MATEMATIKA

Stereometrija s primjenom

Julije Jakšetić[1], *Josip Lopatič*[2], *Robert Soldo*[3]

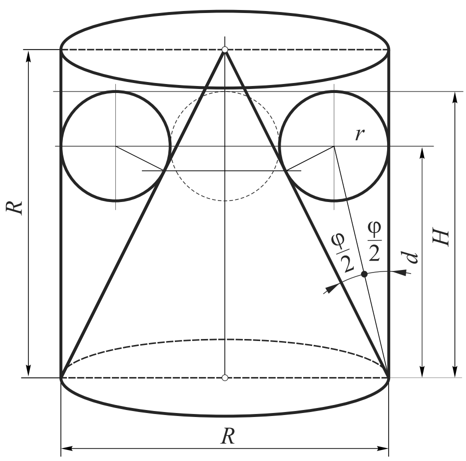
Učenje bez razmišljanja je uzaludno, a razmišljanje bez učenja opasno.

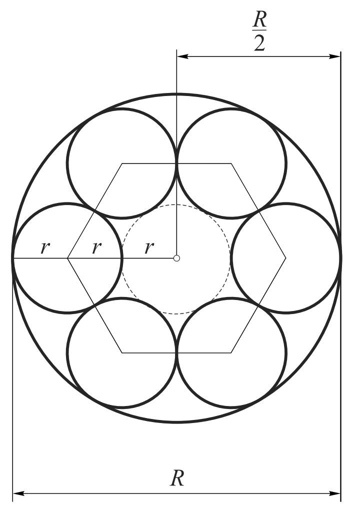
Konfucije

U ovom radu smo napravili izbor problema s interesantnim interpretacijama, čime vam želimo približiti stereometriju, ukazati na njenu ljepotu, ali i praktičnu primjenu.

Zadatak 1. (Mađarska, 1959. g.) *Visina posude valjkastog oblika jednaka je promjeru baze. U posudu je prvo smješten uspravni stožac, čiji su polumjer baze i visina jednaki odgovarajućim veličinama valjka, a zatim i šest loptica jednakog polumjera. Svaka loptica dodiruje posudu, plašt stožca i dvije susjedne loptice. Da li loptice jednim svojim dijelom izlaze iz posude?*

Rješenje. Loptice smještene u prostoru, gledano u poprečnom presjeku odozgo, prikazali smo na donjoj slici desno.





Sa slike je očito $3r = \dfrac{R}{2}$, odakle je $r = \dfrac{R}{6}$. Sa slike lijevo imamo $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\frac{R}{2}}{R} = \dfrac{1}{2}$. Također, s iste slike je $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{r}{d}$, odakle je $d = \dfrac{r}{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}$.

[1] Autor je izvanredni profesor na Prehrambeno-biotehnološkom fakultetu, Zagreb, jjaksetic@pbf.hr

[2] Autor je predavač na VBZ, Zaprešić, josiplopatic@gmail.com

[3] Autor je inženjer teorijske matematike zaposlen u firmi Pružne građevine, Zagreb

Nadalje, iz formule $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\varphi}{2}}$, koristeći činjenicu $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{1}{2}$, dobivamo jednadžbu $\operatorname{tg}^2\dfrac{\varphi}{2} + 4\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2} - 1 = 0$, čija su rješenja $\left(\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}\right)_{1,2} = -2 \pm \sqrt{5}$. Iz geometrijskih razloga, jedino prihvatljivo rješenje je $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2} = \sqrt{5}-2$.

Loptice dosežu visinu H koja u ovisnosti o promjeru baze R iznosi

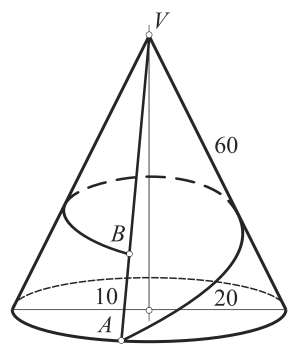
$$H = d + r = \frac{r}{\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}} + r = \frac{\dfrac{R}{6}}{\sqrt{5}-2} + \frac{R}{6} = \frac{R}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{5}-2}+1\right) = \frac{R}{6}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-2},$$

odakle, racionalizacijom posljedenjeg razlomka, dobivamo

$$H = \frac{R}{6}(\sqrt{5}+3) < \frac{R}{6}(3+3) = R,$$

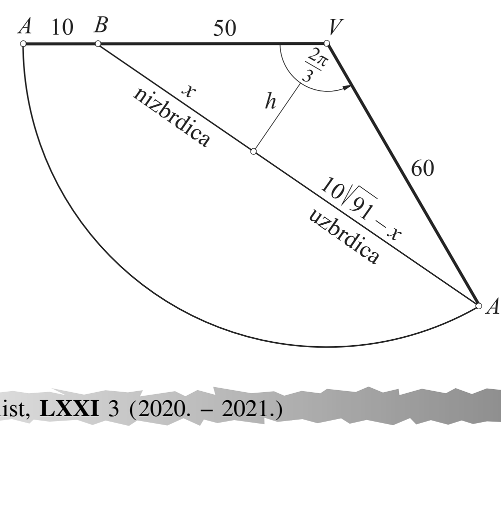
tj. loptice ne izlaze izvan posude niti jednim svojim dijelom. $\square$

Zadatak 2. (Državna matura u Južnoj Koreji, 1997. g.) *Na slici je prikazana planina u obliku uspravnog stošca. Želimo položiti tračnice najkraće duljine za panoramski vlak oko planine, gdje kolosijek kreće iz točke A, a završava u točki B. Zamišljena ruta ide uzbrdo, a potom nizbrdo. Kolika je duljina dijela kolosijeka kojim se vlak spušta?*



Rješenje. Razvojem plašta stošca u ravnini dobivamo kružni isječak. Najprije izračunamo duljinu dužine $\overline{AB}$ koristeći kosinusov poučak u trokutu ABV $\left(\sphericalangle AVG = \dfrac{2\pi}{3}\right)$: $|AB|^2 = 60^2 + 50^2 - 2\cdot 60\cdot 50\cdot\cos\dfrac{2\pi}{3} = 9100$, odakle slijedi $|AB| = 10\sqrt{91}$.

Važno je uočiti trenutak kada kolosijek iz uzbrdice prelazi u nizbrdicu tj. kada je vlak najbliži vrhu V. Dakle, spojnica vrha V i te točke je okomica na pravac po kojem je položen kolosijek.



Prema Pitagorinom poučku je sada

$$(10\sqrt{91}-x)^2+h^2=60^2,$$
$$x^2+h^2=50^2,$$

odakle, oduzimanjem gornjih relacija, imamo $9100-20\sqrt{91}x=60^2-50^2$, iz čega je tražena duljina dijela kolosijeka kojim se spušta, $x=\dfrac{400}{\sqrt{91}}$. $\square$

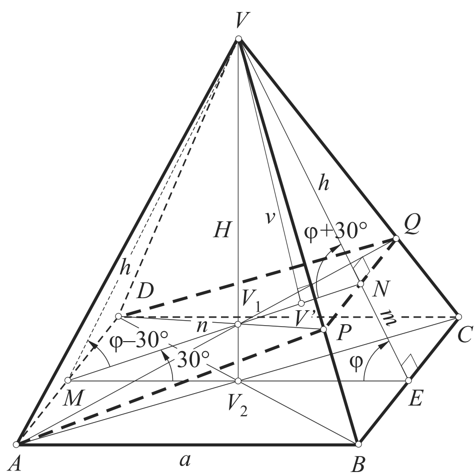
Zadatak 3. (Rumunjska, 1962. g.) *Imamo posudu oblika plašta pravilne četverostrane piramide čiji je brid osnovke duljine a i visine bočne strane duljine h. Posuda je okrenuta vrhom prema dolje tako da je osnovica vodoravna i napunjena vodom, a potom nagnuta za 30° prema okomici na osnovku tako da dva brida osnovke ostanu vodoravna.*

a) Odrediti obujam vode koja pritom iscuri iz posude.

b) Specijalno, za $h=a$ dokazati da su prikloni kutovi nasuprotnih bočnih bridova prema horizontalnoj ravnini komplementarni.

Rješenje.

a) Sa slike vidimo $|VV_2|=H$, $|VE|=|VM|=h$, $|PQ|=c$, $|NE|=m$, $|MN|=n$, $|VV'|=v$, $\sphericalangle MEV=\varphi$, $\cos\varphi=\dfrac{a}{2h}$, te $\sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\dfrac{\sqrt{4h^2-a^2}}{2h}$. Nadalje, $H=h\sin\varphi=\dfrac{1}{2}\sqrt{4h^2-a^2}$. Također, uočimo $\sphericalangle MNE=180^\circ-(\varphi+30^\circ)$, $\sphericalangle MNV=\varphi+30^\circ$, $\sphericalangle MVE=180^\circ-2\varphi$.



Iz trokuta MNE prema poučku o sinusima, imamo

$$\frac{m}{\sin 30^\circ}=\frac{a}{\sin(180^\circ-(\varphi+30^\circ))}$$
$$\Longrightarrow\ m=\frac{a}{2\sin(\varphi+30^\circ)} \qquad (1)$$

i opet, iz istog trokuta dobivamo

$$\frac{n}{\sin\varphi}=\frac{a}{\sin(180^\circ-(\varphi+30^\circ))}\ \Longrightarrow\ n=\frac{a\sin\varphi}{\sin(\varphi+30^\circ)}. \qquad (2)$$

Iz trokuta MVV', ponovno po poučku o sinusima, slijedi

$$\frac{h}{\sin 90^\circ}=\frac{v}{\sin(\varphi-30^\circ)}\ \Longrightarrow\ v=h\sin(\varphi-30^\circ). \qquad (3)$$

Kako je $\triangle NQV\sim\triangle ECV$, koristeći (1), dobivamo

$$h:(h-m)=\frac{a}{2}:\frac{c}{2}$$
$$ch=a(h-m)=a\Big(h-\frac{a}{2\sin(\varphi+30^\circ)}\Big),$$

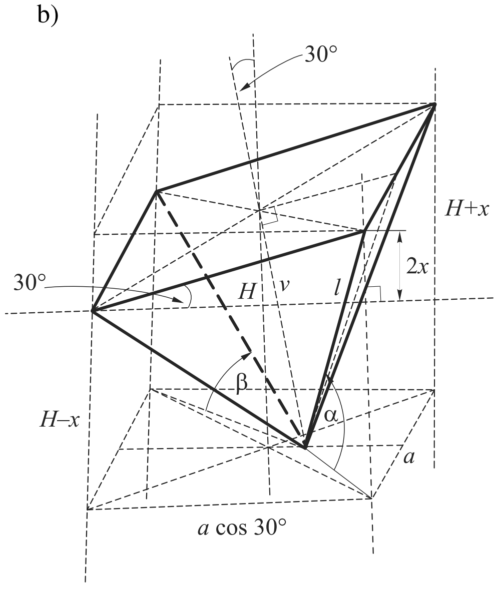
odnosno

$$c = a - \frac{a^2}{2h\sin(\varphi + 30^\circ)} \tag{4}$$

Sada, koristeći relacije (2) – (4), odnosno izraz za visinu H piramide $ABCDV$, dobivamo traženi obujam vode

$$\begin{aligned}
V &= V(\text{piramide } ABCDV) - V(\text{piramide } APQDV)\\
&= \frac{1}{3}a^2H - \frac{1}{3}\frac{a+c}{2}nv\\
&= \frac{a^2}{6}\sqrt{4h^2-a^2} - \frac{1}{6}\left(2a - \frac{a^2}{2h\sin(\varphi+30^\circ)}\right)\frac{a\sin\varphi}{\sin(\varphi+30^\circ)}h\sin(\varphi-30^\circ)\\
&= \frac{a^2}{6}\sqrt{4h^2-a^2} - \left(a - \frac{a^2}{4h\sin(\varphi+30^\circ)}\right)\frac{ah\sin\varphi\sin(\varphi-30^\circ)}{3\sin(\varphi+30^\circ)}\\
&= \frac{a^2}{6}\sqrt{4h^2-a^2} - \left(\frac{a^2h}{3} - \frac{a^3}{12\sin(\varphi+30^\circ)}\right)\frac{\sin\varphi\sin(\varphi-30^\circ)}{\sin(\varphi+30^\circ)}\\
&= \frac{a^2}{12}\left[2\sqrt{4h^2-a^2} + \left(\frac{a\sin\varphi}{\sin(\varphi+30^\circ)} - 4h\sin\varphi\right)\frac{\sin(\varphi-30^\circ)}{\sin(\varphi+30^\circ)}\right].
\end{aligned}$$

b)



Nacrtajmo piramidu nagnutu za 30°. Sa slike, prema Pitagorinom poučku imamo $l^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, odnosno $l = \frac{a}{2}\sqrt{5}$. Također, koristeći Pitagorin poučak, za visinu piramide v vrijedi $v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$, odnosno $v = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Dalje, imamo $H = v\cos 30^\circ = \frac{a}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}a$. Također sa slike uočimo $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{2x}{a\cos 30^\circ}$, odakle dobivamo $x = \frac{a}{4}$.

Za pripadne priklone kutove, sada imamo

$$\sin\alpha = \frac{H+x}{l} = \frac{\frac{3}{4}a + \frac{a}{4}}{\frac{a}{2}\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\sin\beta = \frac{H-x}{l} = \frac{\frac{3}{4}a - \frac{a}{4}}{\frac{a}{2}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

odnosno

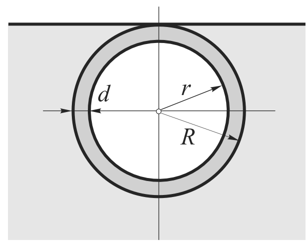
$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$
$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Koristeći adicijski teorem za kosinus, dobivamo

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = 0,$$

odakle, naposljetku imamo $\alpha+\beta = 90^\circ$, što se i tvrdilo. □

Zadatak 4. (Slovenija 1960. g., 3. razred) *Šuplja metalna kugla (gustoća metala je* $c\ \frac{kg}{dm^3}$*) ima* d *dm debelu stijenku. Koliki je njezin vanjski promjer, ako kugla pluta potpuno uronjena u vodu?*



Rješenje. Neka je R vanjski polumjer, r unutarnji polumjer kugle. Tada je $R = r + d$. Obujam metalnog dijela kugle jednak je $V = V_R - V_r = \frac{4}{3}(R^3 - r^3)\pi$. Po Arhimedovom zakonu o uzgonu, te uz činjenicu da je gustoća čiste vode 1 $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$, vrijedi jednakost

$$\frac{4}{3}(R^3 - r^3)\pi\cdot c = \frac{4}{3}R^3\pi\cdot 1,$$

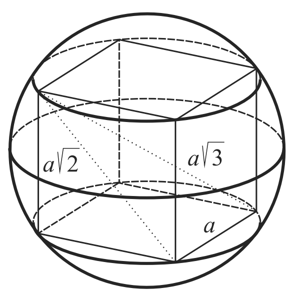
odakle je, uz $r = R - d$,

$$c(3R^2d - 3Rd^2 + d^3) = R^3.$$

Sada i na lijevoj i na desnoj strani oduzmemo cR^3, pa dobivamo

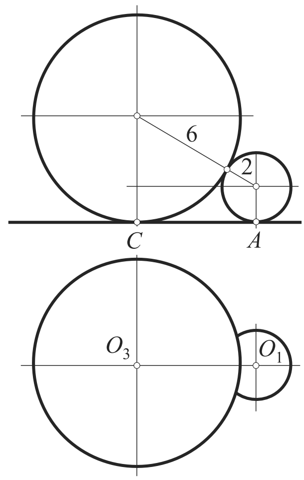
$$c(R-d)^3 = R^3(c-1) \implies R = \frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{c} - \sqrt[3]{c-1}}\,d.$$ □

Zadatak 5. (Natjecanje Georg Mohr u Danskoj 1996. g.) *Nekad popularna dječja igračka Baby Math sastoji se od niza 9 obojanih plastičnih figura i to naizmjenično kocka, kugla, kocka, kugla ..., pri čemu su sve poredane po veličini. U svaku figuru smještena je neposredno manja figura. Najveća i najmanja figura je kocka. Odredite omjer između duljina njihovih bridova.*



Rješenje. Neka je a brid najmanje figure, kocke koja se nalazi unutar svih drugih figura. Njena prostorna dijagonala jednaka je $a\sqrt{3}$ i to je dijametar kugle koja je oko nje opisana. Taj dijametar je brid kocke koja je opisana oko te kugle. Dakle, omjer bridova dviju susjednih kocki je $1 : \sqrt{3}$. U našem slučaju imamo pet kocki i četiri kugle. Omjer duljina bridova najmanje i najveće kocke je $a : a(\sqrt{3})^4 = 1 : 9$. □

Zadatak 6. (Srbija, 2015. g., 4. razred, B kategorija) *Na ravan stol postavljene su četiri kugle pri čemu se svake dvije dodiruju. Polumjeri tri od te četiri iznose 2, 3 i 6. Izračunajte polumjer četvrte kugle.*



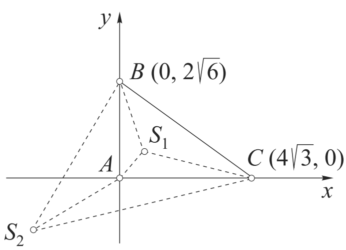
Rješenje. Neka su O_1, O_2, O_3 i O središta danih kugli, čiji su polumjeri redom 2, 3, 6 i R. Neka su A, B, C i S redom projekcije tih točaka na stol, odnosno dodirne točke kugli i stola. Na slikama desno je pogled na istu situaciju iz dvije perspektive. Prema Pitagorinom poučku, imamo

$$|AB| = \sqrt{(3+2)^2 - (3-2)^2} = 2\sqrt{6},$$
$$|AC| = \sqrt{(6+2)^2 - (6-2)^2} = 4\sqrt{3},$$
$$|BC| = \sqrt{(6+3)^2 - (6-3)^2} = 6\sqrt{2}.$$

Kako je $|AB|^2 + |AC|^2 = 24 + 48 = 72 = |BC|^2$, po obratu Pitagorinog poučka zaključujemo da je $\triangle ABC$ pravokutan s pravim kutom pri vrhu A.

Analogno računamo

$$|SA| = \sqrt{(R+2)^2 - (R-2)^2} = 2\sqrt{2R},$$
$$|SB| = \sqrt{(R+3)^2 - (R-3)^2} = 2\sqrt{3R},$$
$$|SC| = \sqrt{(R+6)^2 - (R-6)^2} = 2\sqrt{6R}. \qquad (1)$$



Smjestimo trokut ABC u koordinatnu ravninu tako da je točka A u ishodištu, a točke B i C na pozitivnim dijelovima y i x-osi, redom. Također neka točka S ima koordinate (x, y). Dalje, imamo

$$|SA|^2 = x^2 + y^2,$$
$$|SB|^2 = x^2 + (y - 2\sqrt{6})^2,$$
$$|SC|^2 = (x - 4\sqrt{3})^2 + y^2.$$

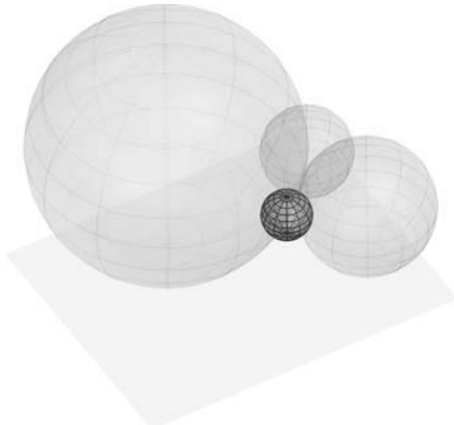
Koristeći jednakosti (1), dobivamo sustav jednadžbi

$$\frac{3}{2} = \frac{|SB|^2}{|SA|^2} = \frac{x^2 + (y - 2\sqrt{6})^2}{x^2 + y^2},$$
$$3 = \frac{|SC|^2}{|SA|^2} = \frac{(x - 4\sqrt{3})^2 + y^2}{x^2 + y^2},$$

odnosno, sređivanjem

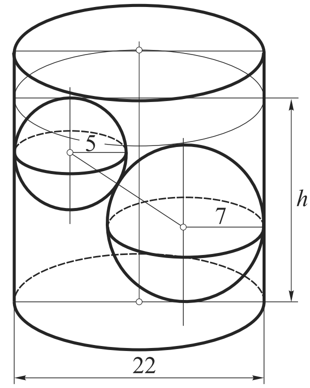
$$x^2 + y^2 + 8\sqrt{6}y = 48,$$
$$x^2 + y^2 + 4\sqrt{3}x = 24.$$

Rješavanjem ovog sustava dobivamo dva rješenja $(x, y) \in \{(4\sqrt{2} - 2\sqrt{3}, 2), (-4\sqrt{2} - 2\sqrt{3}, 2)\}$ koja su na slici desno gore označena S_1 i S_2. Sada, koristeći jednakost $|SA| = \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{2R}$, dobivamo dvije mogućnosti za polumjer četvrte kugle i to $R = 6 \pm 2\sqrt{6}$.

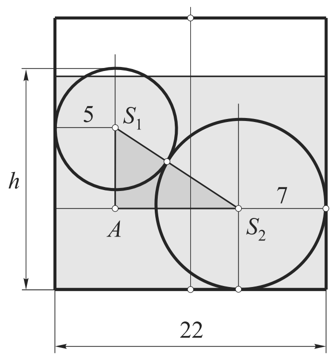


Oba moguća slučaja su interpretirana na slici: kada je $R = 6 - 2\sqrt{6}$ to je najmanja, a za $R = 6 + 2\sqrt{6}$ najveća kugla. □

Zadatak 7. (MFL, 1979–80, br. 1) *U valjkastoj posudi dijametra baze 22 cm nalaze se dvije željezne kugle radijusa 7 cm i 5 cm, kao na slici. U posudu ulijemo 5 l vode. Hoće li će voda sasvim prekriti gornju kuglu?*



Rješenje.



Nakon što smo ulili 5 l vode u valjastu posudu s dvije željezne kugle, poprečni presjek prikazan je na slici desno. Sa slike uočavamo $|S_1S_2| = 12$ cm i $|AS_2| = 22 - 5 - 7 = 10$ cm. Prema Pitagorinom poučku je $|AS_1| = \sqrt{12^2 - 10^2} = 2\sqrt{11}$ cm. Sada je $h = 7 + |AS_1| + 5 = 12 + 2\sqrt{11}$ cm.

Volumen valjkaste posude do vrha gornje kugle jednak je

$V_0 = 11^2\pi\cdot(12+2\sqrt{11}) \approx 7.083$ l,

volumen manje kugle jednak je

$$V_1 = \frac{4}{3} \cdot 5^3\pi \approx 0.523 \text{ l},$$

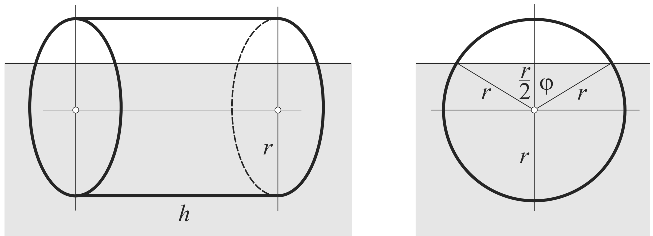
te volumen veće kugle

$$V_2 = \frac{4}{3} \cdot 7^3\pi \approx 1.437 \text{ l}.$$

Stoga je količina ulivene vode jednaka $V_0 - V_1 - V_2 \approx 5,123$ l. Dakle, ako u posudu ulijemo 5 l vode, gornja kugla neće biti sasvim uronjena u vodu. □

Zadatak 8. (Srbija, 1958. g.) *Stablo oblika pravilnog uspravnog valjka pliva u vodi tako da mu je jedna četvrtina promjera izvan vode. Nađite njegovu gustoću (u $\frac{kg}{dm^3}$).*

Rješenje. Odredimo volumen dijela stabla koji se nalazi izvan vode. U tu svrhu promotrimo poprečni presjek stabla (slika desno), te izračunamo površinu dijela iznad razine vode (kružni odsječak).



Vidimo, sa slike desno, $\cos\varphi = \dfrac{\frac{r}{2}}{r} = \dfrac{1}{2}$, odakle je $\varphi = 60^\circ$, odnosno $2\varphi = 120^\circ$.
Sada je $P_{\text{isječka}} = \dfrac{r^2\pi \cdot 120^\circ}{360^\circ} = \dfrac{1}{3}r^2\pi$.

Duljina poluosnovice pripadnog jednakokračnog trokuta na slici desno iznosi $r\sin\varphi = r\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}r$. Dakle, $P_{\text{odsječka}} = P_{\text{isječka}} - P_{\triangle} = \left(\dfrac{1}{3}\pi - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2$, pa je volumen suhog, neuronjenog, dijela stabla jednak $V_{\text{suhi}} = P_{\text{odsječka}} \cdot h = \left(\dfrac{1}{3}\pi - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2h$.

Koristeći činjenicu $V_{\text{stabla}} = r^2\pi h$, dobivamo volumen dijela stabla koji je uronjen u vodu:

$$V_{\text{uronjen}} = V_{\text{stabla}} - V_{\text{suhi}} = r^2\pi h - \left(\frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2h = \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2h.$$

Po Arhimedovom zakonu o uzgonu

$$r^2\pi h \cdot \rho_{\text{s}} = \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2h \cdot \rho_{\text{vode}},$$

odakle, uz $\rho_{\text{vode}} = 1\ \dfrac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$, dobivamo gustoću stabla

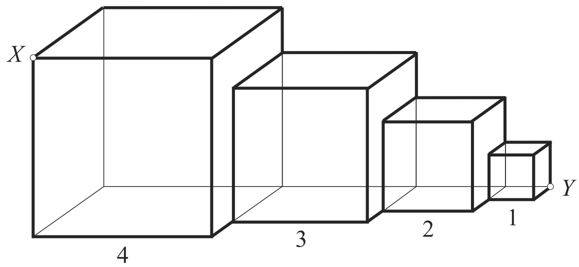
$$\rho_{\text{s}} = \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\right)\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}.$$

□

Na koncu donosimo vam nekoliko zadataka za vježbu, a svi redom su se pojavljivali na raznim matematičkim natjecanjima.

Zadaci za vježbu

1. (Poljska, 1950.) Četiri jednake kugle polumjera r dodiruju se svaka sa svakom. Izračunajte polumjer najmanje kugle koja ih sve obuhvaća. (*Rezultat*: $R = \left(\dfrac{\sqrt{6}}{2} + 1\right)r$.)
2. (Školsko-gradsko natjecanje 2018., 3. razred, A varijanta) Četiri kocke duljine bridova 1, 2, 3 i 4 nalaze se jedna do druge kao na slici desno. Odredite duljinu dijela dužine $\overline{XY}$ koji se nalazi unutar kocke duljine brida 3. (*Rezultat*: $\dfrac{3\sqrt{33}}{5}$.)



3. (Općinsko natjecanje 1994., 3. razred) Tri kugle diraju se međusobno i diraju ravninu u tri dane točke. Nađite polumjere tih kugli ako su međusobne udaljenosti tih triju točaka a, b i c. (*Rezultat* $r_1 = \frac{bc}{2a}$, $r_2 = \frac{ac}{2b}$, $r_3 = \frac{ab}{2c}$.)

4. (Općinsko natjecanje 2006., 3. razred, A varijanta) U zadanu polukuglu polumjera R upisane su tri kugle jednakih polumjera koje se međusobno dodiruju i koje diraju zadanu polukuglu. Izračunajte polumjer upisanih kugli. (*Rezultat*: $r = \frac{\sqrt{21}-3}{4}R$.)

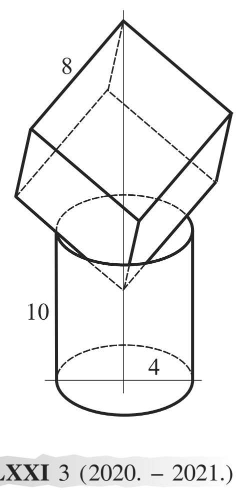
5. (Državno natjecanje 2006., 4. razred, B varijanta) Valjkasta posuda polumjera osnovke $r = 4$ cm i duljine visine $v = 16$ cm napunjena je vodom. Odredite kut za koji treba nagnuti posudu prema ravnini osnovke tako da iz nje iscuri četvrtina vode. (*Rezultat*: $\alpha = 45^\circ$.)

6. (MFL, 2009/2010, br. 1) Tri kugle polumjera r leže na donjoj bazi cilindra, pričem svaka dodiruje druge dvije i bočnu plohu cilindra. Četvrta leži na ove tri i dodiruje bočnu plohu cilindra i njegovu gornju bazu. Odredite visinu cilindra. (*Rezultat*: $H = \frac{2r}{3}(3+\sqrt{3}+\sqrt{9+6\sqrt{3}})$.)

7. (MFL, 1980–81, br. 4) Na dnu kockaste kutije brida a smještene su 4 kugle promjera $\frac{a}{2}$. Koliki je dijametar pete kugle koja dodiruje prve četiri i poklopac? (*Rezultat*: $R = \frac{5a}{8}$.)

8. (MFL, 1977–78, br. 1) Čašu oblika polukugle, punu vode, nagnemo za 45°. Koliki postotak vode ostane u čaši? (*Rezultat*: ≈ 11.6 %.)

9. (AIME 2015., American Invitational Mathematics Examination) Cilindrična posuda polumjera baze 4 m i visine 10 m napunjena je vodom. Puna kocka brida 8 m uronjena je u posudu tako da joj je prostorna dijagonala okomita na ravnine baze valjkaste posude (kao na slici). Ako s V označimo obujam vode koji kocka istisne iz posude, nađite V^2. (*Rezultat*: 384 m^6.)



Literatura

[1] Željko Hanjš, *Trostrana piramida uložena u paralelepiped*, MFL, 1999–2000, br. 3.

[2] Željko Hanjš, *Kako kocku provući kroz isto tako veliku kocku?*, MFL, 2006–2007, br. 4.

[3] Roko Pešić, *S razredbenog ispita u Japanu*, MFL, 2008–2009, br. 2.

[4] Željko Hanjš i dr., *Matematička natjecanja*, serija knjižica, Element, Zagreb.

[5] S. Turajlić, D. Cvetković, I. Lazarević, *Matematičke olimpijade u Čehoslovačkoj, Mađarskoj i Rumunjskoj*, Beograd 1966.

[6] Matematičko-fizički list, (razna godišta).

[7] Neven Elezović, *Odabrani zadaci elementarne matematike*, Zagreb 1992.