14. Srednjoeuropska matematička olimpijada, 2020. g.

Virtualnim putem se održavala *14. Srednjoeuropska matematička olimpijada (MEMO)* od 28. kolovoza do 4. rujna 2020. g. U hrvatskoj ekipi su bili: *Gabrijel Radovčić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Patrik Pavić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Dorijan Lendvaj*, XV. gimnazija, Zagreb, *Ema Borevković*, XV. gimnazija, Zagreb, *Vedran Cifrek*, XV. gimnatija, Zagreb, *Ivan Jambrešić*, Privatna gimnazija i ekonomska škola Futura, Zagreb.

Voditeljii naše ekipe su bili *Matko Ljulj* i *Matija Bašić*, dok je *Ivan Krijan* sudjelovao u organizaciji i provedbi natjecanja.

Naši natjecatelji su rješavali zadatke 29. kolovoza na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Ove godine nije održano timsko natjecanje, već samo pojedinačno.

Od naših učenika *Patrik Pavić*, *Dorijan Lendvaj* i *Ema Borevković* su osvojili srebrnu medalju, a *Ivan Jambrešić* brončanu. Više detalja može se naći na adresi
`http://memo2020.memo-official.org`

Matko Ljulj

Zadatci

Zadatak I-1. Neka je $\mathbb{N}$ skup prirodnih brojeva. Odredi sve prirodne brojeve k za koje postoje funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je g neograničena i da jednakost

$$f^{g(n)}(n) = f(n) + k$$

vrijedi za sve prirodne brojeve n.

Napomena. Zapis f^i označava primjenu funkcije f i puta, tj.

$$f^i(j) = \underbrace{f(f(\ldots f(f(j))\ldots))}_{i \text{ puta}}.$$

Zadatak I-2. Kažemo da je prirodan broj N *zarazan* ako postoji 1000 uzastopnih nenegativnih cijelih brojeva kojima je ukupna suma svih znamenaka jednaka N. Odredi sve zarazne brojeve.

Zadatak I-3. Dan je šiljastokutan i raznostraničan trokut ABC, njemu opisana kružnica ω i I središte njemu upisane kružnice. Pretpostavimo da ortocentar H trokuta BIC leži unutar kružnice ω. Neka je M polovište duljeg luka BC kružnice ω. Neka je N polovište kraćeg luka AM kružnice ω.

Dokaži da postoji kružnica koja dira kružnicu ω u točki N te dira kružnice opisane trokutima BHI i CHI.

Zadatak I-4. Odredi sve prirodne brojeve n za koje postoje prirodni brojevi x_1, $x_2, \ldots, x_n$ takvi da vrijedi

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{2}{x_2^2} + \frac{4}{x_3^2} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{x_n^2} = 1.$$

Vrijeme rješavanja: 5 sati. Vrijeme za pitanja: 60 min.

Svaki zadatak vrijedi 8 bodova. Poredak zadataka ne ovisi o njihovoj težini.