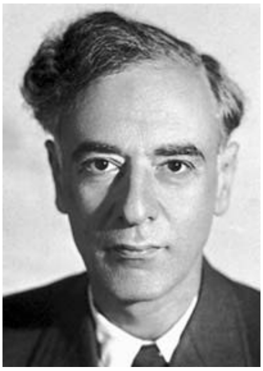
Landauova igra – s rješenjem za 21. stoljeće

Harun Šiljak[1]



Slika 1. Lav Davidovič Landau.

Slavni ruski nobelovac Lav Davidovič Landau je ostao upamćen po svom doprinosu nauci, seriji ispita poznatoj kao *teorijski minimum*, ali i po anegdotama iz života. Boris S. Gorobec tako u [1] prenosi priču koju je Landau ponekad običavao igrati.

Naime, u to vrijeme su automobilske tablice u Sovjetskom Savezu bile oblika $ab - cd$, gdje su a, b, c, d znamenke od *0* do *9*. Zadatak u Landauovoj igri je bio jednostavan – primjenom elementarnih matematičkih funkcija, poznatih svakom srednjoškolcu, nad znamenkama s obje strane crtice na tablicama postići jednakost između lijeve i desne strane (bez dodavanja novih znamenaka). U primjeru sa slike jedno moguće rješenje bi bilo $0 + 0 = 3! - 6$.

Slika 2. Registarske tablice u tadašnjem Sovjetskom Savezu.

Istina, s vremenom se mijenjao skup dozvoljenih matematičkih funkcija i operacija nad znamenkama, kako se mijenjao plan i program u srednjim školama – na tu temu ćemo se vratiti nešto kasnije.

Prirodno pitanje koje se nameće nakon upoznavanja s ovom igrom je sljedeće: da li je moguće uspješno riješiti svakuj kombinaciju znamenaka?

Kada je M. I. Kaganov postavio to pitanje Landau (vidi [2]) odgovor je glasio: "Ne, nije." Na Kaganovo pitanje je li to i dokazao, Landau je odgovorio odrečno i dodao: "Ali nisam ni uspio riješiti svaku kombinaciju!" Jedan harkovksi matematičar je našao opće rješenje, koje je Kaganov potom i predstavio Landau. Tu magičnu formulu ćemo u nastavku i izvesti.

Kako je

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{\sin^2 x + \cos^2}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2} = \sec^2 x,$$

možemo definirati funkciju $f(n) = n + 1$ koristeći izvedeni identitet

$$f(n) = n + 1 = \sec^2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{n}.$$

Jedino što nam smeta da ovakvu funkciju primijenimo u igri Landaua jeste kvadrat sekansa, pa obje strane korjenujemo i konačno dobivamo

$$\sqrt{n+1} = \sec \operatorname{arc\,tg} \sqrt{n}.$$

Primjenom ove formule više puta, manji od dva dvoznamenkasta broja na tablici prevedemo u onaj veći, čime je Landauova igra riješena. Kako Gorubec primjećuje, funkcija sekans više nije u redovnom planu i programu srednjjih škola u Rusiji, pa je upitna vrijednost ovakvog rješenja po strogim pravilima Landauove igre. U [1] Gorobec prenosi cijeli niz članaka i pisama čitatelja iz ruskog časopisa *Nauka i život* u kojem se

[1] Autor je istraživač i popularizator znanosti u Connect Centre, Trinity College Dublin;
e-pošta: `harun.siljak@tcd.ie`

diskutiralo o drugim mogućim općim rješenjima Landauove igre, ali i o posebno teškim primjerima tablica koje redovno imaju zanimljiva i maštovita rješenja.

Opće rješenje koje je ponudio S. N. Fedin prati ideju prvog općeg rješenja kroz ekvivalentnu formulu

$$\sqrt{n+1} = \operatorname{tg} \operatorname{arcctg} \cos \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{n}$$

koja koristi činjenicu da je $\operatorname{tg} \operatorname{arcctg} x = \dfrac{1}{x}$ čime se izbjegava korištenje sekansa.

Treće opće rješenje je dao Gorobec i ono se zasniva na činjenici da je $6! = 720 = 2 \cdot 360$, jer na osnovu te vrijednosti znamo da je $\sin n!^\circ = 0$ za $n > 5$. Ukoliko s obje strane crtice imamo dvoznamenkaste brojeve čija prva zanemenka nije nula, na ovaj način lako dobivamo nulu s obje strane. Ukoliko je prva znamenka nekog od brojeva nula, jednostavno množenjem – dobivamo nulu i jednakost $0 = 0$.

Za što služe ova opća rješenja, zar ne ubijaju čar igre? Objektivno govoreći, traženje općeg rješenja ima svoj poseban čar, baš kao i traženje neobičnih rješenja za teške primjene tablica. Time ova igra dobiva dvostruki smisao. Naravno, postoje i trivijalna rješenja – ako bismo koristili funkcije $\lfloor x \rfloor$ i $\{x\}$ (cijeli i razlomljeni dio broja, tim redom) vrlo lako bismo mogli doći do očigledne jednakosti $0 = 0$. Razdvajanje obiju strana jednakosti također bi učinilo igru trivijalnom, kao i korištenje neelementarnih funkcija.

U ovom članku želim ponuditi novo, dosad neobjavljeno opće rješenje Landauove igre, koje sam nazvao *rješenjem za 21. stoljeće*. Simbolika naziva leži u činjenici da se rješenje zasniva na funkciji koja je postala bitna u drugoj polovini 20. stoljeća i čija važnost u 21. stoljeću može samo rasti: radi se o binarnom logaritmu $\ldots x$.

Riječ je jednostavno o logaritmu po bazi 2, tj. $\ldots x = \log_2 x$. Baš kao logaritmi po bazama e i 10 čije je široko područje primjene uvjetovalo pojavu posebnih oznaka za ove logaritme, $\ln$ i $\lg$, tim redom, tako je i binarni logaritam, nezamjenjiv u teorijskoj računarskoj znanosti i teoriji informacija, zaslužio posebnu oznaku. Istina, svijet se još nije usuglasio koja bi to oznaka bila: na Zapadu se često koristi oznaka $\lg$ za ovaj logaritam, što izaziva zabunu zbog činjenice da se u ruskoj i njemačkoj literaturi oznaka $\lg$ koristi za dekadski logaritam. ISO standard propisuje oznaku $\ldots$ za binarnu i $\lg$ za dekadski logaritam, čega se i držim u ovom članku.

Rješenje se zasniva na sljedećem nizu jednakosti: $\ldots 4 = 2$, $\ldots 2 = 1$, $\ldots 1 = 0$ (naravno, binarni logaritam je neophodan samo za prelazak iz 2 u 1, ostala dva prijelaza se mogu izvesti i drugačije, onaj iz 4 u 2 korjenovanjem, a onaj iz 1 u 0 logaritmiranjem po bilo kojoj bazi). Prema ovom nizu zaključujemo da se svaki par znamenaka u kojem je bar jedna od njih iz skupa $\{0, 1, 2, 4\}$ ili čija je razlika/zbroj iz tog skupa, može svesti na nulu primjenom binarnog logaritma, što vodi k jednakosti $0 = 0$. Što je s ostalim parovima? Brzi račun pokazuje da su jedini preostali parovi znamenaka (poredak nije bitan): 36, 38, 39, 58, 69. Kako je $3! - 6 = 0$, $\sqrt[3]{8} = 2$, $3 - \sqrt{9} = 0$, $5 - \ldots 8 = 2$, $6 - (\sqrt{9})! = 0$, to se i ovi preostali slučajevi svode na već dobivene, čime je rješenje kompletirano.

Svejedno hoćete li tražiti nova opća rješenja ili rješavati teške slučajeve na nove načine – činite to na pločniku. Igru je strogo zabranjeno igrati za upravljačem atomobila ili pri prijelazu ulice.

Literatura

[1] Boris S. Gorobec, *Krug Landau*, Letnij sad, Moskva, 2006.

[2] M. I. Kaganov, *Landau's licence plate game*, Quantum, Vol. 3 No. 4, 1983.