

Tragom jedne nejednakosti o brojevnim sredinama

Dragoljub Milošević¹

Poznata nam je nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine dva pozitivna broja a i b :

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, \quad \text{tj. } A(a,b) \leq K(a,b).$$

Sada, budući da vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \right) &\geq \frac{a+b}{2} \iff \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq a+b \\ \iff a^3 + b^3 &\geq ab(a+b) \iff a^2 - ab + b^2 \geq ab \iff (a-b)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

zaključujemo $A\left(\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}\right) \geq A(a,b)$. Znak jednakosti vrijedi ako i samo ako $a = b$.

Postavljamo pitanje:

Vrijedi li $A\left(\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}\right) \leq K(a,b)$ ili $A\left(\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}\right) \geq K(a,b)$?

Ako, npr. stavimo $a = 7$ i $b = 1$, dobijemo:

$$\begin{aligned} A\left(\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}\right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{7^2}{1} + \frac{1^2}{7} \right) = 24\frac{4}{7}, \\ K(a,b) &= \sqrt{\frac{7^2+1^2}{2}} = 5, \end{aligned}$$

pa vrijedi $A\left(\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}\right) \geq K(a,b)$ za $a = 7$ i $b = 1$. Dokazat ćemo da ova nejednakost vrijedi za sve pozitivne brojeve a i b .

¹ Autor je profesor matematike u srednjoj školi u Gornjem Milanovcu.

Teorem 1. Za $a, b > 0$, vrijedi $A\left(\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}\right) \geq K(a, b)$.

Dokaz 1. Dana nejednakost ekvivalentna je sljedećoj

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq \sqrt{2(a^2 + b^2)}. \quad (1)$$

Dokažimo pomoćnu nejednakost

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq \frac{(a^2 + b^2)^2}{ab(a + b)}. \quad (2)$$

Imamo:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} - \frac{(a^2 + b^2)^2}{ab(a + b)} &= \frac{a^3(a + b) + b^3(a + b) - (a^2 + b^2)^2}{ab(a + b)} \\ &= \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{a + b} = \frac{(a - b)^2}{a + b} \geq 0, \end{aligned}$$

pa vrijedi (2).

Iz (2) imamo

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} &\geq \frac{2ab(a^2 + b^2)}{ab(a + b)} = \frac{2(a^2 + b^2)}{a + b} \\ &\geq \frac{2(a^2 + b^2)}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}} = \sqrt{2(a^2 + b^2)}, \end{aligned}$$

što znači da vrijedi (1), a samim tim i nejednakost $A\left(\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}\right) \geq K(a, b)$.

Dokaz 2. Nejednakost (1) je redom ekvivalentna s

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &\geq ab\sqrt{2(a^2 + b^2)} \\ \iff (a^3 + b^3)^2 &\geq 2a^2b^2(a^2 + b^2) \\ \iff a^6 - 2a^4b^2 + 2a^3b^3 - 2a^2b^4 + b^6 &\geq 0 \\ \iff (a^6 - a^4b^2) + (b^6 - a^2b^4) - (a^4b^2 - 2a^3b^3 + a^2b^4) &\geq 0 \\ \iff a^4(a^2 - b^2) + b^4(b^2 - a^2) - a^2b^2(a^2 - 2ab + b^2) &\geq 0 \\ \iff (a^2 - b^2)(a^4 - b^4) - a^2b^2(a - b)^2 &\geq 0 \\ \iff (a - b)^2((a + b)^2(a^2 + b^2) - a^2b^2) &\geq 0 \\ \iff (a - b)^2(a^4 + 2a^3b + a^2b^2 + 2ab^3 + b^4) &\geq 0. \end{aligned}$$

Ova nejednakost očito vrijedi, a samim tim i $A\left(\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{a}\right) \geq K(a, b)$.

Nadalje, dokazat ćemo i općenitiju nejednakost.

Teorem 2. Neka je $a, b, c > 0$. Tada vrijedi $A\left(\frac{a^2}{b}, \frac{b^2}{c}, \frac{c^2}{a}\right) \geq K(a, b, c)$.

Dokaz. Ekvivalentan oblik prethodne nejednakosti je

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}. \quad (3)$$

U MFL-u 4/256 (2013./2014.), na str. 238, dokazana je sljedeća nejednakost: za pozitivne brojeve a, b, c, x, y, z vrijedi:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}. \quad (4)$$

Primjenom posljednje nejednakosti dobivamo

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} = \frac{a^4}{a^2b} + \frac{b^4}{b^2c} + \frac{c^4}{c^2a} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^2b + b^2c + c^2a}. \quad (5)$$

Iz A-G nejednakosti za pozitivne brojeve a, b, c imamo

$$a + b + c \leq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}. \quad (6)$$

Naime,

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) &\iff ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 \\ &\iff \frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) \geq 0. \end{aligned}$$

Pokazat ćemo da vrijedi

$$a^2b + b^2c + c^2a \leq \frac{1}{3}(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2). \quad (7)$$

Ova nejednakost je ekvivalentna sa:

$$\begin{aligned} 3(a^2b + b^2c + c^2a) &\leq a^3 + ab^2 + ac^2 + ba^2 + b^3 + bc^2 + ca^2 + cb^2 + c^3 \\ \iff 2(a^2b + b^2c + c^2a) &\leq a^3 + b^3 + c^3 + ab^2 + bc^2 + ca^2 \\ \iff (a^3 - a^2b) + (b^3 - b^2c) &+ (c^3 - c^2a) + (ab^2 - a^2b) + (bc^2 - b^2c) + (ca^2 - c^2a) \geq 0 \\ \iff a^2(a-b) + b^2(b-c) &+ c^2(c-a) + ab(b-a) + bc(c-b) + ca(a-c) \geq 0 \\ \iff (a-b)(a^2 - ab) + (b-c)(b^2 - bc) &+ (c-a)(c^2 - ca) \geq 0 \\ \iff a(a-b)^2 + b(b-c)^2 + c(c-a)^2 &\geq 0, \end{aligned}$$

odakle, zaključujemo da vrijedi (7).

Sada iz (5), korištenjem (6) i (7) imamo

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} &\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{\frac{1}{3}(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a+b+c} \\ &\geq \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}} = \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}, \end{aligned}$$

tj. vrijedi (3).

Pitanje. Vrijedi li za sve pozitivne brojeve a, b, c, d nejednakost

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a} \geq 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}?$$