UDK 519.218.7:528.235:517.542
Izvorni znanstveni članak / Original scientific paper

Gauss-Krügerova projekcija kao dvostruko preslikavanje

U povodu proglašenja C. F. Gaussa globalnim geodetom 2021. godine

Miljenko LAPAINE – Zagreb[1]

SAŽETAK. Carl Friedrich Gauss u geodeziji je posebno poznat po kartografskoj projekciji koja se naziva Gauss-Krügerovom, a u službenoj je upotrebi u mnogim državama svijeta, ponekad poznata i kao poprečna Mercatorova projekcija. Manje je poznato da je Gauss istraživao i druge varijante konformnih preslikavanja rotacijskog elipsoida na sferu te sfere i elipsoida u ravninu. U ovom se radu pokazuje da se Gauss-Krügerova projekcija može interpretirati kao dvostruko preslikavanje: konformno preslikavanje elipsoida na sferu i zatim konformno preslikavanje sfere u ravninu. Na taj se način može opravdati naziv te projekcije kao poprečne projekcije, budući da je aspekt projekcije definiran za projekcije sfere, a ne elipsoida. Uz to je pokazano da je Gauss-Krügerova projekcija samo jedno od mogućih poopćenja poprečne Mercatorove projekcije sfere.

Ključne riječi: Gauss-Krügerova projekcija, poprečna Mercatorova projekcija, dvostruko preslikavanje.

1. Uvod

Često se može pročitati da je Gauss-Krügerova projekcija konformna poprečna cilindrična projekcija. Da je to konformna projekcija nema dvojbe jer se u njezinoj definiciji i u izvodu postavlja taj uvjet. Međutim, nije jasno zbog čega je to poprečna cilindrična projekcija. Većina autora pri objašnjavanju te projekcije upotrebljava ilustraciju na kojoj je prikazan elipsoid i oko njega omotana cilindrična ploha. Međutim, to nema nikakvu težinu jer se ni u definiciji ni u izvodu Gauss-Krügerove projekcije ne pojavljuje nikakav cilindar.

[1] Prof. emer. dr. sc. Miljenko Lapaine, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, HR-10000 Zagreb, Hrvatska, e-mail: mlapaine@geof.hr

Osnovni podatci o povijesti Gauss-Krügerove projekcije mogu se saznati iz predgovora knjige *Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene* (Krüger 1912). Očito je da je Heinrich Christian Schumacher (1780 – 1850), njemačko-danski astronom i matematičar, bio važna osoba za geodeziju toga doba. Godine 1816., dobio je od danskoga kralja zadatak izmjeriti duljine luka paralele i meridijana od Skagena do Lauenburga i od Kopenhagena do zapadne obale Jutlanda. Schumacherov prijedlog za nastavak mjerenja danskog luka paralele kroz Hannover C. F. Gauss je spremno prihvatio. Schumacherovo vješto posredovanje i poslovanje uspjeli su nagovoriti hanoversku vladu na nastavak mjerenja luka danske paralele. Lanac trokuta koji se proteže od Inselberga do stranice Hamburg-Lüneburg, Gauss je mjerio od 1821. do 1823.; ta je mjerenja nastavio 1824. i 1825. kao zapadni nastavak do stranice Varel-Jevera nizozemske mreže trokuta general-pukovnika von Krayenhoffa. Nakon mjerenja tih lanaca slijedili su dopunski lanci trokuta za izmjeru pod Gaussovim vodstvom u razdoblju od 1828. do 1844. Sve opservacijske materijale obradio je sam Gauss. Dok je izjednačenje mreže trokuta za određivanje duljine stupnja i njezin nastavak prema Jeveru obavio primjenom metode korelata i uvjetnim jednadžbama na Zemljinu elipsoidu, umetnuo je lance izmjere zemljišta i mnogih sekundarnih točaka s pomoću ravninskih koordinata, nakon što su točke prethodno prenesene u ravninu.

Za prijenos točaka sa Zemljina elipsoida u ravninu Gauss se koristio konformnim preslikavanjem. Zadatak: jednu plohu preslikati na drugu tako da slika bude slična originalu u najmanjim dijelovima, prvi se put spominje u Gaussovu pismu Schumacheru od 5. srpnja 1816. To je bio odgovor na Schumacherovo priopćenje o narudžbi za mjerenje danskog luka; istodobno se taj zadatak preporučuje kao predmet nagradnog pitanja Znanstvenom društvu u Kopenhagenu, koje je na Schumacherov poticaj dva puta objavilo to pitanje. Gauss je poslao rješenje krajem1822.; ono je prvi put objavljeno 1825. u Schumacherovim astronomskim raspravama.

Kao što se vidi iz Gaussove geodetske ostavštine, Werke Band 9, (Gauss 1903a–e), on je u razdoblju 1816–1820. istraživao različita konformna preslikavanja Zemljina elipsoida u geodetske svrhe. Tu posebno spada konformna dvostruka projekcija rotacijskog elipsoida na sferu i s nje u ravninu, jednom s pomoću stereografske, a drugi put poprečne Mercatorove projekcije. Prvo preslikavanje na sferu je ono kod kojeg točka na elipsoidu i njegova slika na sferi imaju istu geografsku dužinu. Poslije, bavio se drugim preslikavanjem u *Untersuchungen über Gegenstande der höhern Geodäsie* (Gauss 1843, 1847). To je 1876. Schreiber u vezi s poprečnom Mercatorovom projekcijom uveo u prusku državnu izmjeru. Pritom omjer geografskih dužina odgovarajućih točaka na elipsoidu i na sferi malo odstupa od jedinice. Faktor mjerila tako postaje mala veličina trećeg reda, dok je pri prvom preslikavanju drugoga reda. Na granicama pri prvom preslikavanju elipsoida na sferu linearno mjerilo ne premašuje 1:1 470 000, ako normalna paralela (*Normalparallelkreis*) prođe središtem područja. Gauss je vrlo detaljno razmatrao upotrebu poprečne Mercatorove projekcije sfere u ravninu za mjerenja uzduž meridijana. Također razvio je formule za veće udaljenosti od osi apscisa za redukciju udaljenosti i azimuta velike kružnice od pravca, koji povezuje slike njegovih krajnjih točaka. Osim dvostrukih projekcija, Gauss se bavio i izravnim stereografskim preslikavanjem elipsoida u ravninu, ako točka gledanja ima dijametralno suprotnu geodetsku širinu i dužinu, te zatim preslikavanjem elipsoida pri čemu pravokutne koordinate izražava s pomoću polarnih. Spominjanje plašta konusa i njegovo razvijanje u ravninu potječe od Krügera. U Gaussovoj ostavštini (1903d) konus se ne spominje.

Međutim, u to doba u upotrebu dolazi jedno drugo preslikavanje, izravno preslikavanje Zemljina elipsoida u ravninu, koje je na izvjestan način analogno poprečnoj Mercatorovoj projekciji sfere. Prema Krügeru (1912), ta je metoda projekcije početkom 20. st. našla primjenu u katastarskoj izmjeri, najprije ju je u Francuskoj primijenio Ch. Lallemand, a zatim u Egiptu; bila je predviđena u Saskoj, Austriji, Grčkoj i njemačkim kolonijama u Africi.

Gauss nije objavio ništa o teoriji hanoverske metode projekcije. U svojim predavanjima o višoj geodeziji, kako pokazuje knjižica koju je pripremio njegov pomoćnik prof. Goldschmidt i koja se nalazi u Gaussovu arhivu u Göttingenu, dao je formule za upotrebu, ali ne i njihov izvod. Formule su postale poznate iz pisama između C. F. Gaussa i H. C. Schumachera (Gauss 1903e), nakon što je ta pisma objavio C. A. F. Peters, u svesku II iz 1860. i svesku III iz 1861. Na temelju toga formule je na jasan način za uporabu sastavio inspektor za vodograđevine Taaks (1865), koji je također ispravio nekoliko pogrešaka u otisku ili pisanju i nadopunio ih tablicama prema Schmidtovim i Walbeckovim dimenzijama Zemljina elipsoida. Izvod i daljnji razvoj Gaussovih formula prvo je dao tadašnji hanoverski kapetan, a poslije general-pukovnik i voditelj pruske državne izmjere dr. O. Schreiber (1866). Još jedan jednostavan izvod dao je prof. F. H. Helmert (1876).

U Gaussovoj ostavštini, Werke Band 9, str. 141–194, pronađene su mnoge formule i izvodi njegovih istraživanja o projekcijama, ali nedostaje zajednički prikaz što je uočio Krüger (vidi u navedenoj ostavštini primjedbe na str. 195).

Krügera je na njegov zahtjev primio direktor Kraljevskoga geodetskog instituta, Prof. Dr. Dr.-Ing. F. R. Helmert (Krüger 1912). Krüger mu je predložio da se na temelju Gaussovih formula napravi prikaz konformnih preslikavanja Zemljina elipsoida u ravninu.

Bilo je predviđeno da se razvoji u redove uzmu s odgovarajućom točnosti da bi se veće područje, primjerice 16–18 stupnjeva geografske dužine, moglo preslikati u jedinstveni koordinatni sustav u ravnini, baš kao što to čini Schreiberova dvostruka konformna projekcija. Bio je potreban daljnji razvoj i transformacije Gaussovih formula kako bi bile praktične za primjenu.

U knjizi *Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene* Krüger (1912) je slijedeći Gaussa izveo opće formule preslikavanja i izraze za konvergenciju meridijana i mjerilo. Dobivene formule prvi put su korištene za razvoj jednadžbi poprečne Mercatorove projekcije sfere.

Za numeričko računanje najjednostavnije su u to doba bile formule dobivene razvojem jednadžbi preslikavanja u redove. Ako se područje njihove primjene želi proširiti na 700 km od srednjeg meridijana, treba uzeti u obzir dovoljan broj članova tih redova, više nego što su imali Gauss ili Schreiber. No to bi smanjilo praktičnu korisnost formula. Kako bi se nosio s manje članova, Krüger je preoblikovao redove za računanje ravninskih iz geografskih koordinata i obratno prema formulama koje se primjenjuju na Mercatorovu projekciju sfere, tako da se sačuva glavni član, kojemu se zatim dodaju dodatni članovi. Slično tome, preoblikovao je formule za konvergenciju meridijana i mjerilo. Kao radijus sfere za prvu metodu uzeo je poprečni radijus zakrivljenosti, a za drugu srednji radijus zakrivljenosti elipsoida. Tim se transformacijama postiže da se dodatni članovi kao i zanemarivi članovi množe s kvadratom ekscentriciteta meridijana. Računanje dodatnih članova olakšavaju dodane tablice. Ako se ograničimo na udaljenost od oko 2° od početnog meridijana, potreban je u formulama samo jedan korekcijski član, koji se lako može izračunati, tako da za to nisu potrebne posebne tablice.

Izvod razlike u linearnom položaju i u azimutu između geodetske linije na Zemljinu elipsoidu i projekciji njezinih krajnjih točaka spojenih ravnom crtom temelji se na diferencijalnoj jednadžbi koju je upotrijebio Gauss (Werke Band 9, str. 159–168), a Krügeru se činila prikladnom s obzirom na činjenicu da se mogu razmotriti i stranice trokuta koje su znantno udaljene od početnog meridijana. Ta parcijalna diferencijalna jednadžba za ovisnost geodetske linije o ravninskim koordinatama, koju je također izveo Gauss u *Disquisitiones generales circa superficies curvas* u članku 24 (Gauss 1828), prvi je put razvijena za konformno preslikavanje bilo koje zakrivljene plohe u ravninu. Zatim je primijenjena na poprečnu Mercatorovu projekciju sfere. Dobiveni rezultati upotrijebljeni su za određivanje korekcija koje zahtijeva elipsoid. Te su korekcije uvijek vrlo male kada se za radijus sfere uzima srednji radijus zakrivljenosti elipsoida, koji odgovara srednjoj apscisi. Za stranice glavnih trokuta na udaljenosti od 700 km od srednjeg meridijana iznos pogreške razvijene formule za redukciju udaljenosti manji je od jedinice osmog decimalnog mjesta u logaritmu i za redukciju azimuta najviše jedna jedinica četvrte decimale sekunde (Krüger 1912).

Nadalje, Krüger je razvio odnos između Gaussove konvergencije meridijana i uobičajene koja se upotrebljava u geodeziji, tako da se iz azimuta geodetske linije s pomoću Gaussove konvergencije meridijana može uspostaviti smjerni kut i obratno. Izravno je najprije izvedena duljina geodetske linije i njezin smjerni kut iz pravokutnih koordinata njezinih krajnjih točaka i zatim koordinate krajnjih točaka iz duljine geodetske linije, smjernog kuta i ravninskih koordinata početne točke.

Krüger je posebno istražio sliku geodetske linije kako bi se vidjelo kad ona može presjeći spojnicu krajnjih točaka. U tu je svrhu postavljena diferencijalna jednadžba slike te krivulje pri konformnom preslikavanju bilo koje zakrivljene plohe u ravninu. S pomoću nje mogla se, kad se za plohu uzme rotacijski elipsoid, s pomoću razvoja u Taylorov red dobiti jednadžba slike krivulje. Odatle su ponovno izvedeni izrazi za kutove na krajnjim točkama i njima priključenim ravnim crtama, tj. redukcije smjera.

Kraj Krügerove knjige bavi se transformacijom ravninskih koordinata, a sve izvode prate odgovarajući numerički primjeri.

U ovom se radu pokazuje da se Gauss-Krügerova projekcija može interpretirati kao poopćenje poprečne Mercatorove projekcije sfere i kao dvostruko preslikavanje rotacijskog elipsoida najprije na sferu, a onda sa sfere u ravninu. U ovom radu nije riječ o dvostrukom preslikavanju koje je, među ostalim, istraživao Gauss, a poslije primijenio Schreiber. U ovome je radu riječ o direktnom preslikavanju elipsoida u ravninu koje se u praksi primjenjuje u mnogim zemljama diljem svijeta, a sad prvi put interpretira kao dvostruko preslikavanje.

Nakon toga moguće je govoriti o poprečnoj projekciji, budući da je aspekt projekcije definiran za projekcije sfere (Lapaine i Frančula 2016).

Napomenimo da naziv cilindrična projekcija ne dolazi od projiciranja na cilindar, jer nikakvog cilindra u definiciji projekcije nema. Taj se naziv može upotrijebiti kod svih cilindričnih projekcija jer se karta svijeta izrađena u takvoj projekciji može saviti u cilindar.

Uobičajeno je Gauss-Krügerovu projekciju nazivati poprečnom Mercatorovom projekcijom elipsoida. To je u redu jer je Gauss-Krügerova projekcija poopćenje poprečne Mercatorove projekcije sfere. Ipak, to nije najsretnije rješenje jer, kao što će biti pokazano u ovom radu, postoji više različitih poopćenja poprečne Mercatorove projekcije sfere. Ne samo to, nego treba znati da se poprečne Mercatorove projekcije elipsoida razlikuju i po nekim drugim parametrima. To uključuje službenu upotrebu poprečne Mercatorove projekcije u Hrvatskoj i u mnogim drugim zemljama (vidi npr. Stuifbergen 2009).

Konformne projekcije važne su ne samo u teoriji nego i u praksi. Na primjer, u Hrvatskoj su u službenoj upotrebi poprečna Mercatorova projekcija HTRS/TM i konformna konusna Lambertova projekcija HTRS/LCC. Matematički se konformnim projekcijama može pristupiti na više načina: npr. s pomoću Cauchy-Riemannovih diferencijalnih jednadžbi, s pomoću Laplaceove jednadžbe ili s pomoću analitičkih funkcija, odnosno funkcija kompleksne varijable. U ovom ćemo se radu poslužiti funkcijama kompleksne varijable jer je tako radio i C. F. Gauss kojem je ovaj rad posvećen.

2. Sfera i izometrijska širina

Sfera je ploha koja u pravokutnom Kartezijevu sustavu (X, Y, Z) ima jednadžbu

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2, \tag{1}$$

gdje je $R > 0$ radijus sfere. Ta se jednadžba obično zapisuje u parametarskom obliku s geografskom parametrizacijom

$$X = R\cos\varphi\cos\lambda,\ \ Y = R\cos\varphi\sin\lambda,\ \ Z = R\sin\varphi, \tag{2}$$

gdje su $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ i $\lambda \in [-\pi, \pi]$ geografska širina, odnosno dužina. Prva diferencijalna forma preslikavanja (2) glasi

$$ds^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2\cos^2\varphi d\lambda^2. \tag{3}$$

Iz zapisa (3) vidimo da geografske koordinate φ i λ nisu izometrijske. Međutim, za primjenu svojstava funkcija kompleksne varijable potrebne su nam izometrijske koordinate. Stoga ćemo definirati konformnu ili izometrijsku širinu. Ideju za to dobit ćemo ako (3) napišemo u obliku

$$ds^2 = R^2\cos^2\varphi\left(\frac{d\varphi^2}{\cos^2\varphi} + d\lambda^2\right). \tag{4}$$

Sad možemo definirati izometrijsku širinu q tako da bude

$$dq = \frac{d\varphi}{\cos\varphi}, \tag{5}$$

odakle se integriranjem, uz odabir adicijske konstante nula, dobije

$$q = \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} = \tanh^{-1}(\sin\varphi). \tag{6}$$

Inverzno preslikavanje može se napisati eksplicitno:

$$\varphi = \sin^{-1}(\tanh q) = 2\tan^{-1}(e^q) - \frac{\pi}{2}. \tag{7}$$

Jednadžba sfere (1) može se sad napisati s pomoću izometrijskih koordinata (q, λ) ovako:

$$X = R\frac{\cos\lambda}{\cosh q},\ \ Y = R\frac{\sin\lambda}{\cosh q},\ \ Z = R\tanh q. \tag{8}$$

Prva diferencijalna forma preslikavanja (8) glasi

$$ds^2 = \frac{R^2}{\cosh^2 q}(dq^2 + d\lambda^2). \tag{9}$$

Iz zapisa (9) vidimo da je riječ o izometrijskoj parametrizaciji sfere (1).

3. Rotacijski elipsoid i izometrijska širina

Rotacijski elipsoid je ploha koja u pravokutnom Kartezijevu sustavu (X, Y, Z) ima jednadžbu

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1, \tag{10}$$

gdje su $a > b > 0$ poluosi elipsoida. Ta se jednadžba obično zapisuje u parametarskom obliku s geodetskom parametrizacijom

$$X = N(\Phi)\cos\Phi\cos\Lambda,\ \ Y = N(\Phi)\cos\Phi\sin\Lambda,\ \ Z = N(\Phi)(1-e^2)\sin\Phi, \tag{11}$$

gdje su $\Phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ i $\Lambda \in [-\pi, \pi]$ geodetska širina, odnosno dužina, $e = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$, a $N(\Phi)$ radijus zakrivljenosti presjeka po prvom vertikalu

$$N(\Phi) = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\Phi}}. \tag{12}$$

Prva diferencijalna forma preslikavanja (11) glasi

$$ds^2 = M^2(\Phi)d\Phi^2 + N^2(\Phi)\cos^2\Phi d\Lambda^2, \tag{13}$$

gdje je $M(\Phi)$ polumjer zakrivljenosti meridijana

$$M(\Phi) = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\Phi)^3}}. \tag{14}$$

Iz zapisa (13) vidimo da geodetske koordinate Φ i Λ nisu izometrijske. Međutim, za primjenu svojstava funkcija kompleksne varijable potrebne su nam izometrijske koordinate. Ideju za to dobit ćemo ako (13) napišemo u obliku

$$ds^2 = N^2(\Phi)\cos^2\Phi\left(\frac{M^2(\Phi)}{N^2(\Phi)\cos^2\Phi}d\Phi^2 + d\Lambda^2\right). \tag{15}$$

Sad možemo definirati izometrijsku širinu Q tako da bude

$$dQ = \frac{M(\Phi)d\Phi}{N(\Phi)\cos\Phi}, \tag{16}$$

odakle se integriranjem, uz odabir adicijske konstante nula, dobije

$$\begin{aligned} Q &= \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\Phi}{2}\right)\left(\frac{1-e\sin\Phi}{1+e\sin\Phi}\right)^{\frac{e}{2}}\right] = \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\Phi}{1-\sin\Phi}\left(\frac{1-e\sin\Phi}{1+e\sin\Phi}\right)^{e} = \\ &= \tanh^{-1}(\sin\Phi) - e\tanh^{-1}(e\sin\Phi). \end{aligned} \tag{17}$$

U specijalnom slučaju $e = 0$ dobijemo $Q = q$, tj. izometrijsku širinu na sferi (4). U slučaju izometrijske širine na rotacijskom elipsoidu, inverzna funkcija funkcije (17) ne može se napisati u konačnom obliku s pomoću elementarnih funkcija, nego se koriste različiti aproksimacijski postupci ili pak približne formule.

Jednadžba rotacijskog elipsoida (11) može se sad napisati s pomoću izometrijskih koordinata (Q, Λ) ovako:

$$X = N(\Phi(Q))\cos\Phi(Q)\cos\Lambda,\ Y = N(\Phi(Q))\cos\Phi(Q)\sin\Lambda,$$

$$Z = N(\Phi(Q))(1-e^2)\sin\Phi(Q). \tag{18}$$

Prva diferencijalna forma preslikavanja (11) glasi

$$ds^2 = N^2(\Phi(Q))\cos^2\Phi(Q)\big(dQ^2 + d\Lambda^2\big). \tag{19}$$

Iz zapisa (19) vidimo da je riječ o izometrijskoj parametrizaciji rotacijskog elipsoida (10). Kad god u ovome radu spominjemo elipsoid, mislimo na rotacijski elipsoid kakav je prikazan u ovom poglavlju.

4. Poprečna Mercatorova projekcija sfere

Tražimo takvo konformno preslikavanje jedinične sfere u ravninu za koje će vrijediti

$$x = \varphi \tag{20}$$

za $\lambda = 0$ i $y = 0$. Prijeđimo na izometrijske koordinate q, λ i izrazimo (20) s pomoću izometrijske širine q

$$x = \sin^{-1}(\tanh q) \tag{21}$$

što je ekvivalentno sa

$$\sin x = \tanh q. \tag{22}$$

Budući da projekcija mora biti konformna, proširimo (22) na funkcije kompleksne varijable

$$\sin(x + iy) = \tanh(q + i\,\lambda) \tag{23}$$

i time je zadatak u načelu riješen. Još možemo potražiti realni i kompleksni dio funkcija u (23) i iz toga dobiti najprije

$$\sinh 2q = \sin x \cosh y\,(\cosh 2q + \cos 2\,\lambda)$$

$$\sin 2\lambda = \cos x \sinh y\,(\cosh 2q + \cos 2\,\lambda) \tag{24}$$

i zatim

$$\tan x = \frac{\sinh q}{\cos\lambda} = \frac{\tan\varphi}{\cos\lambda},\;\; \tanh y = \frac{\sin\lambda}{\cosh q} = \sin\lambda\cos\varphi. \tag{25}$$

Uočimo na kraju da je zahtjev (20) ekvivalentan zahtjevu da preslikavanje čuva duljinu luka meridijana na srednjem/početnom meridijanu sfere.

5. Poprečna Mercatorova projekcija rotacijskog elipsoida

Po analogiji s poprečnom Mercatorovom projekcijom sfere tražimo takvo konformno preslikavanje rotacijskog elipsoida u ravninu za koje će vrijediti

$$x = \Phi \tag{26}$$

za $\Lambda = 0$ i $y = 0$. Prijeđimo na izometrijske koordinate Q, Λ i izrazimo (26) s pomoću izometrijske širine Q. To ne možemo eksplicitno iz (17), ali možemo implicitno i na temelju (17) i (26) napisati

$$Q = \tanh^{-1}(\sin x) - e\tanh^{-1}(e\sin x). \tag{27}$$

Budući da projekcija mora biti konformna, proširimo (27) na funkcije kompleksne varijable

$$Q + i\Lambda = \tanh^{-1}(\sin(x + iy)) - e\tanh^{-1}(e\sin(x + iy)) \tag{28}$$

i time je zadatak u načelu riješen. Iz (28) bi još trebalo moći izraziti x i y. To nije moguće izravno. Međutim, moguće je najprije (28) napisati u obliku

$$\sin(x + iy) = \tanh[Q + i\Lambda + e\tanh^{-1}(e\sin(x + iy))] \tag{29}$$

i zatim iterirati. Početnu vrijednost možemo izabrati tako da u (29) stavimo $e = 0$. Pokazuje se opisani postupak brzo konvergira. Nakon što je iteracija završena, konačno imamo

$$x + iy = \sin^{-1}[\sin(x + iy)]. \tag{30}$$

Opisani postupak izvediv je ako raspolažemo softverom koji može raditi s kompleksnim brojevima. U protivnom umjesto iteriranja izraza (29) možemo ga rastavljanjem na realni i imaginarni dio preformulirati na rješavanje dviju jednadžbi s realnim brojevima, naravno opet iterativnim pristupom (Lapaine 1996):

$$x = \tan^{-1}\left\{\frac{\sinh\left[Q+\frac{e}{2}\tanh^{-1}\frac{2e\sin x\cosh y}{1+e^2(\sinh^2 y+\sin^2 x)}\right]}{\cos\left[\Lambda+\frac{e}{2}\tan^{-1}\frac{2e\cos x\sinh y}{1-e^2(\sinh^2 y+\sin^2 x)}\right]}\right\},$$

$$y = \tanh^{-1}\left\{\frac{\sin\left[\Lambda+\frac{e}{2}\tan^{-1}\frac{2e\cos x\sinh y}{1-e^2(\sinh^2 y+\sin^2 x)}\right]}{\cosh\left[Q+\frac{e}{2}\tanh^{-1}\frac{2e\sin x\cosh y}{1+e^2(\sinh^2 y+\sin^2 x)}\right]}\right\}. \tag{31}$$

U specijalnom slučaju $e = 0$ dobijemo odmah bez iteracija formule poprečne Mercatorove projekcije jedinične sfere (usporedi (25).

Uočimo još da zahtjev (26) nije ekvivalentan zahtjevu da preslikavanje čuva duljinu luka meridijana na srednjem/početnom meridijanu, kao što je to bilo kod poprečne Mercatorove projekcije sfere. Dakle, formule (29) i (30), odnosno (31) daju jedno poopćenje poprečne Mercatorove projekcije sfere na elipsoid. No, to nije Gauss-Krügerova projekcija jer na srednjem meridijanu nije sačuvana duljina luka meridijana, nego geodetska širina.

6. Gauss-Krügerova projekcija rotacijskog elipsoida

Na sferi je duljina luka meridijana proporcionalna pripadnom središnjem kutu. Na elipsoidu to nije slučaj. Zato sad tražimo takvo konformno preslikavanje rotacijskog elipsoida u ravninu za koje će vrijediti

$$x = \int_0^{\Phi} M(\Phi)\, d\Phi \tag{32}$$

za $\Lambda = 0$ i $y = 0$. Integral u (32) označava duljinu luka meridijana od ekvatora do točke kojoj odgovara geodetska širina Φ. Poznato je da se taj integral ne može izraziti s pomoću elementarnih funkcija u zatvorenom obliku. Prijeđimo na izometrijske koordinate Q, Λ i izrazimo (32) s pomoću izometrijske širine Q. To ne možemo eksplicitno iz (32), ali možemo implicitno.

Na temelju (17) možemo napisati

$$Q = \tanh^{-1}(\sin\xi) - e\tanh^{-1}(e\sin\xi), \tag{33}$$

gdje smo označili $\Phi = \xi$. Budući da projekcija mora biti konformna, proširimo (33) na funkcije kompleksne varijable

$$Q + i\Lambda = \tanh^{-1}(\sin(\xi + i\eta)) - e\tanh^{-1}(e\sin(\xi + i\eta)). \tag{34}$$

Iz (34) bi još trebalo moći izraziti ξ i η. To nije moguće izravno. Međutim, možemo najprije (34) napisati u obliku

$$\sin(\xi + i\eta) = \tanh[Q + i\Lambda + e\tanh^{-1}(e\sin(\xi + i\eta))] \tag{35}$$

i zatim iterirati. Početnu vrijednost možemo izabrati tako da u (35) stavimo $e = 0$. Pokazuje se da opisani postupak brzo konvergira. Nakon što je iteracija završena konačno imamo

$$\xi + i\eta = \sin^{-1}[\sin(\xi + i\eta)]. \tag{36}$$

Opisani postupak je izvediv ako raspolažemo softverom koji može raditi s kompleksnim brojevima. U protivnom umjesto iteriranja izraza (35) možemo ga rastavljanjem na realni i imaginarni dio pretvoriti u sustav dviju jednadžbi s realnim brojevima, i rješavati naravno opet iterativnim pristupom, primjenom analognih formula (31) iz prethodnog poglavlja.

Time zadatak još nije riješen jer nije ispunjen uvjet (32). Moramo još konformno preslikati ravninu ξ, η u ravninu x, y, ali tako da za $\Lambda = 0$ i $y = 0$ vrijedi (32). Integral u (32) je eliptički, pa se ne može napisati s pomoću elementarnih funkcija u zatvorenom obliku. Jedna je od mogućnosti primijeniti metodu iteracije prema Klotzu (1993). Umjesto toga, preuzet ćemo razvoj u red prema Krügeru (1912), koji ga je preuzeo od Helmerta (1880) u obliku:

$$x(\Phi) = a\left(A_0\Phi - \tfrac{1}{2}A_2\sin 2\Phi + \tfrac{1}{2}A_4\sin 4\Phi - \tfrac{1}{2}A_6\sin 6\Phi + \tfrac{1}{2}A_8\sin 8\Phi - \cdots\right), \tag{37}$$

uz koeficijente

$$\begin{aligned} A_0 &= \tfrac{1}{1+n}\left(1 + \tfrac{1}{4}n^2 + \tfrac{1}{64}n^4 + \cdots\right) \\ A_2 &= \tfrac{3}{1+n}\left(n - \tfrac{1}{8}n^3 - \cdots\right) \\ A_4 &= \tfrac{15}{8(1+n)}\left(n^2 - \tfrac{1}{4}n^4 - \cdots\right) \end{aligned} \tag{38}$$

$$A_6 = \frac{35}{24(1+n)}(n^3 - \cdots)$$
$$A_8 = \frac{315}{256(1+n)}(n^4 - \cdots)$$

ili ako izlučimo A_0:

$$x(\Phi) = A(\Phi + b_1 \sin 2\Phi + b_2 \sin 4\Phi + b_3 \sin 6\Phi + b_4 \sin 8\Phi + \cdots), \quad (39)$$

gdje je

$$A = a(1-n)(1-n^2)\left(1 + \frac{9}{4}n^2 + \frac{225}{64}n^4\right) \quad (40)$$

$$b_1 = n\left(-\frac{3}{2} + \frac{9}{16}n^2 - \frac{537}{128}n^4\right)$$

$$b_2 = \frac{n^2}{2}\left(\frac{15}{8} - \frac{15}{16}n^2 + \frac{135}{1024}n^4\right)$$

$$b_3 = \frac{n^3}{3}\left(-\frac{35}{16} + \frac{315}{256}n^2\right)$$

$$b_4 = \frac{n^4}{4}\left(\frac{315}{128} - \frac{189}{128}n^2\right).$$

Pritom su koeficijenti u (38) i (40) izraženi s pomoću treće spljoštenosti

$$n = \frac{a-b}{a+b}. \quad (41)$$

Izrazimo duljinu luka meridijana (39) s pomoću izometrijske širine na elipsoidu

$$x(\Phi(Q)) = A(\Phi(Q) + b_1 \sin 2\Phi(Q) + b_2 \sin 4\Phi(Q) + \cdots) \quad (42)$$

i zatim proširimo to preslikavanje na funkcije kompleksne varijable

$$x(\Phi(Q+i\Lambda)) = A(\Phi(Q+i\Lambda) + b_1 \sin 2\Phi(Q+i\Lambda) + b_2 \sin 4\Phi(Q+i\Lambda) + \cdots).(43)$$

Označimo još

$$x(\Phi(Q+i\Lambda)) = x + iy \;\text{ i }\; \Phi(Q+i\Lambda) = \xi + i\eta \quad (44)$$

i imamo konačno rješenje, odnosno jednadžbu Gauss-Krügerove projekcije

$$x + iy = A(\xi + i\eta + b_1 \sin 2(\xi + i\eta) + b_2 \sin 4(\xi + i\eta) + \cdots). \quad (45)$$

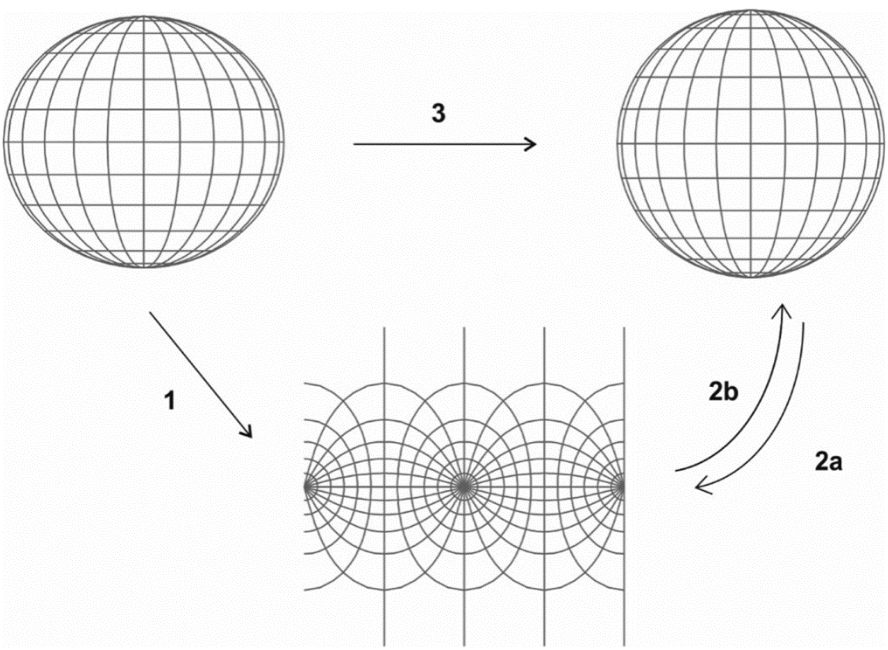
Rastavimo li kompleksne funkcije u (45) na realni i imaginarni dio, možemo dobiti jednadžbe Gauss-Krügerove projekcije u obliku

$$x = A(\xi + b_1 \sin 2\xi \cosh 2\eta + b_2 \sin 4\xi \cosh 4\eta + \cdots)$$

$$y = A(\eta + b_1 \cos 2\xi \sinh 2\eta + b_2 \cos 4\xi \sinh 4\eta + \cdots). \tag{46}$$

U specijalnom slučaju $e = 0$ dobijemo odmah bez iteracija formule poprečne Mercatorove projekcije jedinične sfere (usporedi (25)). Prema tome, formule (46) daju još jedno poopćenje poprečne Mercatorove projekcije sfere na elipsoid. To je ovaj put Gauss-Krügerova projekcija jer je na srednjem meridijanu sačuvana duljina luka meridijana. Naime, iz izvoda slijedi, a i lako se vidi da za $\eta = \Lambda = 0$ vrijedi $y = 0$ i (37), odnosno (39) jer je na srednjem/početnom meridijanu $\xi = \Phi$.

7. Gauss-Krügerova projekcija rotacijskog elipsoida kao dvostruko preslikavanje



Slika 1. (1) *Gauss-Krügerova projekcija elipsoida u ravninu.* (2a) *Poprečna Mercatorova projekcija sfere u ravninu.* (2b) *Inverzna projekcija poprečne Mercatorove projekcije sfere.* (3) *Konformna projekcija elipsoida na sferu kao kompozicija Gauss-Krügerove projekcije* (1) *elipsoida u ravninu i inverzna projekcije poprečne Mercatorove projekcije sfere* (2b).

Obično se pod dvostrukim preslikavanjem elipsoida podrazumijeva preslikavanje elipsoida na sferu i zatim preslikavanje sfere u ravninu. Pri tom je riječ o Gaussovoj sferi, tj. sferi koja je na određeni način prilagođena području preslikavanja (Mollweide 1807, Hammer 1891, Schreiber 1897, 1899–1900). U ovom radu nije riječ o takvoj projekciji, nego o klasičnoj Gauss-Krügerovoj projekciji koja izravno preslikava rotacijski elipsoid u ravninu. Pokazat ćemo da se i ta projekcija može interpretirati kao dvostruko preslikavanje rotacijskog elipsoida najprije na sferu, a onda sa sfere u ravninu (slika 1).

Da bismo to dokazali bit će dovoljno preuzeti iz matematike dva svojstva analitičkih funkcija, odnosno konformnih preslikavanja. Prvo je svojstvo da je inverzno preslikavanje konformnog preslikavanja opet konformno preslikavanje. Drugo je svojstvo da je kompozicija konformnih preslikavanja opet konformno preslikavanje.

Prema prvom svojstvu inverzno preslikavanje poprečne Mercatorove projekcije sfere u ravninu konformno je preslikavanje ravnine na sferu. Jednadžbe tog preslikavanja možemo izvesti iz (25) i dobiti

$$\varphi = \sin^{-1}\left(\frac{\sin x}{\cosh y}\right),\ \lambda = \tan^{-1}\left(\frac{\sinh y}{\cos x}\right) \tag{47}$$

za jediničnu sferu, a za sferu polumjera A

$$\varphi = \sin^{-1}\left(\frac{\sin\frac{x}{A}}{\cosh\frac{y}{A}}\right),\ \lambda = \tan^{-1}\left(\frac{\sinh\frac{y}{A}}{\cos\frac{x}{A}}\right). \tag{48}$$

A u (48) i (40) je polumjer tzv. rektificirajuće sfere, tj. sfere kojoj su meridijani jednake duljine meridijanima na elipsoidu.

Prema drugom svojstvu, ako preslikamo rotacijski elipsoid u ravninu prema formulama Gauss-Krügerove projekcije (46), pa sliku tog elipsoida iz ravnine x, y prema formulama (48) dobit ćemo konformnu sliku elipsoida na sferi. To je sfera na koju bi se teorijski mogao izravno konformno preslikati elipsoid, a zatim ta sfera konformno u ravninu da se dobije projekcija poznata kao Gauss-Krügerova projekcija.

Dakle, ako su zadane geodetske koordinate neke točke Φ i Λ na rotacijskom elipsoidu, a želimo izračunati geografske koordinate φ i λ njezine slike na sferi pri konformnom preslikavanju koje čuva duljinu luka meridijana na odabranom/početnom meridijanu potrebno je računati ovim redoslijedom:

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

$$Q = \tanh^{-1}(\sin \Phi) - e \tanh^{-1}(e \sin \Phi)$$

$$\xi = \tan^{-1}\left\{\frac{\sinh\left[Q + \frac{e}{2}\tanh^{-1}\frac{2e\sin\xi\cosh\eta}{1+e^2(\sinh^2\eta+\sin^2\xi)}\right]}{\cos\left[\Lambda + \frac{e}{2}\tan^{-1}\frac{2e\cos\xi\sinh\eta}{1-e^2(\sinh^2\eta+\sin^2\xi)}\right]}\right\}$$

$$\eta = \tanh^{-1}\left\{\frac{\sin\left[\Lambda + \frac{e}{2}\tan^{-1}\frac{2e\cos\xi\sinh\eta}{1-e^2(\sinh^2\eta+\sin^2\xi)}\right]}{\cosh\left[\mathrm{Q} + \frac{e}{2}\tanh^{-1}\frac{2e\sin\xi\cosh\eta}{1+e^2(\sinh^2\eta+\sin^2\xi)}\right]}\right\}$$

$$n = \frac{a-b}{a+b}$$

$$b_1 = n\left(-\frac{3}{2} + \frac{9}{16}n^2 - \frac{537}{128}n^4\right)$$

$$b_2 = \frac{n^2}{2}\left(\frac{15}{8} - \frac{15}{16}n^2 + \frac{135}{1024}n^4\right)$$

$$b_3 = \frac{n^3}{3}\left(-\frac{35}{16} + \frac{315}{256}n^2\right)$$

$$b_4 = \frac{n^4}{4}\left(\frac{315}{128} - \frac{189}{128}n^2\right).$$

$$x = \xi + b_1 \sin 2\xi \cosh 2\eta + b_2 \sin 4\xi \cosh 4\eta + \cdots$$

$$y = \eta + b_1 \cos 2\xi \sinh 2\eta + b_2 \cos 4\xi \sinh 4\eta + \cdots$$

$$\varphi = \sin^{-1}\left(\frac{\sin x}{\cosh y}\right), \ \lambda = \tan^{-1}\left(\frac{\sinh y}{\cos x}\right)$$

Na primjer, ako uzmemo na elipsoidu WGS84 točku s koordinatama $\Phi = 45°$ i $\Lambda = 3°$ pa je Gauss-Krügerovom projekcijom (46) preslikamo u ravninu i zatim konformno na sferu prema (48), dobit ćemo $\varphi = 44°8557$ i $\lambda = 3°0025$.

8. Zaključak

Na temelju opsežne izvorne literature možemo zaključiti da se C. F. Gauss u znatnoj mjeri bavio kartografskim projekcijama. Ne samo projekcijom koja je u današnje vrijeme poznata kao Gauss-Krügerova, nego i drugim varijantama konformnih preslikavanja rotacijskog elipsoida na sfere te sfere i elipsoida u ravninu.

Glavni je doprinos ovoga rada teorijskoga karaktera. Pokazano je da se Gauss-Krügerova projekcija može interpretirati kao dvostruko preslikavanje: najprije konformno preslikavanje elipsoida na sferu i zatim konformno preslikavanje sfere u ravninu pri čemu se odabrani meridijan preslika bez distorzija. Na taj se način može opravdati naziv te projekcije kao poprečne projekcije, budući da je aspekt projekcije definiran za projekcije sfere, a ne elipsoida.

Uz to pokazano je da Gauss-Krügerova projekcija nije jedino poopćenje poprečne Mercatorove projekcije sfere. Stoga je Gauss-Krügerovu projekciju bolje nazivati njezinim imenom, umjesto poprečna Mercatorova projekcija. Naime, poprečna Mercatorova projekcija može biti preslikavanje sfere ili elipsoida. Osim toga, poprečna Mercatorova projekcija elipsoida nije jednoznačno definirana. Ona može biti identična Gauss-Krügerovoj, ali se od nje može razlikovati.

Literatura

Gauss, C. F. (1828): Disquisitiones generales circa superficies curvas (Opća istraživanja o zakrivljenim plohama). Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis recentiores, Tom VI (classis mathematicae), 99–146, und Dieterich, Gottingae (Göttingen), također u: Gauß: Werke, Band 4, 219–258.

Gauss, C. F. (1843–1845): Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodaesie. Erste Abhandlung. (23. Oktober 1843), Abhandlungen der Mathematischen Classe der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen 2, 1845, 3–34 (također u: Gauß: Werke. Band 4, 261–290).

Gauss, C. F. (1847): Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie. Zweite Abhandlung. (1. September 1846), Abhandlungen der Mathematischen Classe der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen 3, 1847, 3–35 (također u: Gauß: Werke. Band 4, 303–334).

Gauss, C. F. (1903a): Conforme Doppelprojection des Sphäroids auf die Kugel und die Ebene, Nachlas, Gauß: Werke. Band 9, 105–116. Herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. In Commission bei B. G. Teubner in Leipzig.

Gauss, C. F. (1903b): Stereographische Projection der Kugel auf die Ebene, Nachlas, Gauß: Werke. Band 9, 117–122. Herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. In Commission bei B. G. Teubner in Leipzig.

Gauss, C. F. (1903c): Übertragung der Kugel auf die Ebene durch Mercators Projection, Nachlas, Gauß: Werke. Band 9, 123–134. Herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. In Commission bei B. G. Teubner in Leipzig.

Gauss, C. F. (1903d): Conforme Übertragung des Sphäroids auf den Kegelmantel, Nachlas, Gauß: Werke. Band 9, 135–140. Herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. In Commission bei B. G. Teubner in Leipzig.

Gauss, C. F. (1903e): Conforme Abbildung des Sphäroids in der Ebene. (Projectionsmethode der Hannoverschen Landesvermessung.) Nachlas, Gauß: Werke. Band 9, 141–204. Briefwechsel, Über die Formeln für die hannoversche Landesvermessung, Band 9, 205–218. Herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. In Commission bei B. G. Teubner in Leipzig.

Hammer, E. (1891): Zur Abbildung des Erdellipsoids, Zeitschrift für Vermessungswesen, v. 20, no. 22, 609–617; no. 24, 641–661.

Helmert, F. R. (1876): Näherungsformeln für die Gausssche Projektion der hannoverschen Landesvermessung. Zeitschrift für Vermessungswesen, Band V, 238–253.

Helmert, F. R. (1880): Die mathematischen und physikalischen Theorien *der* höheren Geodäsie, Band I, Leipzig.

Klotz, J. (1993): Eine analytische Lösung der Gauß-Krüger-Abbildung, Zeitschrift für Vermessungswesen, no. 3, 106–116.

Krüger, L. (1912): Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene: Potsdam, Königlich Preußisches Geodätisches Institut, Veröffentlichung, new series, no. 52, 172 str.

Lapaine, M. (1996): Preslikavanja u teoriji kartografskih projekcija, doktorski rad, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu.

Lapaine, M., Frančula, N. (2016): Map projection aspects, International Journal of Cartography, 1–21, doi: 10.1080/23729333.2016.1184554.

Mollweide, C. B. (1807): Einege Projectionsarten der sphäroidischen Erde: Zach's Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde, v. 16, Sept., 197–210.

Schreiber, O. (1866): Theorie der Projektionsmethode der hannoverschen Landesvermessung, Hannover.

Schreiber, O. (1897): Die konforme Doppelprojektion der trigonometrischen Abteilung der königl. Preussischen Landesaufnahme: Berlin, 99 str.

Schreiber, O. (1899–1900): Zur konformen Doppelprojection der preußischen Landesaufnahme. Sphäroid und Kugel. Gauß'sche Projection: Zeitschrift für Vermessungswesen, v. 28 (1899), 491–502, 593–613; v. 9 (1900), no. 11, 257–281; no. 12, 289–310.

Stuifbergen, N. (2009): Wide Zone Transverse Mercator Projection, Canadian Technical Report of Hydrography and Ocean Sciences 262, Fisheries and Oceans Canada.

Taaks (1865): Geodätische Tafeln für die Nord- und Ostsee-Küste, berechnet nach Gaussschen Formeln. Heft 1, Tafeln; Heft 2, Erläuterungen, Aurich.

Gauss-Krüger Projection as a Double Mapping

On the occasion of the proclamation of C. F. Gauss as a Global Surveyor in 2021

ABSTRACT. In geodesy, Carl Friedrich Gauss is especially known for his map projection, which is called the Gauss-Krüger projection, and is in official use in many countries around the world, sometimes also known as the Transverse Mercator projection. It is less well known that Gauss also investigated other variants of conformal mappings of a rotating ellipsoid onto a sphere, and a sphere and an ellipsoid into a plane. In this paper, it is shown that the Gauss-Krüger projection can be interpreted as a double mapping: a conformal mapping of an ellipsoid onto a sphere and then a conformal mapping of a sphere into a plane. In this way, the name of this projection can be justified as transverse projection, since the aspect of projection is defined for projections of a sphere, not an ellipsoid. In addition, it is shown that the Gauss-Krüger projection is only one of the possible generalizations of the transverse Mercator projection of the sphere.

Keywords: *Gauss-Krüger projection, Transverse Mercator projection, double mapping.*

Primljeno / Received: 2021-04-08

Prihvaćeno / Accepted: 2021-05-11