}}, \tag{3.17}$$

iz čega dobivamo da je

$$\tilde{c} = c - \lambda u_1 + \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\gamma}}. \tag{3.18}$$

Sljedeći uvjet je:

$$\mathbb{E}\Big[(R(t) - \mathbb{E}[R(t)])^2\Big] = \mathbb{E}\Big[(\tilde{R}(t) - \mathbb{E}[\tilde{R}(t)])^2\Big],$$

koji je ekvivalentan

$$\text{Var}(S(t)) = \text{Var}(\tilde{S}(t)).$$

Ponovo iz propozicije 2.2.1 slijedi:

$$\lambda u_2 = \frac{2\tilde{\lambda}}{\tilde{\gamma}^2}. \tag{3.19}$$

Konačno, treći uvjet dan je sa:

$$\mathbb{E}\Big[(R(t) - \mathbb{E}[R(t)])^3\Big] = \mathbb{E}\Big[(\tilde{R}(t) - \mathbb{E}[\tilde{R}(t)])^3\Big],$$

koji je ekvivalentan

$$\mathbb{E}\Big[(S(t) - \mathbb{E}[S(t)])^3\Big] = \mathbb{E}\Big[(\tilde{S}(t) - \mathbb{E}[\tilde{S}(t)])^3\Big].$$

Pomoću funkcije izvodnice momenta lako se pokaže da vrijedi:

$$\mathbb{E}\Big[(S(t) - \mathbb{E}[S(t)])^3\Big] = \lambda u_3 t. \tag{3.20}$$

Sada gornji uvjet glasi:

$$\lambda u_3 = \frac{6\tilde{\lambda}}{\tilde{\gamma}^3}. \tag{3.21}$$

Iz relacija (3.19) i (3.21) dobivamo parametre $\tilde{\gamma}$ i $\tilde{\lambda}$:

$$\tilde{\gamma} = \frac{3u_2}{u_3}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{9\lambda u_2^3}{2u_3^2}. \tag{3.22}$$

Za ilustraciju ove aproksimacije pogledajmo sljedeći primjer gdje ćemo usporediti točne i aproksimativne vjerojatnosti propasti za različite $k > 0$.

Primjer 3.4.1. Pretpostavimo Cramér-Lundbergov model za S, gdje sa λ označavamo intenzitet homogenog Poissonovog procesa. Nadalje, neka su $X_i \sim \Gamma(2,2)$ te stopa premije dana sa $c = 1.2\lambda$. Gustoća slučajnih varijabli X_i dana je sa:

$$f(x) = 4xe^{-2x}, x > 0,$$

a za momente $u_n := \mathbb{E}[X_1^n]$ vrijedi sljedeće:

$$u_n = \frac{\Gamma(2+n)}{\Gamma(2)2^n},$$

gdje Γ označava gamma funkciju danu sa:

$$\Gamma(\beta) = \int_0^\infty x^{\beta-1}e^{-x}dx, \quad \beta > 0.$$

Računanjem momenata za $n = 1, 2, 3$ pomoću gornjeg integrala dobivamo: $u_1 = 1$, $u_2 = 3/2$, $u_3 = 3$. Iz gornjih relacija (3.18) i (3.22) dobivamo parametre $\tilde{c}$, $\tilde{\lambda}$ i $\tilde{\gamma}$.

$$\tilde{\lambda} = \frac{9\lambda u_2^3}{2u_3^2} = \frac{9\lambda \times 1.5^3}{2 \times 3^2} = \frac{27\lambda}{16},$$

$$\tilde{\gamma} = \frac{3u_2}{u_3} = \frac{3 \times 1.5}{3} = \frac{3}{2},$$

$$\tilde{c} = c - \lambda u_1 + \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\gamma}} = 1.2\lambda - \lambda + \frac{9\lambda}{8} = \frac{53\lambda}{40}.$$

Sada je aproksimacija vjerojatnosti propasti dana sa:

$$\tilde{\psi}(k) = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\gamma}\tilde{c}}\text{exp}\left\{ -\left(\tilde{\gamma} - \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{c}}\right)k \right\} = \frac{45}{53}\text{exp}\left\{ -\frac{12}{53}k \right\}.$$

Kako bismo našli točnu vjerojatnost propasti u ovom primjeru, poslužit će nam Laplaceove transformacije, koje se u nekim situacijama pokazuju izuzetno korisnom tehnikom. Kratak podsjetnik na svojstva Laplaceovih transformacija dan je u [2, str. 138-139]. Sjetimo se sada vjerojatnosti opstanka $\varphi(k) = 1 - \psi(k)$ i teorema 3.3.1. Za vjerojatnost opstanka vrijedi sljedeća relacija:

$$\varphi'(k) = \frac{\lambda}{c}\varphi(k) - \frac{\lambda}{c}\int_0^k \varphi(k-x)f(x)dx. \tag{3.23}$$

Primijenimo sada Laplaceove transformacije na gornju jednakost, pri čemu oznaka f^* označava Laplaceovu transformaciju funkcije f:

$$s\varphi^*(s) - \varphi(0) = \frac{\lambda}{c}\varphi^*(s) - \frac{\lambda}{c}f^*(s)\varphi^*(s), \tag{3.24}$$

odnosno

$$\varphi^*(s) = \frac{c\varphi(0)}{cs - \lambda(1 - f^*(s))}. \tag{3.25}$$

U našem slučaju f^* dana je sa:

$$f^*(s) = 4\int_0^\infty e^{-sx}xe^{-2x}dx = \frac{4}{(2+s)^2}. \tag{3.26}$$

Nadalje, iz leme 3.3.3 računamo $\varphi(0)$:

$$\varphi(0) = \frac{\theta}{1+\theta} = 1 - \frac{1}{1+\theta}. \tag{3.27}$$

Sada iz uvjeta neto profita

$$c = (1+\theta)\frac{\mathbb{E}X_1}{\mathbb{E}W_1}, \tag{3.28}$$

uvažavajući da je $c = 1.2\lambda$ i $\mathbb{E}X_1 = 1$ slijedi:

$$\varphi(0) = 1 - \frac{1}{1.2} = \frac{1}{6}. \tag{3.29}$$

Konačno, uz izostavljanje tehničkih detalja, imamo:

$$\varphi^*(s) = \frac{0.2\lambda}{1.2\lambda s - \lambda\Big(1 - 4(2+s)^{-2}\Big)} = \frac{(1/6)(2+s)^2}{s(s+C_1)(s+C_2)}, \tag{3.30}$$

gdje su konstante $C_1 = 0.2268$ i $C_2 = 2.9399$. Rastavljanjem na parcijalne razlomke dobivamo:

$$\varphi^*(s) = \frac{1}{s} - \frac{0.8518}{s+C_1} + \frac{0.0185}{s+C_2}. \tag{3.31}$$

Invertiranjem Laplaceovih transformacija slijedi:

$$\varphi(k) = 1 - 0.8518e^{-C_1k} + 0.0185e^{-C_2k}, \tag{3.32}$$

odnosno

$$\psi(k) = 0.8518e^{-C_1k} - 0.0185e^{-C_2k}. \tag{3.33}$$

Tablica 3.1: *Usporedba točnih i aproksimativnih vrijednosti vjerojatnosti propasti.*

k	$\psi(k)$	$\tilde{\psi}(k)$
0	0.8333	0.8491
3	0.4314	0.4305
6	0.2185	0.2182
9	0.1107	0.1107
12	0.0560	0.0561
15	0.0284	0.0284
18	0.0144	0.0144

Summary: *This thesis presents the basic concepts of risk theory that models two sources of nonlife insurance uncertainty: how many claims an insured person will report and what are the amounts of those claims. Accordingly, claim number process and total claim amount process are defined. Together, these two processes form a constitutive part of the risk process that monitors the relation between premiums and claims paid. The paper is divided into three chapters. The first chapter describes the basic properties of the mathematical models for the claim number process homogeneous Poisson process and renewal process. The second chapter provides an overview of the claim size distributions with particular emphasis on heavytailed distributions regularly varying and subexponential distributions. Furthermore, the chapter explains the basic model properties for the total claim amount process CramérLundberg model and renewal model. The last chapter presents the fundamental results of the ruin theory whose main focus is the risk process.*

Keywords: *homogeneous Poisson process, renewal process, risk theory, risk process, ruin theory, nonlife insurance*

Navedeni izvori i korištena literatura

Hrvatska agencija za nadzor financijskih usluga. https://www.hanfa.hr/publikacije/mjesecna-izvjesca/. (studeni 2019.).

Dickson, D.C.M: Insurance Risk and Ruin. Cambridge University Press, 2005.

Embrechts, P., C. Kluppelberg i T. Mikosch: Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer, 1997.

Gut, A.: Stopped Random Walks. Springer, 1988.

Lefebvre, M.: Applied Stochastic Processes. Springer, 2005.

Mikosch, T.: NonLife Insurance Mathematics. Springer, 2009.

Resnick, S.I.: Extreme Values, Regular Variation and Point Processes. Springer, 1987.

Resnick, S.I.: Adventures in Stochastic Processes. Birkhäuser, 1992.

Ross, S.M.: Introduction to Probability Models. Academic Press, an imprint of Elsevier Science, 2010.

Sarapa, N.: Teorija vjerojatnosti. Školska knjiga, 2002.

Schmidli, H.: Risk Theory. Springer, 2017.

Spitzer, F.: Principles of Random Walk. Springer, 1976.

Straub, E.: NonLife Insurance Mathematics. Springer, 1997.

Šikić, H.: Mjera i integral (skripta). dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/mii/mii_predavanja.pdf. (rujan 2019.).

Vondraček, Z.: Slučajni procesi (skripta). dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/sp19-predavanja.html. (rujan 2019.).