9. Europska matematička olimpijada za djevojke, 2020. g.

Ove godine su učenice srednjih škola u Hrvatskoj prvi puta sudjelovale na Europskoj matematičkoj olimpijadi za djevojke.

Na temelju rezultata Državnog natjecanja iz matematike održanog od 28. do 30. ožujka 2019. g. u Poreču i otvorenog poziva svim srednjim školama objavljenog 16. prosinca 2019. g. na *Hrvatsku matematičku olimpijadu za djevojke (HMOD)* pozvane su 24 djevojke na dodatna natjecanja za izbor ekipe od četiri djevojke koje će predstavljati Hrvatsku na Europskoj matematičkoj olimpijadi za djevojke. Natjecanje je održano 16. siječnja 2020. g. na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakultetu u Zagrebu. Učenica Mira Galić je odustala od natjecanja, pa su sudjelovale 23 djevojke. Učenica Leonarda Pribanić je test rješavala u Madisonu, Wisconsin (SAD), gdje je pohađala školu ove godine.

Najuspješnije učenice su bile:

Ida Kolmanić, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin
Petra Kovačić, III. gimnazija, Split
Nika Utrobičić, III. gimnazija, Split
Ema Borevković, XV. gimnazija, Zagreb

i one su predstavljale Republiku Hrvatsku na 9. Europskoj matematičkoj olimpijadi za djevojke (EGMO) od 15. do 21. travnja 2020. g. Natjecanje se trebalo održati u Edmond an Zee u Nizozemskoj. Zbog epidemiološke situacije COVID-19, natjecanje se održalo virtualnim putem 17. i 18. travnja 2020. g. na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

Na ovoj Europskoj matematičkoj olimpijadi za djevojke sudjelovalo je ukupno 204 djevojaka iz 54 država, od čega u službenoj konkurenciji njih 153 iz 39 država. Kako su naše djevojke po prvi puta sudjelovale na ovom natjecanju, ostvarile su zapažene rezultate na koje smo s razlogom ponosni. *Ida Kolmanić* je osvojila srebrnu medalju, *Ema Borevković* brončanu medalju, a *Petra Kovačić* pohvalu. Hrvatska je zauzela 17. mjesto (točnije, podijelila je to mjesto s Bosnom i Hercegovinom te Slovačkom) u konkurenciji 39 država, odnosno 23. mjesto u konkurenciji svih 54 država. Na prvom mjestu je ekipa iz Rusije, a zatim iz Srbije i Rumunjske. Pregled svih rezultata može se vidjeti na adresi:

`https://www.egmo.org/registration/2020/person?template=scoreboard`

S učenicama su, osim njihovih mentora u školi, u okviru službenih priprema, radili Matija Bašić, Mea Bombardelli, Ivan Krijan, Matko Ljulj, Josip Pupić i Borna Vukorepa.

Matija Bašić

Zadatci

Prvi dan, petak, 17. travnja 2020.

Zadatak 1. Za prirodne brojeve a_0, a_1, a_2, ..., a_{3030} vrijedi

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \qquad \text{za } n = 0, 1, 2, \ldots, 3028.$$

Dokaži da je barem jedan od brojeva a_0, a_1, a_2, ..., a_{3030} djeljiv s 2^{2020}.

Zadatak 2. Odredi sve liste $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ nenegativnih realnih brojeva za koje su ispunjena sljedeća tri uvjeta (sva tri):

(i) $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2020}$;

(ii) $x_{2020} \leqslant x_1 + 1$;

(iii) postoji permutacija $(y_1, y_2, \ldots, y_{2020})$ liste $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ takva da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{2020} \big((x_i + 1)(y_i + 1)\big)^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Permutacija liste je lista iste duljine, s istim elementima, ali elementi mogu biti u bilo kojem poretku. Na primjer, $(2, 1, 2)$ *je permutacija od* $(1, 2, 2)$*; i jedno i drugo su permutacije od* $(2, 2, 1)$*. Uoči da je svaka lista permutacija same sebe.*

Zadatak 3. Neka je $ABCDEF$ konveksni šesterokut takav da vrijedi $\sphericalangle A = \sphericalangle C = \sphericalangle E$ i $\sphericalangle B = \sphericalangle D = \sphericalangle F$, a (unutarnje) simetrale kutova $\sphericalangle A$, $\sphericalangle C$ i $\sphericalangle E$ se sijeku u jednoj točki.

Dokaži da se (unutarnje) simetrale kutova $\sphericalangle B$, $\sphericalangle D$ i $\sphericalangle F$ moraju također sjeći u jednoj točki.

Označavamo $\sphericalangle A = \sphericalangle FAB$*. Slično vrijedi za ostale unutarnje kutove šesterokuta.*

Drugi dan, subota, 18. travnja 2020.

Zadatak 4. Permutaciju prirodnih brojeva 1, $2, \ldots, m$ zovemo *svježom* ako ne postoji prirodni broj k takav da je $k < m$ i da su prvih k brojeva te permutacije brojevi 1, $2, \ldots, k$ u nekom poretku. Neka je f_m broj svježih permutacija prirodnih brojeva 1, $2, \ldots, m$.

Dokaži da je $f_n \geqslant n \cdot f_{n-1}$ za sve $n \geqslant 3$.

Na primjer, za $m = 4$*, permutacija* $(3, 1, 4, 2)$ *je svježa, dok permutacija* $(2, 3, 1, 4)$ *nije.*

Zadatak 5. Dan je trokut ABC u kojem je $\sphericalangle BCA > 90°$. Opisana kružnica Γ trokuta ABC ima polumjer R. U unutrašnjosti dužine $\overline{AB}$ nalazi se točka P takva da je $|PB| = |PC|$ i da je duljina $|PA|$ jednaka R. Simetrala dužine $\overline{PB}$ siječe kružnicu Γ u točkama D i E.

Dokaži da je P središte upisane kružnice trokuta CDE.

Zadatak 6. Neka je $m > 1$ prirodni broj. Niz a_1, a_2, $a_3, \ldots$ definiran je s $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$, te za sve $n \geqslant 4$:

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Odredi sve prirodne brojeve m za koje su svi članovi tog niza potpuni kvadrati.

Vrijeme rješavanja svakog dana: 4 sata i 30 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.