Kiberprostorno matematičko natjecanje (CMC), 2020. g.

Godine 2020. održano je po prvi put *Kiberprostorno matematičko natjecanje (Cyberspace Mathematical Competition (CMC))*, kako bi se mladim matematičarima diljem svijeta pružila prilika za bavljenje matematikom i u uvjetima pandemije. Natjecanje su organizirali renomirani matematičari iz American Mathematical Competitions uz tehničku podršku Art of Problem Solving (AoPS).

U hrvatskoj ekipi je bilo šest članova ekipe za 61. Međunarodnu matematičku olimpijadu i dvije djevojke:

Bernard Inkret, XV. gimnazija, Zagreb
Noel Lakić, Gimnazija Franje Petrića, Zadar
Ivan Vojvodić, XV. gimnazija, Zagreb
Luka Bulić Bračulj, III. gimnazija, Split
Krešimir Nežmah, XV. gimnazija, Zagreb
Jakov Ljubičić, Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb
Ida Kolmanić, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin
Ema Borevković, XV. gimnazija, Zagreb.

Učenici su rješavali zadatke na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu 13. i 14. srpnja 2020. g. U konkurenciji 76 zemalja svijeta naša ekipa je osvojila 24. mjesto, a pojedinačno su *Noel Lakić* i *Ivan Vojvodić* osvojili srebrnu, *Bernard Inkret*, *Krešimir Nežmah* i *Luka Bulić Bračulj* brončanu medalju, dok su *Jakov Ljubičić*, *Ema Borevković* i *Ida Kolmanić* dobili pohvalu. Voditelji hrvatske ekipe su bili *Matija Bašić* i *Azra Tafro*. Više detalja o ovom natjecanju možete vidjeti na adresi:

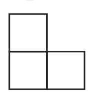
`https://artofproblemsolving.com/contests/cmc`

Matija Bašić

Zadatci

Prvi dan, ponedjeljak, 13. srpnja 2020.

Zadatak 1. Promotrimo ploču koja se sastoji od $n \times n$ polja. Glavna dijagonala ploče sastoji se od n polja duž djagonale od gornjeg lijevog do donjeg desnog polja. Na raspolaganju je neograničena količina pločica sljedećeg oblika:



Pločice je dozvoljeno rotirati. Želimo staviti pločice na ploču tako da svaka pločica prekriva točno tri polja, pločice se ne preklapaju, nijedno polje na glavnoj dijagonali ne bude prekriveno i sva ostala budu prekrivena točno jednom. Za koje $n \geq 2$ je to moguće?

Zadatak 2. Neka je $f(x) = 3x^2 + 1$. Dokaži da za svaki prirodan broj n, umnožak

$$f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(n)$$

ima najviše n različitih prostih djelitelja.

Zadatak 3. Neka je ABC trokut u kojem vrijedi $|AB| > |BC|$. Na dužini $\overline{BC}$ odabrana je točka D. Neka je E točka na opisanoj kružnici trokuta ABC koja leži na suprotnoj strani pravca BC u odnosu na točku A takva da vrijedi $\sphericalangle BAE = \sphericalangle DAC$. Neka je I središte upiane kružnice trokuta ABD, a J središte upisane kružnice trokuta ACE. Dokaži da pravac IJ prolazi jednom fiksnom točkom, neovisno o izboru točke D.

Zadatak 4. Za neparan prirodni broj n promatramo ploču dimenzija $n \times n$. Neka polja ploče obojena su zeleno bojom na način da se šahovski kralj može premjestiti s bilo kojeg zelenog polja na bilo koje drugo zeleno polje konačnim nizom poteza tako da se u svakom trenutku nalazi na zelenom polju.

Dokaži da je kralju za svako takvo premještanje dovoljno $\frac{n^2 - 1}{2}$ poteza.

(U jednom potezu, šahovski kralj se može pomaknuti s jednog polja na drugo ako i samo ako ta dva polja imaju zajednički vrh ili zajedničku stranicu.)

Drugi dan, utorak, 14. srpnja 2020.

Zadatak 5. Na ploči je napisano 2020 prirodnih brojeva. Svake minute, Ilko obriše dva broja u zamijeni ih njihovim zbrojem, razlikom, umnoškom ili količnikom. Na primjer, ako Ilko obriše brojeve 6 i 3, može ih zamijeniti bilo kojim od brojeva iz skupa $\{6 + 3, 6 - 3, 3 - 6, 6 \cdot 3, 6 : 3, 3 : 6\} = \{9, 3, -3, 18, 2, \frac{1}{2}\}$. Nakon 2019 minuta, Ilko je napisao na ploču broj -2020. Dokaži da je, počevši od istih 2020 brojeva po istim pravilima, mogao kao posljednji broj na ploči dobiti broj 2020.

Zadatak 6. Odredi sve prirodne brojeve $n \geq 3$ za koje je sljedeća tvrdnja istinita: Ako je P konveksan n-terokut koji ima $n - 1$ sukladnih stranica i $n - 1$ sukladnih kutova, onda je P pravilan mnogokut.

Zadatak 7. Svako od n^2 polja ploče $n \times n$ je crno ili bijelo. Neka je a_i broj bijelih polja u i-tom retku, a b_i broj crnih polja u i-tom stupcu. Odredi najveću moguću vrijednost koju izraz $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ može poprimiti za neki od svih mogućih rasporeda crnih i bijelih polja.

Zadatak 8. Neka je $a_1, a_2, \ldots$ beskonačan niz pozitivnih realnih brojeva takav da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n+1}^2}{n + 1}}.$$

Dokaži da je niz $a_1, a_2, \ldots$ konstantan.

Vrijeme rješavanja svakog dana: 5 sati.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.