ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. svibnja 2021. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 1/285.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 216.

A) Zadatci iz matematike

3791. Pokaži da su svi brojevi oblika 12008, 120308, 1203308,... djeljivi s 19.

3792. Odredi sva realna rješenja sistema jednadžbi

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=7$$

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{1+y}=\frac{31}{20}.$$

3793. Odredi sva rješenja jednadžbe

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}.$$

3794. Rješenja jednadžbe $x^2-bx+a-1=0$ su iz skupa $\mathbb{N}\setminus\{1\}$. Dokaži da je broj a^2-b^2 složen.

3795. Dokaži nejednakost

$$1+\sqrt{\frac{2+1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{3+1}{3}}+\ldots+\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}<n+1.$$

3796. Neka su a, b, c realni brojevi veći od 1. Odredi vrijednost izraza

$$\frac{1}{1+\log_{a^2b}\left(\frac{c}{a}\right)}+\frac{1}{1+\log_{b^2c}\left(\frac{a}{b}\right)}+\frac{1}{1+\log_{c^2a}\left(\frac{b}{c}\right)}.$$

3797. Pokaži da je broj $3^{105}+4^{105}$ djeljiv s 13, 49, 181 i 379, a nije djeljiv ni s 5 ni s 11.

3798. Neka je $OABC$ tetraedar kod kojeg je $\sphericalangle AOB=\sphericalangle BOC=\sphericalangle COA=90^\circ$. Dokaži da je

$$P^2_{ABC}=P^2_{OAB}+P^2_{OBC}+P^2_{OCA}.$$

3799. Točka O je središte opisane kružnice šiljatokutnog trokuta ABC. Neka su A_1, B_1, C_1 točke presjeka dijametara kružnice kroz A, B, C, redom sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$. Polumjer opisane kružnice trokuta ABC je prost broj p, a duljine $|OA_1|$, $|OB_1|$, $|OC_1|$ su cijeli brojevi. Kolike su duljine stranica trokuta ABC?

3800. Dana je točka D unutar trokuta ABC. S njegove vanjske strane su pravokutnici $AEFB$, $BGHC$ i $CKLA$ tako da je površina svakog od njih jednaka dvostrukoj površini trokuta. Dokaži da je zbroj površina trokuta DEF, DGH i DKL jednak četverostrukoj površini polaznog trokuta.

3801. Kakav je trokut ako za njegove stranice i kutove vrijedi

$$\frac{a}{b}=\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}}?$$

3802. Kružnica je opisana jednakostraničnom trokutu ABC. Dana je točka D na luku nad stranicom $\overline{AC}$. Dužina $\overline{BD}$ siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki E tako da je $|AE|:|CE|=2:3$. Ako je R polumjer kružnice odredi $|AD|$, $|CD|$ i $|BD|$.

3803. Odredi umnožak

$$\left(1-\frac{\cos 61^\circ}{\cos 1^\circ}\right)\left(1-\frac{\cos 62^\circ}{\cos 2^\circ}\right)\cdots\left(1-\frac{\cos 119^\circ}{\cos 59^\circ}\right).$$

3804. Dokaži da sustav jednadžbi

$$x^2+6y^2=z^2$$

$$6x^2+y^2=t^2$$

ima samo trivijalno rješenje.

B) Zadatci iz fizike

OŠ – 482. Za najbržu se životinju na svijetu smatra sivi sokol koji pri poniranju za plijenom dostiže brzine preko 300 km/h. Najveća zabilježena brzina iznosila je 389 km/h. Usporedite tu brzinu s brzinom Usaina Bolta koji s 9.58 sekundi drži svjetski rekord u utrci na 100 metara.

OŠ – 483. U menzuru je usipano 5 dkg riže. Zrnca riže dosegla su do oznake za 45 mililitara. Zatim je u nju utočeno 25 mililitara vode i ukupna je razina iznosila 65 mililitara. Koliki je postotak zraka između zrnaca u odnosu na ukupni obujam riže? Kolika je gustoća jednog zrna riže?

OŠ – 484. Sara se spušta na rolama s kosine visoke 2 metra i dugačke 10 metara. Nema početnu brzinu i giba se samo zbog sile teže. Nakon kosine je ravni dio dugačak 7 metara i nakon njega druga kosina koja je dugačka 8 metara i visoka 1.5 metara. Sarina je masa 50 kilograma. Koliki je maksimalni iznos prosječne sile trenja da bi se Sara mogla popeti na vrh druge kosine?

OŠ – 485. Luka želi pripremiti čaj za svoje prijatelje koji su se najavili da će ga posjetiti u 19 sati. Vani je hladno i on želi da čaj bude gotov kad stignu da se mogu odmah ugrijati. Njegova električna ploča ima snagu 2000 vata i korisnost joj je 80 posto. Čaj mora odstajati 15 minuta nakon što se prelije kipućom vodom. Luka kuha 2 litre čaja za koji uzima vodu temperature $20\,^\circ\mathrm{C}$. U koliko sati mora uključiti ploču? Specifični toplinski kapacitet vode je 4200 J/kgK, a gustoća vode je $1000\ \mathrm{kg/m^3}$.

1749. Horizontalni domet kosog hica iznosi 1200 m, za neki kut izbačaja α i početnu brzinu v_0. Ako kut povećamo za 5° domet će se povećati za 180 m. Odredi v_0 i α. Otpor zraka zanemariti.

1750. Satelit *SOHO* za promatranje Sunca nalazi se u Lagrangeovoj L1 točki, to jest uvijek je između Zemlje i Sunca s istim orbitalnim periodom oko Sunca kao i Zemlja. Kolika je njegova udaljenost od Zemlje ako je Sunce 333 000 puta masivnije od Zemlje, a Zemljinu putanju aproksimiramo kružnicom radijusa 149.6 milijuna km?

1751. Na USB priključak na računalu (nominalnog napona 5 V) priključimo voltmetar, ampermetar i svjetleću diodu s prekidačem. Kad je dioda isključena, očitamo $U = 5.05$ V i $I = 0$ A. Kad diodu uključimo, očitamo $U = 4.93$ V i $I = 0.15$ A. Koliki je unutarnji otpor napajanja? Koliki bi bili struja i napon kad bi umjesto diode priključili otpornik od $10\ \Omega$? Kolika je Jouleova snaga na otporniku?

1752. Na homogenu kuglu koja rotira početnom kutnom brzinom 0.5 okretaja u sekundi djeluje jednoliki moment sile, tako da se nakon 6 punih okretaja kugla zaustavi. Odredi vrijeme svakog punog okretaja, u sekundama.

1753. Unutar kugle radijusa 6 cm nalazi se izvor topline. Odredi snagu tog izvora, ako se površina kugle ugrije do $50\,^\circ\mathrm{C}$ u prostoriji temperature $22\,^\circ\mathrm{C}$. Pretpostavljamo da je kugla crno tijelo i da je dosegnuta ravnoteža temperature površine.

1754. Starije osobe trebaju naočale za čitanje zbog gubitka akomodacije oka na blizinu. Ako osoba vidi jasno tekst udaljen 30 cm od oka uz naočale jačine $+2$ dpt, do koje bi minimalne daljine ta osoba vidjela oštru sliku bez naočala?

1755. Brzina valova na vodi v ovisi o valnoj duljini λ:

$$v(\lambda) = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}},$$

uz $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$, gustoću vode $\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$ i napetost površine $\gamma = 0.7\ \mathrm{N/m}$. Odredi brzinu valova valne duljine 1 cm. Kolika je valna duljina dugih valova iste brzine?

C) Rješenja iz matematike

3763. *Odredi polinom $f(x)$ trećeg stupnja takav da vrijedi*

$$f(-1) = 0,\ f(1) = 4,\ f(2) = 3,\ f(3) = 16.$$

Rješenje. Iz uvjeta zadatka se dobije:

$$-a + b - c + d = 0 \qquad (1)$$
$$a + b + c + d = 4 \qquad (2)$$
$$8a + 4b + 2c + d = 3 \qquad (3)$$
$$27a + 9b + 3c + d = 16. \qquad (4)$$

Rješavamo dobiveni sustav metodom supstitucije. Izrazimo nepoznanicu d iz jednadžbe (1):

$$d = a - b + c. \qquad (5)$$

Uvrstimo u preostale tri i nakon sređivanja se dobije:

$$2a + 2c = 4$$

$$9a + 3b + 3c = 3 \qquad (6)$$

$$28a + 8b + 4c = 16.$$

Iz jednadžbe (6) dobivenog sustava izrazimo nepoznanicu c, dobije se:

$$c = 2 - a. \qquad (7)$$

Uvrštavamo u preostale dvije jednadžbe, i nakon sređivanja se dobije:

$$6a + 5b = -3$$

$$24a + 8b = 8.$$

Riješimo dobiveni sustav dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice. Rješenja su:

$$a = 2, \quad b = -5.$$

Izračunajmo još vrijednosti nepoznanica c (uvrštavanjem a u (7)) i d (uvrštavanjem a, b i c u (5)), dobije se:

$$c = 0, \quad d = 7.$$

Traženi polinom je $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$.

Stella Tomac (3), Opća gimnazija, SŠ Donji Miholjac, Donji Miholjac

3764. *Nađi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe*

$$x^2 - 16x + 9x^2 - 12xy + 72 = 0.$$

Rješenje. Zadanu jednadžbu promatramo kao kvadratnu jednadžbu po x:

$$10x^2 - (16 + 12y)x + 72 = 0.$$

Njena diskriminanta je

$$D = (16 + 12y)^2 - 2800 = 16[(4 + 3y)^2 - 180].$$

Ona mora biti potpuni kvadrat da bi rješenja bila cjelobrojna. Tako je

$$(4 + 3y)^2 - 180 = k^2$$

$$(4 + 3y)^2 - k^2 = 180$$

$$(3y - k + 4) \cdot (3y + k + 4) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Imamo redom sustave:

$$3y - k + 4 = 2$$
$$\underline{3y + k + 4 = 90} \implies y = 14$$

$$3y - k + 4 = 3$$
$$\underline{3y + k + 4 = 60}$$

$$3y - k + 4 = 4$$
$$\underline{3y + k + 4 = 45}$$

$$3y - k + 4 = 5$$
$$\underline{3y + k + 4 = 36}$$

$$3y - k + 4 = 6$$
$$\underline{3y + k + 4 = 30}$$

$$3y - k + 4 = 9$$
$$\underline{3y + k + 4 = 20}$$

$$3y - k + 4 = 10$$
$$\underline{3y + k + 4 = 18}$$

$$3y - k + 4 = 12$$
$$\underline{3y + k + 4 = 15}$$

$$3y - k + 4 = -2$$
$$\underline{3y + k + 4 = -90}$$

$$3y - k + 4 = -3$$
$$\underline{3y + k + 4 = -60}$$

$$3y - k + 4 = -4$$
$$\underline{3y + k + 4 = -45}$$

$$3y - k + 4 = -5$$
$$\underline{3y + k + 4 = -36}$$

$$3y - k + 4 = -6$$
$$\underline{3y + k + 4 = -30}$$

$$3y - k + 4 = -9$$
$$\underline{3y + k + 4 = -20}$$

$$3y - k + 4 = -10$$
$$\underline{3y + k + 4 = -18} \implies y = -6$$

$$3y - k + 4 = -12$$
$$\underline{3y + k + 4 = -15}$$

Od svih mogućnosti, jedino u dva slučaja dobivamo cjelobrojnu vrijednost nepoznanice y. Za te vrijednosti y dana jednadžba postaje kvadratna jednadžba po x. Opet uzmemo samo cjelobrojna rješenja i dobivamo:

$$(x, y) \in \{(-2, -6), (18, 14)\}.$$

Provjerom vidimo da su to rješenja dane jednadžbe.

Marko Dodig (2), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3765. *Riješi kvadratnu jednadžbu*

$$2(a^3+b^3)x^2-3x+a+b=0,$$

gdje su a *i* b *rješenja jednadžbe*

$$x^2-px+\frac{p^2-1}{2}=0.$$

Rješenje. Najprije koristimo Vièteove formule za drugu jednadžbu:

$$\begin{cases} a+b=p \\ ab=\dfrac{p^2-1}{2}. \end{cases}$$

Iz prve jednadžbe je:

$$2(a+b)(a^2-ab+b^2)x^2-3x+a+b=0$$
$$2p[(a+b)^2-3ab]x^2-3x+p=0$$
$$2p\left[p^2-\frac{3}{2}(p^2-1)\right]x^2-3x+p=0$$
$$p(p^2-3)x^2+3x-p=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+4p^2(p^2-3)}}{2p(p^2-3)}=\frac{-3\pm(2p^2-3)}{2p(p^2-3)}.$$

Dobili smo rješenja:

$$x_1=\frac{-3+2p^2-3}{2p(p^2-3)}=\frac{1}{p}$$
$$x_2=\frac{-3-2p^2+3}{2p(p^2-3)}=\frac{p}{3-p^2},$$

uz uvjete $p\neq 0$, $p\neq\pm\sqrt{3}$.

Marko Dodig (2), Zagreb

3766. *Ako je*

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x^2-2x+1}}$$

odredi

$$f(1)+f(3)+f(5)+\ldots+f(999).$$

Rješenje. Koristeći formulu za razliku kubova je:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)(x-2)}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{x+1-(x-1)}=\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{2}.$$

Sada dobijemo:

$$f(1)+f(3)+f(5)+\ldots+f(997)+f(999)$$
$$=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}-0+\frac{\sqrt[3]{4}}{2}-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}+\frac{\sqrt[3]{6}}{2}-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$
$$+\ldots+\frac{\sqrt[3]{998}}{2}-\frac{\sqrt[3]{996}}{2}+\frac{\sqrt[3]{1000}}{2}-\frac{\sqrt[3]{998}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{1000}}{2}=5.$$

Marko Dodig (2), Zagreb

3767. *Odredi sve parove pozitivnih cijelih brojeva* (a,b) *koji zadovoljavaju jednadžbu*

$$100(a+b)=ab-100.$$

Rješenje. Iz dane jednadžbe redom imamo:

$$100(a+b)=ab-100$$
$$100a+100b=ab-100$$
$$ab-100b=100a+100$$
$$b(a-100)=100a+100$$
$$b=\frac{100a+100}{a-100}=100+\frac{10\,100}{a-100}.$$

Budući da je $10\,100=2^2\cdot 5^2\cdot 101$ imamo:

$$a-100\in\{1,2,4,5,10,20,25,50,100,\\ 101,404,505,1010,2020,\\ 2525,5050,10\,100\}$$

odnosno

$$a\in\{101,102,104,105,110,120,125,\\ 150,200,201,302,504,605,1110,\\ 2120,2625,5150,10\,200\}.$$

Rješenja zadane jednadžbe su uređeni parovi:

$$(a,b)\in\{(101,10\,200),(102,5150),(104,2625),\\ (105,2020),(110,1110),(120,605),\\ (125,504),(150,302),(200,201),,\\ (201,200),(302,150),(504,125),\\ (605,120),(1110,110),(2120,105),\\ (2625,104),(5150,102),(10\,200,101)\}.$$

Marko Dodig (2), Zagreb

3768. *Nađi sve pozitivne cijele brojeve n za koje je $-5^4+5^5+5^n$ potpuni kvadrat.*

Rješenje. Imamo:

$$-5^4+5^5+5^n=k^2, \quad k\in\mathbb{N}$$
$$2500+5^n=k^2$$
$$5^n=(k+50)(k-50).$$

Brojevi $k+50$ i $k-50$ moraju biti potencije broja 5, a njihova razlika je $k+50-(k-50)=100$. Ali, to je moguće samo u slučaju $k=75$, tj. za potencije $125=5^3$ i $25=5^2$. Prema tome, jedino rješenje je $n=5$.

Marko Dodig (2), Zagreb

3769. *Odredi sva rješenja jednadžbe*

$$\log 2+\log(4^{x-2}+9)=1+\log(2^{x-2}+1).$$

Rješenje. Zadana jednadžba je ekvivalentna sa:

$$\log(2^{2x-3}+18)=\log(10\cdot 2^{x-2}+10)$$
$$2^{2x-3}+18=10\cdot 2^{x-2}+10$$
$$\frac{1}{8}\cdot 2^{2x}-\frac{5}{2}\cdot 2^x+8=0$$
$$2^{2x}-20\cdot 2^x+64=0.$$

Uvođenjem supstitucije $t=2^x$ dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$t^2-20t+64=0$$

čija su rješenja $t_1=4$ i $t_2=16$. Sada dobivamo i rješenje polazne jednadžbe:

1° $t_1=4 \Longrightarrow 2^x=4 \Longrightarrow x_1=2$,

2° $t_2=16 \Longrightarrow 2^x=16 \Longrightarrow x_2=4$.

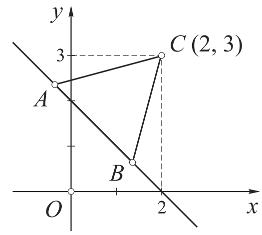
Marko Dodig (2), Zagreb

3770. *Jedan vrh jednakostraničnog trokuta u kartezijevom koordinatnom sustavu je $(2,3)$, a nasuprotna stranica leži na pravcu $x+y=2$. Nađi jednadžbe pravaca na kojima leže druge dvije stranice trokuta.*

Rješenje. Koristeći formulu za udaljenost točke $C(2,3)$ od pravca $x+y-2=0$, imamo

$$h=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|1\cdot 2+1\cdot 3-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Ova vrijednost jednaka je visini jednakostraničnog trokuta.



Sada možemo izračunati i duljinu njegove stranice iz formule

$$h=\frac{a\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow a=\sqrt{6}.$$

Neka je $A(x_A, 2-x_A)$ jedan od nepoznatih vrhova jednakostraničnog trokuta. Iz uvjeta $d(A,C)=\sqrt{6}$ jednostavno slijedi kvadratna jednadžba $2x_A^2-2x_A-1=0$ čija su rješenja $(x_A)_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$. Znači, dobili smo koordinate oba tražena vrha

$$A\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right),\ B\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right).$$

Sada, koristeći formulu za jednadžbu pravca kroz dvije točke $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$, slijede jednadžbe pravaca na kojima leže druge dvije stranice jednakostraničnog trokuta:

$$AC\ldots y=(2-\sqrt{3})x+2\sqrt{3}-1$$
$$BC\ldots y=(2+\sqrt{3})x-2\sqrt{3}-1.$$

Marko Dodig (2), Zagreb

3771. *Neka je ABC jednakokračan trokut $(|AB|=|AC|)$ i D točka na $\overline{BC}$ takva da su polumjeri upisane kružnice trokuta ABD i pripisane kružnice trokuta ADC uz stranicu $\overline{CD}$, jednaki. Pokaži da su polumjeri tih kružnica jednaki četvrtini duljine visine trokuta ABC iz vrha B.*

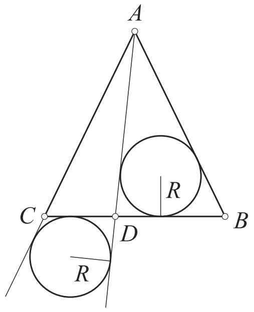
Rješenje. Iz Stewartovog teorema imamo

$$|CD|\cdot|AB|^2+|BD|\cdot|AC|^2$$
$$=|BC|(|AD|^2+|BD|\cdot|CD|)$$

odakle je

$$|AD|^2=|AB|^2-|BD|\cdot|CD|. \qquad (1)$$

Površina trokuta je rs, gdje je r polumjer upisane kružnice trokutu ABC, a s njegov poluopseg, a s druge strane $r_A(s-a)$, gdje je r_A polumjer pripisane kružnice nasuprot A.



Neka je R zajednički polumjer dviju kružnica. Tada je

$$P_{ABD} = \frac{R}{2}(|AB| + |BD| + |AD|) \quad \text{i}$$

$$P_{ADC} = \frac{R}{2}(|AD| + |AC| - |CD|).$$

Kako ova dva trokuta imaju jednake visine iz vrha A, omjer njihovih površina jednak je omjeru njihovih baza. Dakle,

$$\frac{|AB| + |BD| + |AD|}{|AD| + |AC| - |CD|} = \frac{|BD|}{|CD|}.$$

Radi $|AB| = |AC|$ iz (1) dobivamo

$$\begin{aligned}
&(|AB| + |AD|)(|BD| - |CD|)\\
&= 2|BD| \cdot |CD|\\
&= 2(|AB|^2 - |AD|^2)\\
&= 2(|AB| + |AD|)(|AB| - |AD|).
\end{aligned}$$

Dakle,

$$|BD| - |CD| = 2(|AB| - |AD|).$$

Površina $\triangle ABC$ je $\dfrac{h_B \cdot |AC|}{2}$, gdje je h_B visina iz B, odnosno jednaka je zbroju površina trokuta ABD i ADC. Dobivamo

$$\begin{aligned}
h_B \cdot |AC| &= R(|AB| + |BD| + |AD|)\\
&\quad + (|AD| + |AC| - |CD|)\\
&= R(2|AB| + |BD| - |CD| + 2|AD|)\\
&= R(2|AB| + 2|AB|) = 4R \cdot |AB|.
\end{aligned}$$

Odavde je $R = \dfrac{1}{4} r_B$.

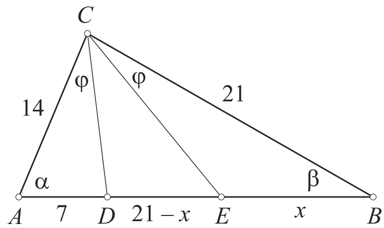
Ur.

3772. *U trokutu* ABC *je* $|AB| = 28$, $|BC| = 21$, $|CA| = 14$. *Dane su točke* D *i* E *na* $\overline{AB}$ *tako da je* $|AD| = 7$ *i* $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCE$. *Odredi duljinu* $|BE|$.

Rješenje. Primijenimo najprije kosinusov poučak na trokut ABC:

$$14^2 = 28^2 + 21^2 - 2 \cdot 28 \cdot 21 \cdot \cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{7}{8}.$$



Sada opet primijenimo kosinusov poučak na trokut BCD:

$$|CD|^2 = 21^2 + 21^2 - 2 \cdot 21 \cdot 21 \cdot \cos\beta$$

$$|CD| = \frac{21}{2}.$$

Trokutu ABC poznate su sve tri stranice, pa njegovu površinu izračunamo po Heronovoj formuli:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{147}{4}\sqrt{15}.$$

Međutim, prema drugoj formuli, njegova površina je

$$P = \frac{1}{2} bc \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 14 \cdot \sin\alpha = 196 \cdot \sin\alpha.$$

Sada odmah slijedi $\sin\alpha = \dfrac{3}{16}\sqrt{15}$. Koristeći poučak o sinusima za trokut ACD slijedi

$$\frac{|CD|}{\sin\alpha} = \frac{7}{\sin\varphi} \implies \sin\varphi = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$\implies \cos\varphi = \sqrt{1 - \sin^2\varphi} = \frac{7}{8}.$$

Znači, dobili smo $\varphi = \beta$. Još koristimo sinusov poučak za trokut BCE i dobivamo:

$$\frac{21}{\sin(180^\circ - 2\varphi)} = \frac{x}{\sin\varphi}$$

$$\sin 2\varphi \cdot x = 21 \cdot \sin\varphi$$

$$2\sin\varphi\cos\varphi \cdot x = 21 \cdot \sin\varphi$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot \frac{8}{7}$$

$$x = 12.$$

Marko Dodig (2), Zagreb

3773. *Dan je četverokut $ABCD$. Konstruiran je četverokut $A_1B_1C_1D_1$ čiji su vrhovi A_1, B_1, C_1, D_1 redom težišta trokuta BCD, CDA, DAB, ABC. Dokaži da ova dva četverokuta imaju zajedničko težište.*

Rješenje. Težište četverokuta $ABCD$ je

$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

Točke A_1, B_1, C_1, D_1 su:

$$\overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

$$\overrightarrow{OB_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA})$$

$$\overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

$$\overrightarrow{OD_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Težište četverokuta $A_1B_1C_1D_1$ je:

$$\overrightarrow{OK_1} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OB_1})$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{OK}$$

tj. $K_1 \equiv K$.

Ur.

3774. *Nađi sva rješenja jednadžbe*

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1.$$

Prvo rješenje.

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\sin^2 x \cdot (1 - \sin x) + \cos^2 x \cdot (1 - \cos x) = 0.$$

Oba pribrojnika su nenegativna, pa je ova jednadžba ekvivalentna sustavu:

$$\sin^2 x(1 - \sin x) = 0$$

$$\cos^2 x \cdot (1 - \cos x) = 0.$$

Ako je $\sin x = 0$ tada je sigurno $\cos x \neq 0$ pa imamo sustav

$$\sin x = 0, \quad \cos x = 1$$

čija su rješenja $x_1 = 2k\pi$. Ako je u prvoj jednadžbi gornjeg sustava $1 - \sin x = 0$, tj. $\sin x = 1$ tada je sigurno $\cos x \neq 0$. Sada imamo sustav

$$\sin x = 1, \quad \cos x = 0$$

čija su rješenja $x_2 = \frac{\pi}{2}(4k + 1)$.

Dakle, rješenja polazne jednadžbe su $2k\pi$, $\frac{\pi}{2}(4k + 1)$, gdje je k bilo koji cijeli broj.

Marko Dodig (2), Zagreb

Drugo rješenje. Ova jednadžba je simetrična po $\sin x$ i $\cos x$. Stavimo $x = \frac{\pi}{4} + y$. Dobivamo

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(\sin y + \cos y)^3 + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\cos y - \sin y)^3 = 1$$

tj.

$$2\cos^3 y - 3\cos y + \sqrt{2} = 0.$$

Ova jednadžba je zadovoljena za $\cos y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, što daje $y = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ odakle je $x' = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $x'' = 2k\pi$. Dijeljenjem jednadžbe s $\cos y - \frac{1}{\sqrt{2}}$ dobivamo

$$\sqrt{2}\cos^2 y + \cos y - \sqrt{2} = 0$$

$$\cos y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{-1 \pm 3}{2\sqrt{2}}.$$

Slijedi $\cos y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Drugo rješenja $\cos y = -\sqrt{2}$ ne zadovoljava.

Dakle, sva rješenja su $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ i $x = 2k\pi$.

Ur.

3775. *Neka je k pozitivan cijeli broj takav da je $p = 3k + 1$ prost broj i*

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(2k-1) \cdot 2k} = \frac{m}{n}$$

za neke relativno proste brojeve m i n. Dokaži da p dijeli m.

Rješenje. Odmah vidimo da izraz u zadatku možemo zapisati kao:

$$\frac{m}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}.$$

Označimo

$$A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2k-1} \quad \text{i}$$

$$B = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2k},$$

pa je:

$$\frac{m}{n} = A - B = (A + B) - 2B$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2k}\right)$$

$$- \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}\right)$$

$$= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k}$$
$$= \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k}\right) + \left(\frac{1}{k+2} + \frac{1}{2k-1}\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{k+3} + \frac{1}{2k-2}\right) + \ldots$$

Sigurni smo da je broj k paran, jer inače broj p ne bi bio prost. To znači da u gornjem izrazu imamo paran broj pribrojnika koji su grupirani u zagrade (dva po dva):

$$\frac{m}{n} = \frac{3k+1}{2k(k+1)} + \frac{3k+1}{(2k-1)(k+2)}$$
$$+ \frac{3k+1}{(k+3)(2k-2)} + \ldots$$
$$= \frac{(3k+1)M}{(k+1)(k+2)\ldots(2k-1)2k}.$$

Budući da je $p = 3k+1$ prost broj, on se ne može skratiti niti jednim od faktora nazivnika. Ali, $\frac{m}{n}$ je po uvjetu zadatka neskrativ razlomak pa mora p dijeliti m.

Marko Dodig (2), Zagreb

3776. *Tri osobe žele podijeliti određenu svotu novaca tako da prvi dobije jednu polovinu, drugi jednu trećinu, a treći jednu šestinu. Na početku je svaki od njih uzeo neku svotu tog novca tako da nije ostalo ništa. Prvi od njih je vratio jednu polovinu novaca koji je uzeo, drugi je vratio jednu trećinu, a treći jednu šestinu. Zatim je svaki dobio još trećinu ukupno vraćenog novca i tako su podijelili novac kako su željeli na početku. Koliko je novaca na početku svaki od njih uzeo, ako su imali ukupno 846 novčića?*

Rješenje. Neka je A ukupan novac na početku, a oni su redom imali x, y, z novaca. Tada je

$$A = x + y + z.$$

Vratili su

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z$$

novaca. Nakon što je svaki dobio trećinu novca, svaki je redom imao:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z\right) = \frac{1}{2}A$$
$$\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z\right) = \frac{1}{3}A$$
$$\frac{5}{6}z + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}z\right) = \frac{1}{6}A$$

novaca, tj.

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{9}y + \frac{1}{18}z = \frac{1}{2}A$$
$$\frac{1}{6}x + \frac{7}{9}y + \frac{1}{18}z = \frac{1}{3}A$$
$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{9}y + \frac{8}{9}z = \frac{1}{6}A.$$

Rješavanjem ovog sustava linearnih jednadžbi dobiva se

$$x = \frac{33}{47}A, \quad y = \frac{13}{47}A, \quad z = \frac{1}{47}A.$$

Za $A = 846 = 47 \cdot 18$ imamo:

$$x = 33 \cdot 18 = 594,$$
$$y = 13 \cdot 18 = 234, \quad z = 18.$$

Marko Dodig (2), Zagreb

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 474. *Prosječna duljina koraka odraslog čovjeka se može izračunati po formuli* $k = \frac{v}{4} + 0.37m$, *pri čemu je* k *duljina koraka u metrima,* v *je visina čovjeka u metrima, a 4 i* $0.37m$ *su konstante dobivene analizom. Koliko koraka napravi čovjek visok 184 centimetra kad 45 minuta hoda brzinom 5 kilometara na sat?*

Rješenje.

$v = 184$ cm $= 1.84$ m

$t = 45$ min $= 0.75$ h

$\underline{v_č = 5 \text{ km/h}}$

$n = ?$

$$k = \frac{v}{4} + 0.37 \text{ m}$$
$$= \frac{1.84 \text{ m}}{4} + 0.37 \text{ m} = 0.83 \text{ m}$$
$$s = v_č t$$
$$= 5\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 0.75 \text{ h} = 3.75 \text{ km} = 3750 \text{ m}$$
$$n = \frac{s}{k} = \frac{3750 \text{ m}}{0.83 \text{ m}} = 4518.$$

Filip Matić (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 475. *U seriju su spojeni otpornici od $30\ \Omega$, $13\ \Omega$ i paralela u kojoj su otpornici od $12\ \Omega$, $20\ \Omega$ i $15\ \Omega$. Napon izvora je 24 V. Kolika struja teče kroz svaki otpornik?*

Rješenje.

$R_1 = 30\ \Omega,\ R_2 = 13\ \Omega,\ R_3 = 12\ \Omega$

$R_4 = 20\ \Omega,\ R_5 = 15\ \Omega$

$\underline{U = 24\ \text{V}}$

$I_1,\ I_2,\ I_3,\ I_4,\ I_5 = ?$

$R = R_1 + R_2 + R_p$

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{12\ \Omega} + \frac{1}{20\ \Omega} + \frac{1}{15\ \Omega} = \frac{5+3+4}{60\ \Omega} = \frac{1}{5\ \Omega}$$

$R_p = 5\ \Omega$

$R = 30\ \Omega + 13\ \Omega + 5\ \Omega = 48\ \Omega$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{24\ \text{V}}{48\ \Omega} = 0.5\ \text{A} = I_1 = I_2$$

$U_1 = I_1 \cdot R_1 = 0.5\ \text{A} \cdot 30\ \Omega = 15\ \text{V}$

$U_2 = I_2 \cdot R_2 = 0.5\ \text{A} \cdot 13\ \Omega = 6.5\ \text{V}$

$U_p = U - U_1 - U_2 = 2.5\ \text{V}$

$$I_3 = \frac{U_p}{R_3} = \frac{2.5\ \text{V}}{12\ \Omega} = 0.208\ \text{A}$$

$$I_4 = \frac{U_p}{R_4} = \frac{2.5\ \text{V}}{20\ \Omega} = 0.125\ \text{A}$$

$$I_3 = \frac{U_p}{R_5} = \frac{2.5\ \text{V}}{15\ \Omega} = 0.167\ \text{A}.$$

Lana Bailo (8), OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 476. *Dva dječaka vuku sanjke mase 5 kilograma na kojima sjedi djevojčica mase 25 kilograma. Dječaci vuku jednakim silama, a smjer tih sila zatvara sa smjerom gibanja kut od 30 stupnjeva. Koeficijent trenja iznosi 0.1. Kolikim silama dječaci moraju vući da bi se sanjke gibale jednoliko?*

Rješenje.

$m_s = 5\ \text{kg},\ m_d = 25\ \text{kg}$

$\alpha(F_1, F_2) = 60^\circ$

$\underline{\mu = 0.1}$

$F_1,\ F_2 = ?$

$F_{tr} = \mu G$

$$G = m_{uk} g = 30\ \text{kg} \cdot 10\ \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 300\ \text{N}$$

$F_{tr} = 0.1 \cdot 300\ \text{N} = 30\ \text{N} = F_{\text{rezultantna}}.$

Ako sile kojima dječaci vuku sanjke zatvaraju sa smjerom gibanja kut od 30° onda je polovica rezultantne sile jednaka visini jednakostraničkog trokuta kojem su stranice jednake silama kojima dječaci vuku.

$$F_1 = F_2 = \frac{2 \cdot 0.5 F_{tr}}{3}\sqrt{3} = \frac{2 \cdot 15\ \text{N}}{3}\sqrt{3} = 17.32\ \text{N}.$$

Luka Krašnjak (8), OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 477. *Šuplja bakrena cijev vanjskog promjera 22 milimetra, a unutarnjeg 20 milimetara košta 50 kuna po metru duljine. Gustoća bakra iznosi 8900 kg/m^3. Kolika je cijena te cijevi po kilogramu bakra?*

Rješenje.

$d_v = 22\ \text{mm},\ d_u = 20\ \text{mm}$

cijena $= 50$ kn

$\underline{\rho = 8900\ \frac{\text{kn}}{\text{m}}}$

$$\text{cijena}\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) = ?$$

$$V_{(1\ \text{m cijevi})} = V = V_{\text{vanjski}} - V_{\text{unutarnji}} = r_v^2\pi \cdot 100\ \text{cm} - r_u^2\pi \cdot 100\ \text{cm} = 100\ \text{cm}\pi(1.1\ \text{cm})^2 - 100\ \text{cm}\pi(1\ \text{cm})^2 = 65.97\ \text{cm}^3$$

$$m = \rho V = 8.9\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 65.97\ \text{cm}^3 = 587.16\ \text{g} = 0.58716\ \text{kg}$$

$$\text{cijena} = \frac{50\ \text{kn}}{0.58716\ \text{kg}} = 85.16\ \frac{\text{kn}}{\text{kg}}.$$

Vito Martinović (8), OŠ Horvati, Zagreb

1735. *Niz kosinu nagiba α kolica se gibaju jednoliko, bez ubrzanja. Ako nagib povećamo na 2α, kolica će ubrzavati akceleracijom jednakom 25 % ubrzanja slobodnog pada. Odredi koeficijent trenja kolica i kosine i kut α.*

Rješenje. Primijenimo ubrzanje tijela na kosini na slučaj kuta α i 2α:

$$g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha = 0,$$

$$g\sin 2\alpha - \mu g\cos 2\alpha = \frac{g}{4}.$$

Iz prve jednadžbe je $\mu = \mathrm{tg}\,\alpha$, što uvrstimo u drugu i podijelimo s g:

$$\sin 2\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha \cos 2\alpha = \frac{1}{4}.$$

Primjenimo trigonometrijske jednadžbe dvostrukog kuta,

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Uvrštavanjem i kraćenjem dobijemo

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{4} = \mu.$$

Odatle je $\mu = \dfrac{1}{4}$ i $\alpha = \mathrm{arc\,tg}\,0.25 = 14.04^\circ$.

Filip Vučić (2), I. gimnazija, Zagreb

1736. *Mjesec je od Zemlje udaljen najmanje 361.8, a najviše 407 tisuća kilometara (udaljenosti su od središta do središta kugli). Odredi prosječnu, najveću i najmanju brzinu gibanja Mjeseca u odnosu na Zemlju. Masa Zemlje je* $5.98 \cdot 10^{24}$ *kg, a masu Mjeseca i utjecaj Sunca zanemarimo.*

Rješenje. Za gibanje Mjeseca oko Zemlje vrijede zakoni očuvanja energije i očuvanja kutne količine gibanja. U perigeju ($r_{\min}$ i $v_{\max}$) i apogeju ($r_{\max}$ i $v_{\min}$) ti se zakoni mogu pisati jednadžbama:

$$\frac{mv_{\min}^2}{2} - \frac{GMm}{r_{\max}} = \frac{mv_{\max}^2}{2} - \frac{GMm}{r_{\min}},$$

$$mv_{\min}r_{\max} = mv_{\max}r_{\min}.$$

Kraćenjem s masom Mjeseca m dobiva se:

$$\frac{v_{\min}^2}{2} - \frac{GM}{r_{\max}} = \frac{v_{\max}^2}{2} - \frac{GM}{r_{\min}},$$

$$v_{\min}r_{\max} = v_{\max}r_{\min}.$$

To je sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice koji rješavamo supstitucijom:

$$v_{\min} = v_{\max}\frac{r_{\min}}{r_{\max}}.$$

Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobiva se:

$$v_{\max}^2\left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}}\right)^2 - \frac{2GM}{r_{\max}} = v_{\max}^2 - \frac{2GM}{r_{\min}},$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2GM}{1-\left(\dfrac{r_{\min}}{r_{\max}}\right)^2}\left(\frac{1}{r_{\min}} - \frac{1}{r_{\max}}\right)}$$

$$= 1080 \text{ m/s},$$

$$v_{\min} = v_{\max}\frac{r_{\min}}{r_{\max}} = 960 \text{ m/s},$$

$$\overline{v} = \sqrt{v_{\min}v_{\max}} = 1020 \text{ m/s}.$$

Filip Vučić (2), Zagreb

1737. *Element torij (Th) je u prirodi zastupljen sa samo jednim izotopom (^{232}Th), koji se nakon niza α i β raspada raspadne u olovo (^{208}Pb). Odredi energiju (u MeV) koja se ukupno oslobodi u tom nizu raspada. Mase α-čestice, olova i torija u atomskim jedinicama mase dane su tablicom:*

^{4}He	4.002603
^{208}Pb	207.976636
^{232}Th	232.038050

Rješenje. Sačuvanje broja nukleona i naboja uvjetuje da se dogodi ukupno 6 α i 4 β raspada. S obzirom da su elektroni uračunati u mase u tablici, oslobođeni defekt mase iznosi:

$$\Delta m = m(^{232}\mathrm{Th}) - m(^{208}\mathrm{Pb}) - 6m(^{4}\mathrm{He})$$

$$= 0.045796 \text{ a.j.m.}$$

Atomske jedinice mase preračunamo u energiju množenjem s c^2 i preračunamo u MeV množenjem s elementarnim nabojem i dijeljenjem s milijun. To ukupno daje

$$\Delta E = \Delta m \cdot 931.48 = 42.658 \text{ MeV}.$$

Ur.

1738. *Iz uspravnog, stajaćeg položaja padne na pod dijete mase 15 kg visine 60 cm i odrasla osoba mase 80 kg i visine 180 cm. Koliko je puta više energije oslobođeno padom odrasle osobe u odnosu na pad djeteta? Zanemarujemo razlike u rasporedu tjelesne mase.*

Rješenje. Centar mase čovjeka nalazi se na nekoj visini $k \cdot h$ gdje je h visina tog čovjeka, a k realni broj veći od 0, a manji od 1. Ako se zanemaruju razlike u rasporedu tjelesne mase, taj je koeficijent k isti za odraslu osobu i dijete. Efektivno, promatra se kao da je sva masa čovjeka u centru mase pa se padom djeteta i odrasle osobe oslobađa potencijalna energija. Oslobođene energije redom za odraslu osobu i dijete su:

$$E_o = MgkH, \quad E_d = mgkh.$$

Dijeljenjem tih dvaju izraza nalazi se traženi omjer oslobođenih energija:

$$\frac{E_o}{E_d} = \frac{MgkH}{mgkh} = \frac{MH}{mh} = \frac{80 \cdot 180}{15 \cdot 60} = 16.$$

Filip Vučić (2), Zagreb

1739. *Neki čovjek koji stoji na sjevernom polu ima masu 100 kilograma. Ako dođe na ekvator, onda je on radi vrtnje zemlje nešto lakši nego na polu. Koliko je u postotku gubitak njegove težine? (Naputak. Smatramo da je Zemlja idealna kugla polumjera* $R = 6378$ *km, a iznos ubrzanja sile teže na sjevernom polu* $9.83\ m/s^2$ *).*

Rješenje. Obodna brzina vrtnje na ekvatoru određena je radijusom i periodom vrtnje:

$$v = \frac{2R\pi}{T} = \frac{2\pi \cdot 6\,378\,000\ \text{m}}{24 \cdot 3600\ \text{s}} = 463.82\ \text{m/s}.$$

Traženi postotak gubitka težine je omjer pripadne centrifugalne sile i sile teže:

$$p = \frac{F_{cp}}{F_g} = \frac{\frac{mv^2}{R}}{mg} = \frac{v^2}{gR} = \frac{463.82^2}{9.83 \cdot 6\,378\,000}$$
$$= 0.00343 = 0.343\ \%.$$

Ur.

1740. *U* $1\ cm^3$ *nalazi se čisti metan* (CH_4)*, temperature 300 K i pri tlaku 101 325 Pa. Iako je prosječna molekulska masa metana* $16\ g/mol$ *(12 za ugljik* $+4 \cdot 1$ *za vodik), rijetki atomi vodika i ugljika su teži od tog prosjeka. Tako je 1.1 % vjerojatnosti da je ugljik težine 13 umjesto 12, a 0.0115 % da je vodik težine 2 umjesto 1. Koliko je prosječno molekula metana u zadanom kubnom centimetru mase* $21\ g/mol$ *(13 za ugljik* $+4 \cdot 2$ *za vodik)?*

Rješenje. Budući da je metan pri temperaturi 300 K u plinovitom agregatnom stanju, može se primijeniti jednadžba stanja idealnog plina za izračun ukupnog broja molekula

$$pV = N_u kT,$$

gdje je $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K Bolzmannova konstanta. Odatle je ukupan broj molekula

$$N_u = \frac{pV}{kT} = 2.4464 \cdot 10^{19}$$

Molekula metana ima masu 21 jedino ako je građena od atoma ugljika mase 13 i četiri atoma vodika mase 2. Vjerojatnost da je nasumično odabran atom ugljika mase 13 jednaka je $p(^{13}\text{C})$, a vjerojatnost da su nasumično odabrana četiri atoma vodika mase 2 je $p(^2\text{H})^4$ pa je zato vjerojatnost da se nađe takva molekula metana jednaka:

$$p(21) = p(^{13}\text{C}) \cdot p(^2\text{H})^4 = 0.011 \cdot 0.000115^4.$$

Po Bernoullijevom zakonu velikih brojeva, broj traženih molekula je statistički jednak:

$$\begin{aligned} N(21) &= p(21) \cdot N_u \\ &= 1.924 \cdot 10^{-18} \cdot 2.4464 \cdot 10^{19} \\ &\approx 47. \end{aligned}$$

Filip Vučić (2), Zagreb

1741. *Niz kosinu nagiba* α *homogena kuglica se kotrlja bez proklizavanja ubrzanjem* $2.1\ m/s^2$*. Ako je ubrzanje slobodnog pada* $g = 9.81\ m/s^2$*, odredi kut kosine (* α *). Trenje kotrljanja je zanemarivo.*

Rješenje. Na kuglicu djeluje sila teža, a trenje s podlogom kuglicu prisiljava da se kotrlja bez proklizavanja. Translacijska i rotacijska jednadžba gibanja glase:

$$mg\sin\alpha - F_{tr} = ma,$$
$$F_{tr}R = I\alpha',$$

gdje je R radijus kuglice, m njezina masa, $I = 2/5mR^2$ moment tromosti i α' kutna akceleracija. Uvjet kotrljanja bez proklizavanja je

$$\alpha' R = a.$$

U ovom sustavu tri jednadžbe s tri nepoznanice (α', a i α) prvo eliminiramo kutno ubrzanje α'

$$F_{tr}R = \frac{2}{5}mR^2\frac{a}{R},$$

što sređivanjem daje

$$F_{tr} = \frac{2}{5}ma.$$

Uvrštavanjem u jednadžbu translacijskog ubrzanja dobijemo

$$mg\sin\alpha = ma + \frac{2}{5}ma = \frac{7}{5}ma.$$

Izrazimo li kut eksplicitno i uvrstimo zadane brojke, dobijemo

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{7a}{5g}\right) = 17.44^\circ.$$

Filip Vučić (2), Zagreb