Županijsko natjecanje iz matematike, 4. ožujka 2020.

Na temelju rezultata školskog natjecanja, najbolji učenici u svakoj županiji se pozivaju na županijsko natjecanje. Ona su održana 4. ožujka 2020. Na županijskom natjecanju učenici A varijante srednje škole rješavali su po pet zadataka (svaki vrijedi po 10 bodova), dok su učenici B varijante rješavali po pet lakših zadataka od kojih svaki vrijedi po 6 bodova, te dva teža, svaki po 10 bodova.

Zadatci – A varijanta

I. razred

1. U ovisnosti o realnom parametru m odredi za koje realne brojeve x vrijedi

$$\frac{x-m}{x^2}+x \geqslant 2\left(1-\frac{m}{x}\right)+m.$$

2. Odredi sve uređene trojke (a, b, c) prirodnih brojeva za koje vrijedi $a \leqslant b \leqslant c$ i

$$\frac{3}{7}=\frac{1}{a}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{abc}.$$

3. Neka su x, y i z različiti realni brojevi od kojih nijedan nije jednak nuli, takvi da vrijedi

$$x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}.$$

Odredi vrijednost izraza $x^2y^2z^2$.

4. Nad stranicom $\overline{BC}$ kvadrata $ABCD$ nacrtan je jednakostraničan trokut BEC tako da je točka E izvan kvadrata. Točke M i N su redom polovišta dužina $\overline{AE}$ i $\overline{CD}$. Odredi mjeru kuta $\sphericalangle MNC$.

5. Koliko najmanje brojeva treba ukloniti iz skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 2020\}$ tako da nastali skup ne sadrži umnožak svojih dvaju različitih elemenata?

II. razred

1. Odredi sve uređene trojke (x, y, z) realnih brojeva za koje vrijedi

$$x^2+y^2=5, \qquad xz+y=7, \qquad yz-x=1.$$

2. Odredi sve uređene parove (a, b) prirodnih brojeva takve da je

$$V(a, b)-D(a, b)=\frac{ab}{5}.$$

3. Odredi sve realne brojeve x za koje vrijedi $3\sqrt[3]{(14-x)^2}-2\sqrt[3]{(14+x)^2}=5\sqrt[3]{x^2-196}$.

4. Neka je T težište trokuta ABC, a P polovište stranice $\overline{AC}$. Pravac kroz točku T paralelan s pravcem BC siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki E. Dokaži da jednakost $\sphericalangle AEC = \sphericalangle PTC$ vrijedi ako i samo ako vrijedi $\sphericalangle ACB = 90°$.
5. Neka je $n > 1$ prirodni broj. Na koliko se načina u polja ploče dimenzija $2 \times n$ mogu upisati brojevi $1, 2, \dots, 2n$ tako da uzastopni brojevi budu u poljima sa zajedničkom stranicom?

III. razred

1. Duljina jedne stranice trokuta jednaka je aritmetičkoj sredini duljina drugih dviju stranica. Dokaži da mjera srednjeg (po veličini) kuta tog trokuta nije veća od $60°$.
2. Odredi najmanju i najveću vrijednost izraza
$$\frac{1}{\sin^4 x + \cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x + \cos^4 x}.$$
Odredi sve realne brojeve x za koje se te vrijednosti postižu.
3. U trokutu ABC, kut u vrhu C je tupi, a točka D je nožište visine iz vrha C. Točke P i Q nalaze se na dužini $\overline{AB}$ i vrijedi $\sphericalangle PCB = \sphericalangle ACQ = 90°$. Dokaži
$$|AP| \cdot |DQ| = |PD| \cdot |QB|.$$
4. Odredi sve uređene parove (a, b) prirodnih brojeva za koje je $(a + b^2)(a^2 + b)$ potencija broja 2.
5. Baza piramide je pravilni n-terokut. Svaka stranica baze obojena je crnom bojom, dok su svaka dijagonala baze i svaki pobočni brid piramide obojeni ili crvenom ili plavom bojom. Odredi najmanji prirodni broj $n \geq 4$ za koji nužno postoji trokut čiji vrhovi su vrhovi piramide i kojemu su sve tri stranice jednake boje.

IV. razred

1. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo kompleksan broj
$$a_n = (1 + i)\left(1 + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right) \cdots \left(1 + \frac{i}{\sqrt{n}}\right).$$
Izračunaj $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{2019} - a_{2020}|$.
2. Skup svih točaka (x, y) za koje vrijedi $y^2 + 2xy + 40|x| = 400$ dijeli ravninu na nekoliko dijelova od kojih je samo jedan omeđen. Odredi površinu tog dijela ravnine.
3. Na kocki stranice duljine 1 istaknuta je mreža koja se sastoji od 14 točaka i 36 dužina. Točke su vrhovi kocke i središta njezinih strana. Dužine su svi bridovi kocke i još po četiri dužine na svakoj strani kocke koje spajaju središte te strane s njezinim vrhovima. Kolika je duljina najkraćeg puta po toj mreži koji prolazi kroz svih 14 točaka?
4. Dani su cijeli brojevi a, b, c i d. Dokaži da je broj parova (x, y) cijelih brojeva za koje vrijedi $x^2 + ax + b = y^2 + cy + d$ beskonačan ako i samo ako je $a^2 - 4b = c^2 - 4d$.
5. U prostoriji se nalazi n kutija visina $1, 2, 3, \dots, n$ koje treba nekim poretkom smjestiti uz zid. Mačak Fiko može skočiti s jedne kutije na sljedeću ako je sljedeća kutija niža (nije bitno koliko) od one na kojoj se nalazi ili je za najviše 1 viša od one na kojoj se trenutno nalazi. Na koliko načina se kutije mogu poredati tako da Fiko može krenuti s prve kutije u nizu i skočiti redom na svaku iduću kutiju?

Zadatci – B varijanta

I. razred

1. Za pozitivne realne brojeve a i b definira se $a \star b = \dfrac{a-b}{a+b}$. Koliko je

$$\frac{(a\star b)+1}{(b\star a)-1}+\frac{(a\star b)+2}{(b\star a)-2}+\ldots+\frac{(a\star b)+k}{(b\star a)-k}+\ldots+\frac{(a\star b)+2020}{(b\star a)-2020}?$$

2. Riješite nejednadžbu $\left(1-\dfrac{4x^3-x}{x-2x^2}\right)^{-3}>0$.

3. Neka su a, b, c i d realni brojevi različiti od nule takvi da je $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}=0$ i $a+b+c+d+abcd=0$. Izračunajte $\left(\dfrac{1}{ab}-\dfrac{1}{cd}\right)\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\right)$.

4. Gađajući u metu Karlo je nekoliko puta pogodio devetku, nekoliko puta osmicu. Sedmicu je pogodio dvostruko manje puta nego devetku, a broj pogodaka u peticu je za tri manji nego u osmicu. Ukupno je sakupio 200 bodova. Koliko je puta Karlo gađao u metu ako nijednom nije promašio niti je pogodio neki drugi broj? (Pogodak u devetku donosi 9 bodova, u osmicu 8 bodova,...)

5. Unutarnji se kutovi trokuta odnose kao $2:3:7$. Odredite duljinu najdulje stranice trokuta, ako najkraća stranica ima duljinu 1 cm.

6. U nizu brojeva

$$20,\ 202,\ 2020,\ 20202,\ 202020,\ldots$$

svaki se sljedeći broj dobije dopisivanjem znamenke 2 ili 0 prethodnom broju, naizmjence. Izračunajte zbroj znamenaka prvih sto brojeva toga niza koji su djeljivi s 202.

7. Duljine stranica šiljastokutnog trokuta su tri broja od kojih je najveći za četiri veći od najmanjeg, a srednji po veličini je aritmetička sredina preostala dva. Visina trokuta povučena na srednju stranicu po duljini dijeli trokut na dijelove čije su površine u omjeru $3:2$. Odredite opseg zadanog trokuta.

II. razred

1. Odredite najmanji i najveći cijeli broj x za koji je broj $x^4-2021x^2+2020$ negativan.

2. Funkcija $f(x)=x^2+px+q$ poprima negativne vrijednosti samo za $x\in\langle -3,14\rangle$. Koliko cjelobrojnih vrijednosti iz skupa $[-100,-10]$ može poprimiti funkcija f?

3. Do vrha stepeništa ima 8 stuba. Na koliko načina možemo stići na vrh ako se možemo penjati po jednu stubu ili po dvije stube?

4. Duljine stranica trokuta ABC su $|BC|=27$, $|AC|=36$, $|AB|=45$. Neka su P i Q redom točke na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ takve da je $|AP|=|BQ|$ i $AC\parallel PQ$. Izračunajte površinu trokuta PBQ.

5. Ako je $x=2017\cdot 2018\cdot 2021\cdot 2022+4$, izračunajte $\sqrt{x}-2020^2$.

6. Pravokutnik $ABCD$, u kojem je $|AB|>|AD|$, zarotira se oko vrha D u pravokutnik $EFGD$ tako da se vrh A preslika u točku E na dijagonali $\overline{BD}$. Sjecište stranica $\overline{DC}$ i $\overline{EF}$ je točka H. Površina pravokutnika $ABCD$ odnosi se prema površini četverokuta $BCHE$ kao $5:2$. Ako je $\varphi=\sphericalangle ADB$, izračunajte $\dfrac{\sin^2\varphi+1}{\cos^2\varphi+1}$.

7. Luka je predložio Mili, Niki i Tini da zajedno rješavaju zadatke. Do tog je trenutka svaka od djevojaka već riješila određeni broj zadataka i to različitih u odnosu na ostale. Djevojke su odlučile prihvatiti Lukin prijedlog samo ako otkrije koliko je svaka od njih tri već riješila zadataka. Zbroj brojeva zadataka koje su Mila i Nika riješile i umnoška tih brojeva je 14. Za Milu i Tinu taj zbroj iznosi 11, a za Niku i Tinu 19. Koje brojeve Luka mora dobiti?

III. razred

1. Za kompleksne brojeve z i w vrijedi $|z+w| = \sqrt{3}$ i $|z| = |w| = 1$. Izračunajte $|z-w|$.

2. Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} y^{2020x} &= 10, \\ 6060x + 2\log y &= 7. \end{aligned}$$

3. Riješite nejednadžbu $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi x) - 1}{\operatorname{tg}(\pi x) + 1} > 1$.

4. Tena i Ante igraju igru: prvo Tena kaže broj 0, pa Ante kaže broj za 1 veći. Zatim Tena kaže broj za 2 veći od Antinog, Ante kaže broj za 3 veći od Teninog... Igra završava kad netko kaže broj veći od 5050. Koji je to broj? Tko će pobijediti?

5. Duljine dviju stranica trokuta su 7 cm i 4 cm. Kut nasuprot dulje stranice je dva puta veći od kuta nasuprot kraće stranice. Kolika je duljina treće stranice trokuta?

6. Odredite $\cos x$ ako je $\log_{27}\left(\sin 2x - \dfrac{1}{3}\cos x\right) = \dfrac{1}{3} + \log_3(-\cos x)$.

7. Dječje igralište ima oblik trokuta čiji je opseg 36 m, a površina $30\sqrt{3}$ m^2. Ako je mjera jednog kuta 60°, odredite duljine stranica tog igrališta.

IV. razred

1. Riješite nejednadžbu $3^{3x} + 3^4 \leq 3^{2x+2} + 3^{x+2}$.

2. Pravci s jednadžbama $y = k_1x + 2$ i $y = k_2x - 3$ su tangente parabole s jednadžbom $y^2 = 2px$, $p > 0$, a zatvaraju kut od 45°. Odredite jednadžbe svih takvih parabola.

3. Ako je $26! = 403\,291\,x61\,126\,605\,635\,58xy00\,000$, odredite znamenke x i y.

4. Za svaki prirodni broj n, zbroj prvih n članova nekog niza je $S_n = 2.5n^2 - 4.5n$. Koji članovi tog niza poprimaju vrijednosti između $10\,085$ i $10\,095$?

5. Dana su tri paralelna pravca a, b i c. Na pravcu a istaknute su točke A, B i C, na pravcu b točke D, E, F i G, a na pravcu c točke H, I, J, K i L. Koliko je najviše trokuta određeno točkama iz skupa $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L\}$?

6. Odredite površinu skupa svih točaka pridruženih kompleksnim brojevima z za koje vrijedi

$$|z| \leq \left|\frac{1}{z}\right| \quad \text{i} \quad \frac{28277\pi}{12} \leq \arg\left(\frac{z^{2020}}{1+i}\right) \leq \frac{40397\pi}{12}.$$

7. Riješite nejednadžbu

$$\begin{aligned} &\log_{\sqrt{5}}\left(3^{x^2-x-1}+2\right) + \log_5\left(3^{x^2-x-1}+2\right) + \log_{25}\left(3^{x^2-x-1}+2\right) \\ &+ \log_{625}\left(3^{x^2-x-1}+2\right) + \ldots + \log_{5^{2^k}}\left(3^{x^2-x-1}+2\right) + \ldots \leq 4. \end{aligned}$$

Ivan Kokan